

ELEMENS

DES

PRINCIPALES PARTIES

DES

MATHÉMATIQUES.

ELEMENS GENERAUX DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHÉMATIQUES, NECESSAIRES A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de* LA FERE.

TOME PREMIER.



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la ruë Gille-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

PRÉFACE.

APRE's tous les Traités que j'ai mis au jour fur prefque toutes les parties des Mathématiques, on feroit fans doute furpris de voir paroître des nouveaux Elémens de ma façon, fi je ne rapportois les motifs qui m'ont engagé à entreprendre ce travail. Lorfque je compofai mon Cours en cinq Volumes *in*-4°. mon deffein étoit d'écrire pour l'inftruction du Public en général, & par conféquent pour toutes les profeffions & les états aufquels les Sciences Mathématiques peuvent être de quelque fecours; de-là cette efpece de diffufion, ou pour mieux dire, ces longs détails dont il ne m'étoit pas poffible de me difpenfer dès que je voulois me rendre utile également à tous. Aujourd'hui mes vûës font bien différentes, les perfonnes pour qui principalement je me fuis attaché à cet Ouvrage, font des Militaires deftinés à un Service qui demande des connoiffances particulieres & beaucoup de fçavoir. On conçoit d'abord aifément qu'il faut ici du choix dans les matiéres, qu'il en eft beaucoup que je dois paffer fous filence, ou ne traiter que légerement, & d'autres au contraire que je ne fçaurois trop éclaircir. A quoi ferviroit, par exemple, de faire de grands difcours & de longues differtations fur les nouvelles Méthodes, & le calcul différentiel & intégral? les belles & fubtiles recherches que l'on fait aujourd'hui fur les différentes courbes, qui font le principal objet de ces calculs, fur les différens ordres de ces courbes, fur la route que prennent leurs branches, fur leurs points d'inflexion & de rebrouffement, fur les points fimples & multiples, fur leur rectification, & fur la quadrature des efpaces qu'elles renferment, font des connoiffances auffi inutiles à des Guerriers, que le feroit la découverte d'un nouveau

Satellite autour de Jupiter, ou de quelque calcul qui fixeroit le retour périodique d'une Cométe. Ces sortes de sujets n'ont rien de commun avec le bien que les Militaires doivent procurer à l'Etat, & l'on peut fort bien sans eux, parvenir à la gloire & aux récompenses que méritent l'application à son devoir & les belles actions.

Il n'en est pas de même des calculs ordinaires, de la Géometrie, de la Trigonometrie, de l'usage qu'on fait de cette Science sur le terrein, du Nivellement, de la Mesure des surfaces planes, de leurs rapports entr'elles, de leurs changemens, de leurs divisions, de la Mesure des solides, du Toisé des surfaces & des solides, de celui des bois, des sections coniques, de la science du mouvement, de la Méchanique, de la connoissance des Machines, des proprietés des fluides, & entr'autres de celles de l'air & de l'eau. C'est sur les principes de la plûpart de ces choses qu'est fondé le grand Art de la Guerre, & s'il est permis à quelques Officiers de n'en avoir que des legeres notions, il en est beaucoup au contraire qui ne sçauroient remplir leurs postes avec distinction & honneur, s'ils négligeoient d'en acquerir de profondes & solides connoissances. La plûpart des manœuvres militaires se font avec beaucoup de promptitude, il faut souvent se décider sans avoir le tems de faire de longues reflexions : comment voudroit-on qu'un homme superficiel, & qui ne se feroit pas fait un usage de sçavoir se retourner selon les occurrences, put prendre le parti convenable, à moins que le hazard & la fortune n'y eussent la meilleure part.

L'Etablissement des cinq Ecoles d'Artillerie, & les avantages que l'Etat en retire, sont aujourd'hui connus de tout le monde. On sçait que ces Ecoles sont, pour ainsi dire, autant de pepinieres d'où sortent grand nombre d'Officiers, en qui la science & la valeur semblent se disputer à l'envi la gloire de les rendre utiles au service de leur Prince, & au bien du Royaume; l'éloge que j'entreprendrois d'en faire ici, seroit certainement au-dessous de l'idée que j'ai de leur mérite, & de celle que toute l'Europe en

a conçue depuis long-tems. Or dans ces Ecoles où Messieurs les Commandans prennent un extrême soin que les Officiers soient instruits, & fassent des progrès dans les parties des Mathématiques qui conviennent à leur état, il a été reglé que l'on enseigneroit un même Cours, afin que les Officiers & les Cadets des cinq Bataillons de Royal-Artillerie, qui se transplantent de trois en trois ans d'une Garnison à l'autre, ne fussent pas retardés dans leurs Etudes par les changemens de Méthodes, & les différentes manieres d'enseigner. Cependant comme ce Cours, de l'aveu même de son Auteur, n'a pas toute la perfection qu'il auroit pû lui donner, s'il avoit eu le loisir d'en faire une seconde Edition; que la plûpart des matiéres y sont traitées d'une maniere trop resserrée & trop seche, qui ne laisse point entrevoir les usages ausquels elles peuvent servir, & qu'il s'en trouve grand nombre d'autres qui demanderoient des démonstrations plus nettes & plus exactes, il n'est pas surprenant que les Professeurs, sans vouloir déroger au sage Reglement qui a été fait, mais uniquement pour mieux répondre aux intentions de l'Auguste Prince qui leur a confié l'instruction de ses Officiers, se soient toujours crûs obligés d'ajouter à cet Ouvrage les réflexions & les commentaires qui peuvent en corriger les défauts, & procurer l'avancement de ceux à qui ils ont l'honneur de montrer.

Il seroit assez inutile en effet d'entasser Theoreme sur Theoreme, si l'on ne faisoit voir l'ordre & l'enchaînement qu'ils ont entr'eux, l'étendue des conséquences qu'on en peut tirer, & l'application qu'on en peut faire à grand nombre de sujets utiles & intéressans; c'est à quoi ne font pas assez d'attention la plûpart des personnes qui étudient les Mathématiques, & souvent même les Maîtres qui les enseignent. On sçait par cœur toutes les Propositions d'Euclide, grand nombre de celles d'Archimede, de Pappus & d'Appollonius, on lit dans les Ouvrages des Modernes, on se fait gloire de sçavoir que Pythagore sacrifia cent Bœufs aux Muses, pour avoir découvert la 47e. d'Euclide, qu'Archimede transporté & hors de lui-même, d'avoir trouvé en entrant dans

le Bain, le moyen de réfoudre la queſtion que le Roy de Syracuſe lui avoit propoſée, en ſortir tout nud, & courut comme un fou par les rues, en répetant : *je l'ai trouvé, je l'ai trouvé*, & cent autres traits hiſtoriques, qui marquent de l'érudition; mais avec toutes ces belles connoiſſances, qu'on vienne à propoſer un Problême qui malheureuſement ne ſe trouve point dans les Auteurs qu'on a lûs, on s'y trouve tout auſſi embarraſſé que s'il s'agiſſoit d'un métier qu'on n'auroit jamais fait.

Pour ſe mettre à couvert de ce reproche, on ne manque pas de dire que l'eſprit d'invention n'eſt pas donné à tous, & qu'il n'appartient qu'à certains génies heureux & tranſcendans de s'élever au-deſſus de ceux qui nous ont précedé. Ceci pourroit être vrai à l'égard de certaines découvertes extraordinaires qui demandent une ſagacité & une contention d'eſprit dont tous les Géometres ne ſont peut-être pas capables, quoique doués d'ailleurs de beaucoup de talens. Mais qu'en général la moindre Propoſition que l'on n'aura pas vû dans les Ouvrages de ceux qui ont écrit avant nous, nous étonne & nous arrête tout court, c'eſt une erreur qui ne peut provenir que de la mauvaiſe façon dont on s'aviſe d'étudier. Le propre des Mathématiques, eſt d'étendre les lumieres de l'eſprit, de le perfectionner, & de le rendre inventif. Tout homme qui a aſſez de génie pour comprendre les démonſtrations que cette Science employe, en auroit certainement aſſez pour en ſaiſir la Méthode, & s'il n'arrive pas à tous ceux qui s'y appliquent de parvenir juſques là, c'eſt qu'on étudie d'une façon plutôt hiſtorique que judicieuſe, & qu'on s'imagine avoir tout fait, lorſqu'au bout d'un certain tems on a amaſſé dans ſon eſprit un tas mal arrangé de Propoſitions & de Problêmes dont on ne connoît les tenans & les aboutiſſans, qu'à travers un nuage rempli d'obſcurité. Il ne s'agit donc pas ici d'aller avec précipitation, ni de faire de grands pas, qui ne menent à rien; c'eſt à l'ordre & à la liaiſon des matieres qu'il faut être attentif autant & plus qu'aux matieres même, & pourvû qu'on ſe gêne à marcher avec cette précaution, on éprouvera

bien-tôt que la Géometrie & les Mathématiques offrent un vaste champ, où il est permis à tout homme qui veut travailler de partager la gloire d'une riche moisson.

Ces maximes que je n'ai jamais perdu de vûe dans les exercices Mathématiques de l'Ecole de la Fere où j'ai l'honneur de professer, ont eu tout le succès que je pouvois en attendre, on y a vû grand nombre d'Officiers & de Volontaires dans l'espace de sept ou huit mois, faire des progrès qui après une étude de quelques années, auroient pû paroître étonnans, & s'élever autant au-dessus des Géometres ordinaires, que ceux-ci se croyent supérieurs aux simples Artistes qui suivent une pratique aveugle, dont ils ignorent la raison : c'est le témoignage qu'en ont souvent rendu Messieurs nos Commandans & nos Officiers plus avancés, qui par une longue & sérieuse application, ont acquis un sçavoir consommé. Je puis même dire, sans crainte d'en être démenti, que c'est à leur sollicitation que je me suis déterminé à rédiger & mettre dans un ordre naturel les differens Commentaires & les Supplémens que j'ajoutois à notre Cours, à mesure que l'occasion s'en présentoit, de façon qu'on trouvera dans ce Volume non-seulement tout ce qui est dans le Cours, mais encore grand nombre d'autres matieres dont la connoissance est absolument nécessaire, le tout expliqué & démontré de la maniere la plus simple & la plus conforme aux sages vûes que l'on a eu en établissant nos Ecoles.

Quoique ce soit aujourd'hui un usage presque général de mettre de l'Algebre partout, & de ne rien démontrer qu'en employant les regles de ce Calcul, il m'a paru cependant qu'il m'étoit permis de ne me pas conformer à cette espece de loi, pour des bonnes raisons qu'il est à propos que je rapporte, afin qu'on ne dise pas que c'est par caprice ou par défaut de lumiere que je refuse d'acquiescer à un sentiment qui paroît avoir pris le dessus.

En premier lieu, l'Algebre suppose la formation des figures ausquelles on l'applique, & la connoissance de leurs principales

proprietés; c'eſt par le moyen de celles-ci qu'elle parvient à en découvrir d'autres qui demanderoient de plus ſérieuſes réflexions. Il faut donc laiſſer à ceux qui commencent, le loiſir de conſidérer attentivement ces figures, de déduire de leurs formations les proprietés qu'ils ont beſoin de connoître, & de s'en tracer dans le cerveau des images familieres & nettes, ſans leſquelles il eſt impoſſible qu'on puiſſe ſuivre le fil d'un raiſonnement géométrique. Le Calcul qu'on voudroit joindre ici par trop de précipitation, ne ſerviroit qu'à les jetter dans un nouvel embarras, non - ſeulement par les dénominations différentes qu'il donne aux mêmes grandeurs, mais encore par l'attention qu'il faut faire pour ne pas commettre d'erreur dans ſes opérations. L'Eſprit humain veut être ménagé, ce n'eſt pas le connoître à fonds, que de lui propoſer de plein ſaut tant de difficultés à ſurmonter à la fois.

En ſecond lieu, la ſimplicité des principes ſur leſquels le Calcul Algébrique eſt fondé, donne une certitude parfaite à ſes réſultats, mais elle ne ſatisfait, ni n'éclaire l'eſprit; on ſçait après avoir examiné ſi l'on ne s'eſt point trompé, que les choſes doivent être comme on les a trouvées par le calcul, ſans ſçavoir les raiſons qui doivent les rendre telles, & deſlors l'eſprit toujours curieux de connoître les cauſes des effets qui ſe préſentent à lui, s'agite & ne ceſſe d'être dans l'inquiétude, à moins qu'on ne lui donne des démonſtrations tirées de la nature même du ſujet. Il faudroit donc pour le tranquilliſer avoir reçours à ces démonſtrations, & c'eſt ce qu'on n'a garde de faire, puiſqu'on n'employe le calcul que pour ne pas ſe jetter dans ces difficultés. S'il eſt vrai, comme Wallis, & quelques Sçavans de notre ſiécle l'ont penſé, que les Anciens ayent eu une Analyſe aſſez ſemblable à la nôtre, pour faire les découvertes qu'ils nous ont laiſſées, je trouve qu'ils onr pris le bon parti en ſubſtituant à cette Analyſe les démonſtrations que nous trouvons dans leur Ouvrage; ils ſe ſont rendus plus intelligibles & plus convaincans, & de plus ils ont fermé la porte aux diſputes qui ne ſont que trop fréquentes

de nos jours au grand ſcandale de bien des gens, & à la honte d'une Science, qui autrefois unique dépoſitaire de la vérité entre les Sciences humaines ne peut maintenant ſe garantir des préjugés & des opinions qui tirannisent les autres. Un Auteur aujourd'hui entreprend de traiter un certain ſujet, & y employe une certaine Méthode; ſon calcul fait, il tire de ſon réſultat les conſéquences qu'il croit pouvoir en déduire, & nous donne ces conſéquences & ce réſultat comme autant de vérités dont on ne peut douter. Un autre dans le même tems s'applique à la même queſtion, mais par une autre voye, ſon réſultat & ſes conſéquences ſont différentes; grande diſpute là-deſſus, on répond, on réplique, les Ecrits ſe multiplient, & la difficulté loin d'être éclaircie, s'embrouille de plus en plus. D'où peuvent venir ces ſortes de diſputes dont il ſeroit aiſé de donner des exemples récens; c'eſt, s'il m'eſt permis de dire mon avis, qu'en pareil cas les uns ni les autres ne cherchent point à réſoudre la queſtion par la voye qui ſeule pourroit la terminer. Si les calculs ſont juſtes & exacts, ſi les conſéquences qu'on en tire ne ſont pas forcées, tout ce qu'on avance doit pouvoir ſe déduire des proprietés de la figure ſur laquelle on travaille. Pourquoi donc après le calcul ne pas chercher dans cette même figure, ce que l'on a crû trouver dans ſes opérations? ce ſeroit ſans doute le moyen le plus naturel, ou même l'unique, de donner une entiere évidence à la découverte qu'on a faite, & de faire naître dans l'eſprit de tout le monde une parfaite conviction.

Ceux qui ſont du ſentiment qu'avant les nouvelles Méthodes, il n'y avoit d'autre voye d'invention que la ſynthèſe, par la raiſon qu'on ne trouve aucun veſtige de calcul dans les Ecrits des ſiécles paſſés, diſent ordinairement que les Anciens ne travailloient qu'à force de tête, & c'eſt, à mon avis, le plus bel éloge qu'on puiſſe leur donner. En effet, s'ils ne ſont parvenus aux connoiſſances que nous admirons dans leurs Ouvrages, que par les principes les plus ſimples de la Géométrie, & par une ſuite de longs raiſonnemens qui cependant ne les ont jamais jettés dans

magne ait produit, soutient que lorsqu'on étudie les Mathématiques pour cultiver l'esprit, & acquérir la justesse du raisonnement, il faut s'attacher beaucoup à démontrer à la maniere d'Euclide; que les démonstrations analytiques peuvent à la vérité conduire en quelque façon à cette fin, mais qu'il s'en faut de beaucoup qu'elles ayent la même utilité; qu'il paroît par quelques Ecrits de Messieurs Descartes, Newton & Herman, que leurs raisonnemens auroient été bien plus solides, s'ils avoient eu un peu plus d'usage de la synthèse; enfin, qu'on ne doit pas regarder comme puérile ce qu'il dit en faveur de la Méthode des Anciens, puisque les plus grands génies auroient fait beaucoup mieux, s'ils s'étoient un peu plus accoutumés à cette façon de raisonner. Je n'ai point traduit littéralement les termes de cet Auteur, de peur d'être trop long, mais on les trouvera en substance dans le cinquiéme Volume de ses Elémens de Mathématique, imprimé à Genéve, *Chap.* 2. de la Dissertation où il est traité de la façon d'étudier cette Science. Je pourrois rapporter le sentiment de grand nombre d'autres Auteurs Modernes qui pensent à peu près de même; mais ceci suffit pour faire voir de quelle maniere il faut user des différentes Méthodes pour ne pas tomber dans des abus qui méritent d'être blâmés. On peut, & on fait même bien de calculer, lorsqu'on a acquis toutes les connoissances nécessaires pour s'en tirer avec succès, cette voye soulage l'esprit dans ses recherches, & abrege beaucoup le travail; mais après avoir trouvé ce qu'on cherche, il faut, autant qu'on peut, l'appuyer sur de bonnes démonstrations, & ne pas compter que les opérations que l'on a faites, puissent tenir lieu d'un raisonnement qui entraîne l'évidence & la conviction.

Au reste, je n'ai garde de penser qu'on doive bannir entierement de nos Ecoles l'Algebre & la connoissance des nouvelles Méthodes. Je sçais qu'il y a beaucoup d'Officiers très-capables d'y faire de grands progrès, & de s'en servir même avec utilité; mais comme ces calculs, souvent plus curieux que nécessaires, sont extrêmement attrayans, au point même qu'on a vû bien des

perſonnes quitter tout pour s'y attacher, je crois qu'il eſt bon d'en parler ſobrement, & qu'il vaut encore mieux faire des Géometres conſommés dans la pratique de leur Métier, que de faire des Sçavans abſtraits qui prendroient du dégoût pour grand nombre de détails dont ils ne peuvent ſe diſpenſer. Mais il eſt tems de donner ici le plan de mon Ouvrage.

Je le diviſe en trois Livres : le premier contient les Elémens de l'Arithmétique, de l'Algébre, de l'Analyſe, des Raiſons, Proportions & Progreſſions arithmétiques & géometriques avec un petit Traité des Logarithmes ; le ſecond renferme les Elémens de la Géometrie, de la Trigonométrie, du Nivellement, de la Planimétrie, de la Stéréométrie, des Sections coniques, le Toiſé de la Maçonnerie & celui des Bois. Enfin j'ai compris dans le troiſiéme, les Elémens de l'Arithmétique des Infinis, & la Méchanique générale, c'eſt-à-dire la ſcience du mouvement, la Statique, l'Hydroſtatique, l'Airométrie, & l'Hydraulique, & un petit Traité de Perſpective. Entrons dans le détail.

La plûpart des Volontaires d'Artillerie & des Cadets de Royal-Artillerie, entrent dans ces Corps ſans avoir la moindre teinture de l'Arithmétique. Il eſt vrai que Meſſieurs les Officiers ſe font ſouvent un plaiſir de les enſeigner, & que de plus il ſe trouve quelquefois des Répétiteurs à qui ils peuvent avoir recours ; car les Profeſſeurs occupés du ſoin de leurs Salles, ne peuvent ſuffire pour le détail des leçons particulieres, quelque bonne volonté qu'ils puiſſent avoir. Cependant comme ces Répétiteurs ne ſont pas ſtables dans nos Garniſons, qu'ils ne ſont pas toujours des plus éclairés, & que nos Officiers qui veulent bien ſe donner la peine d'enſeigner les Commençans, ſeroient bien aiſes d'avoir un Ouvrage tout fait, qui les exemptât du ſoin de chercher la Méthode la plus convenable, j'ai crû qu'il étoit à propos de commencer par un Traité de cette Science, où je démontre de la maniere la plus ſimple, les principales Regles, ſçavoir l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, & la Diviſion ſimple & compoſée, le Calcul des Fractions, l'Extraction de la Racine

quarrée, & celle de la Racine cubique. Ceux qui auront appris ces Regles de la façon que je les ai traitées, comprendront plus aiſément le reſte de cet Ouvrage, à cauſe de l'uniformité de la Méthode.

L'Algébre n'eſt autre choſe que la ſcience qui apprend à faire les opérations de l'Arithmétique, en employant les lettres de l'Alphabeth au lieu des chiffres ordinaires, ce que l'on fait par le moyen de certains ſignes qu'on a choiſi pour marquer l'Addition, la Souſtraction, &c. J'en explique les opérations, je fais voir la raiſon qui a obligé d'inventer ce Calcul, l'uſage qu'on en doit faire pour réſoudre les Problêmes qu'on propoſe; ce que c'eſt que Problême déterminé, & Problême indéterminé; la maniere d'en trouver la ſolution; comment on connoît ſi une Equation eſt du premier dégré, du ſecond, du troiſiéme, &c. & la Méthode génerale d'en trouver les Racines. Toutes ces choſes ſont fondées ſur les Regles de l'Arithmétique & ſur les principes les plus ſimples des Mathématiques, tels qu'eſt celui de dire, que ſi à deux nombres ou à deux grandeurs égales, on ôte ou on ajoute des grandeurs égales; ſi on les multiplie ou ſi on les diviſe par ces grandeurs égales, les ſommes, les reſtes, les produits, & les quotients ſeront encore égaux; ainſi elles portent avec elles leur démonſtration, lorſqu'on ne les applique, comme j'ai fait, qu'aux queſtions qui roulent ſur les nombres, & leur étude eſt très-utile pour accoutumer l'eſprit à faire attention à ſes démarches & à les ſimplifier.

Les Géometres entendent par le mot de *Raiſon*, la comparaiſon que l'on fait de deux nombres ou de deux grandeurs. Cette comparaiſon peut ſe faire ou en examinant la différence qui ſe trouve entre les deux grandeurs, ce qui ſe nomme *Raiſon Arithmétique*, ou en obſervant combien de fois l'une des deux grandeurs contient l'autre, ce qui ſe nomme *Raiſon Géometrique*. De même ſi après avoir comparé deux grandeurs, on vient à en comparer deux autres, & qu'on trouve que les deux comparaiſons ſoient ſemblables, on dit qu'il y a proportion entre ces quatre

grandeurs, & cette proportion eſt arithmétique ou géométrique; ſelon que les raiſons qui les compoſent ſont arithmétiques ou géométriques. Enfin l'on dit qu'il y a progreſſion arithmétique ou géometrique, lorſque pluſieurs grandeurs rangées de ſuite, ont entr'elles la même différence, ou qu'elles ſe contiennent par ordre de la même façon. Ce que l'on enſeigne là-deſſus eſt l'ame non-ſeulement de l'Arithmétique, mais encore de toutes les ſciences Mathémathiques. Les mots de *Nombre* ou de *Grandeur* ne nous préſentent que des idées abſtraites, & ſi nous voulons en connoître quelque choſe de plus, ce ne peut être que par le moyen des rapports que les nombres ou les grandeurs ont entr'eux, & à une commune meſure. Il faut donc s'attacher à cette matiere avec beaucoup d'attention, à moins qu'on ne veuille s'expoſer à trouver dans la ſuite des difficultés inſurmontables qui obligeroient ſouvent à rebrouſſer chemin. La maniere dont j'ai traité ce ſujet, l'application que j'en ai faite aux Regles de Trois directe & indirecte, ſimples & compoſées, à la Regle de societé, à celle d'alliage, &c. & les queſtions numériques que j'y ai ajoutées, diſſiperont beaucoup l'ennui que l'eſprit en ſouffre ordinairement, & ſi l'on veut en bannir toute abſtraction, & joindre une parfaite clarté à une entiere certitude, je conſeille à ceux qui s'y appliqueront de ſubſtituer dans chaque Propoſition des nombres, au lieu des lettres de l'Alphabeth, ce que je n'ai pas toujours fait, pour éviter d'être trop long.

Il ſe trouve dans les Mathématiques des grandeurs qu'on nomme *ſourdes*, *irrationnelles*, ou *incommenſurables*, parce qu'on ne peut exprimer en nombre le rapport qu'elles ont à des grandeurs connues; les ſignes que l'on employe pour marquer ces grandeurs ſe nomment *Signes radicaux*, & la maniere dont on fait les opérations de l'Arithmétique ſur les incommenſurables, ſe nomme *Calcul des radicaux*. Quoique cette matiere ne ſoit pas d'un uſage fort fréquent, j'ai crû cependant ne devoir pas l'omettre, afin que dans les occaſions qui peuvent ſe préſenter, on n'y trouve aucun embarras; c'eſt pour la même raiſon que j'explique

aussi le Calcul des Exposans qui apprend à se passer quelquefois des signes radicaux, d'autant plus que les regles de ce Calcul sont les mêmes que celles des Logarithmes dont l'usage abrege beaucoup le travail dans le Calcul Trigonométrique. Au moyen de ce que je viens de dire, on peut s'assurer de trouver dans ce premier Livre, qui certainement n'est pas bien long, tout ce qu'il y a d'essentiel à sçavoir sur l'Arithmétique & l'Algebre, joint à bien des questions utiles & nécessaires à l'Artillerie. Par exemple, j'ai fait voir comment par le moyen de la simple addition on peut former facilement des Tables pour trouver tout d'un coup le nombre de boulets contenus dans une pile, de quelque figure qu'elle soit; comment aussi on peut découvrir la même chose indépendamment des Tables, par le moyen de quelques formules algébriques très-simples & faciles à construire; comment on peut connoître si dans une piece de Canon qu'on veut refondre, l'alliage a été bien fait, &c.

C'est une question qui n'est pas encore bien décidée parmi les Sçavans de nos jours, sçavoir, si l'on peut traiter les Elémens de la Géometrie d'une façon différente de celle d'Euclide. Il est constant que cet Auteur n'a pensé qu'à ranger ses Propositions de maniere qu'elles se servissent de preuve les unes aux autres, & qu'il y a très-bien réussi; mais à cela près, il y a si peu d'ordre dans les Matieres qu'il traite, qu'il n'en faudroit pas davantage pour accoutumer l'esprit au désordre & à la confusion, comme M. Nicole l'a observé dans la Préface de la Géometrie de M. Arnaud. D'un autre côté, il est sûr aussi que M. Arnaud, le P. Lami, M. de Malezieux, & quelques autres Modernes ont mis dans leurs Ecrits l'ordre & l'arrangement le plus naturel & le plus simple qu'on puisse souhaiter, & de-là il semble d'abord qu'on ne doive point hésiter de préferer leurs Ouvrages à celui d'Euclide, malgré la vénération que les Anciens lui ont toujours portée. Cependant comme ces Messieurs ont crû pouvoir se dispenser de démontrer certaines choses qui apparemment leur paroissoient tomber sur le bon sens; d'autres Auteurs non moins

célebres qu'eux, & entr'autres M. Wolf dans le cinquiéme tome de ses Elémens, se sont récriés contre leur Méthode pour des raisons qui ne sont pas absolument à mépriser. Le véritable esprit de la Géometrie, disent-ils, est de démontrer tout ce qui n'est pas d'une entiere évidence, de façon que tout homme raisonnable qui voudra y faire attention, soit forcé de donner son acquiescement; les preuves qu'on établit sur ce qu'on a coutume de nommer *le bon sens*, ne sçauroient produire cet effet. Les hommes disputent tous les jours, & ne s'accordent presque jamais, quoiqu'il n'y ait aucun d'entr'eux qui ne s'imagine que le bon sens & la raison lui donnent gain de cause; il faut donc des raisonnemens plus précis & moins vagues, pour parler en vrai Géometre, & prendre garde que les négligences que l'on commettroit en ceci, introduiroient le doute & l'incertitude dans une Science qu'on a toujours regardé comme la seule qui puisse bannir le pirrhonisme du milieu de nos Societés. Cette diversité de sentimens entre tant de célebres Auteurs, m'a tenu long-tems dans la perplexité sur le choix que je devois faire d'une Méthode; mais enfin m'étant apperçû qu'on pouvoit fort bien suivre l'ordre des Modernes, & démontrer avec autant & plus de rigueur qu'Euclide n'a fait, je n'ai plus balancé de prendre un parti qui doit faire marcher ensemble la force du raisonnement & la beauté de l'ordre naturel. M. Wolf a porté son jugement avec trop de précipitation, lorsqu'il s'est avancé jusqu'à dire qu'on ne pouvoit abandonner la marche qu'Euclide a tenue, sans abandonner en même tems la rigueur des démonstrations. S'il avoit bien voulu y réflechir plus mûrement, l'étendue de son génie lui auroit bien-tôt fait voir que les négligences de nos Modernes ne sont que de légeres taches qu'on peut fort aisément effacer de leurs Ouvrages, sans toucher à l'élegance de leur Méthode. Ce seroit après tout, une chose bien étrange, & qui marqueroit bien la foiblesse de l'esprit humain, si pour raisonner juste il nous falloit absolument passer des triangles aux lignes, du composé au simple, & prendre par conséquent des routes si opposées à

celles que la Nature ne manque jamais de tenir. J'ai été bien aise de faire observer ceci, afin qu'on ne soit pas étonné si je mets au nombre des Propositions géometriques des choses qui paroissent à bien des gens n'avoir pas besoin d'être démontrées, parce qu'ils n'ont pas trouvé de contradicteurs. Il est plus difficile qu'on ne pense de faire des Elémens de Géometrie, quand on ne veut établir d'autres suppositions, que celles qu'on ne peut absolument contester; & quoiqu'en veuillent dire les Partisans d'Euclide, le huitiéme axiome de ses Elémens qu'on lui a toujours reproché avec raison, fait assez voir que sa Méthode n'est pas si parfaite qu'on ne puisse faire mieux.

L'Etendue en longueur, largeur & profondeur, est l'objet de la Géometrie. Chacune de ses dimensions prise à part, se nomme *ligne* droite ou courbe, selon qu'elle suit toujours la même route, ou qu'elle en change à tous momens en prenant à droite ou à gauche; les grandeurs comprises sous deux dimensions se nomment *surfaces*, & celles qui sont comprises sous les trois, se nomment *solides* ou *corps*. Pour suivre donc l'ordre que je me suis prescrit, je considere d'abord les proprietés des lignes droites selon les différentes positions qu'on peut leur donner, & les différentes figures qu'elles peuvent former par leur rencontre; j'examine aussi les rapports qu'elles ont entr'elles, selon les différentes manieres dont elles se coupent, & de-là je passe à la ligne circulaire qui est la seule courbe dont on traite dans la Géometrie simple, à cause que c'est la seule qu'on peut décrire avec le compas; j'en rapporte grand nombre de proprietés qu'on passe ordinairement sous silence dans les Elémens; & ce qui m'a obligé d'en agir ainsi; c'est que ces proprietés assez curieuses par elles-mêmes, & faciles à démontrer, peuvent conduire sans beaucoup de peine à la connoissance parfaite des sections coniques que l'on a toujours regardé comme la partie la plus abstraite de la Géometrie, ce qui lui a donné le nom de Géometrie composée. Après ceci j'explique les principes de la Trigonometrie, c'est-à-dire, de la science qui apprend à connoître les

côtés & les angles d'un triangle par la connoissance de quelques unes de ces choses. Je fais voir l'usage qu'on en peut faire sur le terrein, pour lever des Plans & des Cartes, & pour mesurer des distances accessibles ou inaccessibles; d'où l'on peut juger aisément de son utilité pour l'Art de la Guerre, & pour les Siéges des Places où l'Assiegé ne permet jamais de l'aborder de trop près; enfin je termine ce qui concerne les lignes par le Nivellement.

Les surfaces sont ou planes, ou courbes; les surfaces planes sont celles dont toutes les parties ne baissent ni ne haussent pas plus les unes que les autres, comme la surface d'un miroir ordinaire, d'un plancher bien uni, &c. & les surfaces courbes sont celles dont toutes les parties ne sont pas disposées, comme il vient d'être dit; telle est la surface d'une colonne, d'une boule, d'un pain de sucre, &c. Je donne les regles qui apprennent à mesurer les surfaces planes, à juger de leur rapport, à leur donner différentes figures, sans changer leur grandeur, à les diviser en tel nombre de parties égales ou inégales, dans telle raison qu'on jugera à propos, & à connoître entre les surfaces qui ont un même circuit, quelles sont les plus grandes. C'est à l'occasion de ceci, que je fais voir qu'entre les Magasins qui ont un même contour, ceux qui sont faits en quarrés longs, sont moins capables que ceux dont la figure est quarrée, que les quarrés contiennent moins que ceux qui seroient faits en polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés; & enfin que les ronds ont beaucoup plus de capacité que les autres, d'où j'ai inféré que pourvû que les Magasins ronds soient propres aux usages ausquels on les destine, on doit les préferer à tous les autres, d'autant plus que leurs voûtes étant moins exposées au choc direct des Bombes, doivent résister plus long-tems à leurs efforts.

J'ai tenu à peu près la même Méthode à l'égard des solides & de leurs surfaces, qui comprennent ce qui regarde les surfaces courbes, & j'en ai dit beaucoup plus sur ces matieres, qu'on

n'a coutume d'en dire dans les Elémens où l'on ſe borne aux priſmes, aux cylindres, aux pyramides, aux cônes, & à la ſphere. Toute cette Géometrie eſt entremêlée de grand nombre de Problêmes qui joignent la théorie à la pratique, & qui épargnent à l'eſprit la contention trop forcée, qu'une longue & continuelle théorie ne manqueroit pas de lui cauſer.

Je fais ſucceder immédiatement à la Géometrie la doctrine des ſections coniques; Appollonius, & la plûpart des anciens Géometres, ont extrêmement approfondi ces courbes, & ne nous auroient rien laiſſé à déſirer, ſi la confuſion & le déſordre qui regne dans leurs Ecrits ne dégoutoient le Lecteur de la fatigante attention qu'il faudroit leur donner. La plûpart des Modernes, prévenus en faveur de l'Algebre, ſe ſont imaginés qu'il n'y avoit que cette voye pour bien traiter cette matiere, & malheureuſement il eſt arrivé, qu'à l'exception des proprietés de l'axe qu'ils ont déduites aiſément de la formation des courbes, ils n'ont pû parvenir à démontrer les autres que par des détours peu naturels & des calculs embarraſſans, dont on eſt rebuté d'autant plus qu'on ne voit qu'avec beaucoup de peine la liaiſon & l'enchaînement que la Nature a miſes entre ces proprietés. M. Deſargues eſt le premier qui s'eſt apperçû que les ſections coniques étant formées par les différentes façons dont on coupe un cône qui a pour baſe un cercle, devoient participer aux proprietés de cette figure. Son Ouvrage intitulé: *Brouillon projet d'une atteinte aux évenemens des rencontres du cône avec un plan*, a été commenté par M. de la Hire, en un Volume *in*-4°. qui a pour titre: *Nouvelle Méthode en Géometrie pour les ſections*, &c. où il traite cette matiere à fonds: mais comme ce ſçavant Géometre n'avoit pas autant de talent pour s'énoncer, qu'il en avoit pour approfondir les ſujets ſur leſquels il travailloit, & que d'ailleurs il a toujours conſideré les ſections coniques dans le ſolide où elles ſe forment, ce qui fatigue extrêmement l'attention, la plûpart des Lecteurs ont encore mieux aimé ſupporter l'ennui de la lecture d'Appollonius, ou ſurmonter les difficultés du Calcul, que

de se voir contraints à percer l'impénétrable obscurité de ses Ecrits. C'est ainsi que les découvertes les plus intéressantes tombent quelquefois dans l'oubli, par le peu de soin que leurs Auteurs ont eu de s'expliquer clairement. Le parti qu'il m'a semblé devoir prendre, a été de montrer d'abord comment il faut couper un cône pour y former les trois sections coniques, & de quelle maniere on y découvre leur principale proprieté; de faire voir ensuite comment on peut tracer sur un plan ces mêmes courbes, & déduire de leurs formations grand nombre d'autres vérités importantes, en n'employant presque jamais que les proprietés du cercle dont j'ai parlé ci-dessus. Par ce moyen, l'étude abstraite des sections coniques se change en un espece d'agréable amusement très-propre à faire connoître l'admirable fécondité qui naît de l'application des principes, & l'enchaînement naturel qui se trouve entre les différentes parties des Mathématiques. L'expérience que j'en ai faite à l'Ecole de la Fere, parle avantageusement en faveur de ma Méthode; il n'est aucun de nos Messieurs qui en peu de tems n'ait acquis beaucoup plus de connoissances sur cette matiere, qu'il n'en avoit acquis par une longue application aux formules algebriques qui, de leur propre aveu, leur avoient inspiré beaucoup de dégoût. Je ne m'arrêterai pas ici à faire voir l'utilité des sections coniques, il suffira de dire qu'on trouve ces courbes presque à chaque pas, dès qu'on veut pousser son étude au-delà des simples Elémens, & qu'en particulier l'on ne pourroit rien statuer de certain sur l'art de tirer le Canon & de jetter les Bombes sans la connoissance de la parabole & de ses proprietés.

Sur la fin de ce second Livre, j'explique le Calcul du Toisé des surfaces & des solides, & celui du Toisé des Bois dont l'usage est presque journalier dans la plûpart de nos Arsenaux.

L'Arithmétique des Infinis dont je traite au commencement du troisiéme Livre, est une extension de la Méthode des Indivisibles de Cavallerius, & c'est elle qui a donné naissance à nos nouveaux Calculs, je veux dire le différentiel & l'intégral; l'objet

de cette Science appliquée à la Géometrie, eſt de trouver la meſure des ſurfaces & des ſolides, par la connoiſſance du rapport qu'ont entr'eux les Elémens dont on conçoit que ces quantités ſont compoſées; ſon étendue n'eſt pas à la vérité ſi grande que celle des nouveaux Calculs, mais elle a l'avantage d'avoir des principes plus clairs & plus commodes pour la pratique, & de plus, ſi les nouveaux Calculs vont plus loin, ce n'eſt qu'à la faveur des ſeries infinies qu'ils employent, & qui après tout, ne ſont que des approximations. J'ai reſſerré cette matiere, autant qu'il m'a été poſſible, mais comme j'y ai mis beaucoup d'exemples qui en ſont voir l'uſage, j'en ai aſſez dit pour qu'on puiſſe en déduire grand nombre de conſéquences qui en feront ſentir toute l'utilité.

La Méchanique en géneral, eſt la ſcience du Mouvement; elle contient les regles des différens mouvemens, la Statique, ou l'équilibre des corps ſolides, l'Hydroſtatique, ou l'équiblibre des corps ſolides plongés dans les fluides, l'Airométrie, ou la connoiſſance des différens changemens qui arrivent à l'air, & l'Hydraulique, ou les regles du mouvement des fluides. Il y a des mouvemens que je nomme *réels*, parce qu'ils exiſtent dans la Nature, & d'autres que je nomme mouvemens *ſyſtématiques*, parce que nous ne ſçavons pas s'ils exiſtent réellement, & que nous ne les connoiſſons que par les hypothèſes que quelques Auteurs ont faites pour expliquer les différens phénomenes du Monde matériel. Je n'entre point dans l'explication des mouvemens ſiſtématiques, cela me jetteroit dans des détails inutiles à nos Ecoles, & qu'il faut laiſſer aux Aſtronomes & aux Phyſiciens. Je me borne aux loix du mouvement uniforme, du mouvement uniformément accéleré ou retardé, du mouvement compoſé de deux ou pluſieurs forces uniformes, & du mouvement compoſé de deux forces, dont l'une eſt uniforme, & l'autre uniformément accélerée, ou pour mieux dire accélerante. C'eſt ſur ce dernier mouvement qu'eſt fondé l'art de jetter les Bombes, & l'on peut dire que ce feroit la découverte la plus belle & la plus intéreſſante

qu'on eut pû faire, si dans la pratique grand nombre d'accidens n'en affoiblissoit la certitude. L'air résiste au mouvement du mobile avec différens degrés de force, causés par les altérations qu'il souffre, selon les différens degrés de chaleur, de froideur, de sécheresse & d'humidité, dont il est susceptible; les Bombes & les Mortiers, quoique coulés avec beaucoup de soin, ne peuvent être faits avec cette extrême justesse qui empêcheroit qu'il n'en provînt aucun dérangement; la poudre est sujette aux altérations de l'air, & de plus, les matieres qui la composent ne se mêlent jamais si bien, qu'elle puisse être homogene & uniforme dans toutes ses parties, ce qui produit des inflammations plus ou moins promptes, & par conséquent différens degrés de vitesse dans le mobile; la manœuvre quelque attention qu'on ait, ne sçauroit se faire dans la précision géometrique; & tous ces accidens venant à se combiner d'une infinité de façons, produisent aussi une infinité d'effets différens, que les regles de la théorie ne peuvent garantir, qu'autant qu'un Officier intelligent & habile s'applique à connoître ce qui les altere, pour parvenir plus surement à son but à travers de tant de variations. Une longue pratique, & des épreuves souvent réïterées, sont ici d'une grande utilité, mais il faut prendre garde que ces épreuves étant toujours accompagnées de quelques-unes des circonstances dont on vient de parler, ne serviroient qu'à faire imaginer de vains sistêmes, si l'on ne partoit d'un point fixe & assuré qu'on n'abandonne jamais de vûe. Pour n'avoir pas pris cette précaution, Rivaut, Tartaglia, Diego Ufano, Collado, & presque tous les Auteurs qui ont écrit sur l'Artillerie & sur les portées des pieces, nous ont débité de grossieres erreurs qui auroient peut-être encore aujourd'hui des Partisans, si M. Blondel dans son excellent Traité de l'art de jetter les Bombes, n'en avoit découvert toute la fausseté; de toutes les voyes qui peuvent conduire à la connoissance du vrai, il n'en est point de plus suspectes que celle des expériences, leurs effets se montrent aux yeux, mais les causes qui les produisent sont un peu plus enveloppées, & ne se décou-

vrent pas aiſément; cependant on veut raiſonner, & avoir la gloire de la découverte; on forme donc des conjectures, ſans ſe donner le tems d'examiner toutes les circonſtances, les conjectures menent au ſiſtême, & le ſiſtême une fois imaginé, on l'expoſe aux yeux du Public; l'adreſſe conſiſte à le préſenter du plus beau côté, à diſſimuler ce qu'il y a de foible, & à mettre ſouvent ſur le tapis le petit détail des expériences, moyennant cela on éblouit les eſprits peu éclairés, la préſomption fait les ſiſtêmes, & l'ignorance trop crédule les adopte. Mais qu'arrive-t'il? la vérité prend enfin le deſſus, la chimere ſe diſſipe & s'évanouit, & la confuſion en reſte à l'Auteur & à ſes Partiſans, qui ſont tous étonnés d'avoir été ſéduits. La Nature eſt un eſpece de Protée, bien différent de celui qu'Homere nous dépeint ſi agréablement. Il faut la ſuivre ſans relâche, éclairer ſes démarches, & la ſerrer de près; mais dès qu'on veut la garotter, & l'aſſujettir à des raiſonnemens toujours bornés, elle s'échappe, & par cent nouvelles transformations elle ſemble ſe faire un plaiſir de nous faire voir, qu'il s'en faut de beaucoup que nous ne la ſaiſiſſions. Les nouveautés en fait d'Artillerie ſont ſouvent ſi pernicieuſes à l'Etat, qu'on ne ſçauroit être trop ſur ſes gardes pour n'en produire que de la bonne façon.

Il ſe trouve toujours entre pluſieurs corps, ou entre les parties d'un même corps, un point qu'on nomme centre d'équilibre, lorſqu'il s'agit de pluſieurs corps, & centre de gravité, lorſqu'il eſt queſtion des parties d'un même corps. Sa proprieté conſiſte en ce que les corps, ou les parties d'un même corps, ſe tiennent en équilibre autour de lui, dès qu'il n'a point de mouvement. Je commence la Statique, par la recherche de ces ſortes de points; je fais voir leur utilité pour la connoiſſance des forces mouvantes, & les avantages qui en proviennent à la Géometrie, depuis que le P. Guldin Jéſuite a découvert, qu'il ſuffiſoit de connoître le centre de gravité d'une figure plane, & la valeur de cette figure, pour connoître aiſément le ſolide qu'elle produit, lorſqu'elle tourne autour d'une ligne priſe pour axe de mouvement.

Cette Méthode s'étend auſſi à la meſure de tous les onglets ou priſmes tronqués, & c'eſt pour cette raiſon que je me ſuis arrêté beaucoup à chercher les centres de gravité de grand nombre de ſurfaces planes. De-là je paſſe à ce qui concerne l'équilibre des corps qui ſont ſur des plans inclinés, & de ceux qui ſe ſoutiennent avec des cordes; & je viens enfin à l'explication des différentes machines. Je n'en rapporte qu'un certain nombre telles que ſont les différentes eſpeces de leviers, la Balance Romaine, la Balance ordinaire, la Poulie, les Mouffles, la Roue dans ſon aiſſieu, les Roues dentées, la Chevre, la Vis & le Coin; mais ce que j'enſeigne touchant la maniere de calculer le rapport de la puiſſance au poids dans celles-ci, ſervira également pour le calcul des Machines plus compoſées, qui n'en ſont que des répétitions & des différentes combinaiſons.

Dans l'Hydroſtatique, on apprendra à connoître ce que c'eſt que la maſſe d'un corps, ſon volume, ſa denſité, ſa peſanteur abſolue & ſa peſanteur ſpécifique, comment on trouve les peſanteurs ſpécifiques des fluides & des ſolides, ce qui ſe paſſe lorſqu'un corps eſt plongé dans un fluide qui a plus ou moins de peſanteur ſpécifique que lui; de quelle maniere on peut faire flotter un corps qui devoit naturellement aller à fonds, & en faire enfoncer un autre qui devroit ſurnager. Ces connoiſſances ſont fort utiles pour l'Art de la Guerre: on eſt ſouvent obligé de faire paſſer une Armée ſur des Ponts jettés ſur une riviere, de tranſporter des Equipages, des Canons & des Mortiers ſur des batteaux; il eſt donc à propos de connoître ce que ces Ponts peuvent ſupporter, la charge qu'on peut mettre dans les batteaux ſans les faire ſubmerger, & le moyen de les élever ſur l'eau, lorſque par quelque accident ils ſont coulés à fonds.

L'Airométrie traite des proprietés de l'air, de ſa peſanteur, de ſon reſſort, de ſon mouvement, & des différentes condenſations & raréfactions que cauſent dans lui le froid, le chaud, l'humidité, la ſechereſſe, & les vapeurs & exhalaiſons qui ſortent du ſein de la Terre. Les Inſtrumens dont on ſe ſert pour juger plus

aisément de la plûpart de ces choses, sont le Barométre, le Thermométre, le Manométre & l'Hygrométre; mais comme c'est encore ici une matiere de Physique, où la varieté des accidens peut dérouter la plus fine théorie, il faut être attentif à ne rien statuer avec trop de précipitation sur la foi de ces Instrumens, ni des expériences qu'on pourroit avoir faites.

Dans l'Hydraulique enfin, j'explique quelle est la nature du mouvement de l'eau, comment on peut calculer la dépense qui s'en fait par l'orifice d'un vase ou par le pertuis d'une riviere ou d'un canal; de quelle maniere on peut se servir utilement de l'air pour élever l'eau au-dessus de son niveau, ce qui renferme l'explication des Machines hydrauliques, & la façon de calculer la résistance que l'eau oppose aux corps solides.

Les regles de la Perspective sont si propres non-seulement à donner le goût & la délicatesse du dessein, mais encore à former ce coup d'œil qu'on estime tant & avec raison dans les Gens de Guerre, que j'ai crû devoir en composer un petit Traité qu'on trouvera à la fin de cet Ouvrage. Je n'y ai rien dit d'absolument nouveau, la chose n'étoit guéres possible; tout a été dit sur cette matiere. Mais je m'y suis attaché à simplifier les principes, à les réduire en moindre nombre, & à leur donner tant de clarté, qu'il n'est besoin pour les entendre que d'avoir une légere teinture des Elémens de la plus simple Géometrie. J'espere que ceux qui liront cet Ouvrage conviendront aisément que je suis parvenu au but que je m'étois proposé.

Il semble qu'avant de finir ce Cours de Mathématique j'aurois dû y ajouter des réflexions & des maximes sur la Construction, l'Attaque, & la Défense des Places; mais comme ce sujet demande d'être traité avec une certaine étendue, & que d'ailleurs je viens de donner au Public une seconde Edition du *Parfait Ingénieur François*, où je n'ai rien omis de tout ce qu'on pouvoit souhaiter là-dessus, j'ai crû qu'il valoit mieux y renvoyer le Lecteur, que de grossir ce Traité par des matieres trop resserrées, & qui par conséquent n'auroient pû être d'une grande utilité.

Au reste, cet Ouvrage est bien éloigné d'être un Abregé de mon Cours en cinq Volumes. Il s'y trouve bien des choses que mon Cours ne renferme point, de même que le Cours en renferme grand nombre d'autres que j'ai passé sous silence dans ce Volume pour les raisons que j'ai rapportées ci-dessus; quant à celles qui sont communes à l'un & à l'autre, elles sont traitées ici d'une maniere toute différente, ce qu'on verra aisément dans la Géometrie, dans les sections coniques, &c. Un Auteur qui ne cesse de travailler, ne peut manquer d'avoir des nouvelles idées, & d'acquérir des connoissances qu'il n'avoit pas auparavant. C'est donc ici un espece de supplément à mes autres Ecrits; & ce supplément ne peut manquer d'être une grande utilité pour ceux mêmes qui auront lû, ou qui seront bien aises de lire ces Ouvrages.



ELEMENS



ELEMENS DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHEMATIQUES.

LIVRE PREMIER,

Contenant les Elemens de l'Arithmétique & de l'Algebre.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1. L'ARITHMETIQUE est la Science des Nombres, ou l'Art de compter.

2. Cette Science étant extrêmement néceſſaire dans l'uſage de la vie, il n'eſt point de Nation qui n'ait imaginé des caracteres pour exprimer les différens nombres, & pour faire aiſément les Calculs ; mais ceux que les Arabes ont inventé ayant paru les plus commodes, ont enfin emporté le deſſus, & il y a déja long-tems que tous les Peuples de l'Europe s'en ſervent non-ſeulement dans

le Commerce ; mais encore dans ce qui concerne les Sciences & les beaux Arts.

3. Ces caracteres sont au nombre de dix tels qu'on les voit ici. Les neuf premiers expriment les neuf premiers nombres, c'est-à-dire, *Un*, *Deux*, *Trois*, *&c.* & s'appellent *Unités*, parce que chacun pris solitairement n'exprime que des unités. Le caractere 6, par exemple, marque six unités, & ainsi des autres. Le dernier caractere o qu'on nomme *zero*, ne signifie rien par lui-même, mais dès qu'il est joint avec les autres, il est d'une grande utilité, comme on le verra bientôt.

1, *Un*
2, *Deux*
3, *Trois*
4, *Quatre*
5, *Cinq*
6, *Six*
7, *Sept*
8, *Huit*
9, *Neuf*
o, *Zero*

4. Lorsqu'on écrit sur une même ligne plusieurs des caracteres dont nous venons de parler, alors leur valeur change selon le rang qu'ils occupent. Le premier à droite vaut toujours des unités ; le second en tirant vers la gauche vaut des dixaines, c'est-à-dire, dix fois plus qu'il ne vaudroit s'il étoit seul ; le troisiéme devient encore dix fois plus grand, & vaut par conséquent des centaines, puisque dix fois dix font cent ; le quatriéme augmente encore sa valeur de dix fois plus, & vaut des mille, parce que dix fois cent font mille ; le cinquiéme par la même raison vaut des dixaines de mille ; le sixiéme des centaines de mille ; le septiéme des millions, & ainsi de suite, augmentant toujours les valeurs de dix fois plus, comme on voit dans la Table suivante.

Trillions.	Centaines de millions de billions.	Dixaines de millions de billions.	Millions de billions.	Centaines de mille de billions.	Dixaines de mille de billions.	Mille de billions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaines de millions de milliards.	Dixaines de millions de milliards.	Millions de milliards.	Centaines de mille de milliards.
4	5	6	3	5	2	1	6	8	7	5	6	3	2

Dixaines de mille de milliards.	Mille de milliards.	Centaines de milliards.	Dixaines de milliards.	Milliards.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.
4	5	3	9	5	4	2	5	7	8	2	3	7	5

Si on vouloit continuer cette suite au-delà des Trillions, on nommeroit les caracteres suivans, dixaines de trillions, centaines de trillions, mille de trillions, dixaines de mille de trillions, centaines de mille de trillions, millions de trillions, dixaines de millions de trillions, centaines de millions de trillions, quadrillions, & ainsi des autres à l'infini.

5. Au moyen de ceci, il eſt facile de ſupputer & d'écrire tel nombre que l'on voudra. Soit, par exemple, le nombre 78567953, je nomme le premier caractere à droite *unités*, le ſecond en tirant vers la gauche *dixaines*, le troiſiéme *centaines*, le quatriéme *mille*, le cinquiéme *dixaines de mille*, le ſixiéme *centaines de mille*, le ſeptiéme *millions*, & enfin le huitiéme *dixaines de millions*, ce qui me fait voir qu'en revenant de gauche à droite, le nombre contient ſept dixaines de millions, ou ſoixante-dix millions, huit millions, cinq cens mille, ſix dixaines de mille, ou ſoixante mille, ſept mille, neuf cens, cinq dixaines d'unités, ou cinquante & trois; d'où j'infere que ce nombre vaut en tout ſoixante dix-huit millions cinq cens ſoixante-ſept mille neuf cens cinquante-trois.

Que ſi le nombre propoſé contenoit un ou pluſieurs zeros, cela ſignifieroit que ce nombre ne contiendroit point les quantités dont les zeros occupent la place; par exemple, dans le nombre 780004, on verroit en allant de droite à gauche, que ce nombre contient quatre unités, point de dixaines, point de centaines, point de mille, huit dixaines de mille, & ſept centaines de mille, & par conſéquent en revenant de gauche à droite, on diroit que ce nombre contient ſept cens quatre-vingt mille & quatre unités.

De même, ſi on vouloit écrire le nombre trois millions ſix cens quarante-trois mille ſept cens cinquante-deux, on écriroit d'abord un 3 pour les trois millions, puis en allant de gauche à droite, on écriroit un 6 pour les ſix cens mille, un 4 pour les quarante mille, un 3 pour les trois mille, un 7 pour les ſept cens, un 5 pour les 50, un 2 pour les deux unités, & l'on auroit 3643752 qui exprimeroit le nombre demandé.

Que ſi le nombre propoſé étoit deux millions quarante mille trois cens trente; on écriroit d'abord un 2 pour deux millions, enſuite en venant de gauche à droite, on mettroit un zero, parce que le nombre propoſé ne contient point de centaines de mille, enſuite un 4 pour les quarante-mille, puis un zero, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités de mille, puis un 3 pour les trois cens, enſuite un 3 pour les trente, & enfin un 0, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités, & l'on auroit 2040330, & ainſi des autres; d'où l'on voit que le zero en occupant la place des quantités qu'un nombre ne contient pas, conſerve le rang, & par conſéquent la valeur de celles qu'il contient.

Voilà en quoi conſiſte tout l'artifice des caracteres arabes, artifice qu'on peut regarder comme l'une des plus belles inventions

de l'efprit humain, puifqu'au moyen de dix caracteres très-fimples, on vient à bout non-feulement d'écrire très-aifément toute forte de nombre, mais encore de les augmenter, les multiplier, & faire en un mot toutes les opérations néceffaires dans les différens cas qui peuvent fe préfenter.

6. Les nombres en eux-mêmes font des idées abftraites qui ont à la vérité une valeur fixe & conftante, mais qui ne fignifient rien de déterminé. Par exemple, le nombre 20 vaut toujours vingt unités, ou deux dixaines, mais il ne fignifie pas plus vingt hommes, que vingt chevaux, ou vingt écus, &c. C'eft pourquoi quand on veut déterminer la fignification des nombres, il faut néceffairement écrire après eux ce qu'on veut qu'ils fignifient; pour dire 20 loüis, il faut non-feulement écrire 20, mais encore il faut écrire le mot de loüis, & ainfi des autres.

7. Les nombres dont la fignification eft déterminée peuvent être ou de *même efpece*, ou de *différente efpece*, felon que les chofes qu'ils fignifient font de même nature ou de différente nature. 9 écus, & 8 écus font des nombres de *même efpece*; 9 écus & 9 toifes font des nombres de *différente efpece*.

8. L'ufage a voulu qu'on ait fait des divifions & des fou-divifions de certaines chofes; par exemple, on a divifé la livre en 20 parties nommées fols, & le fol en 12 parties nommées deniers. De même, on a divifé la toife en fix parties ou pieds, le pied en 12 parties ou pouces, le pouce en 12 parties ou lignes, & la ligne en 12 parties nommées points, & ainfi de grand nombre d'autres chofes. Ces fou-divifions fe nomment *fous-efpeces;* quand on dit, une livre fix fols quatre deniers, les fix fols quatre deniers font des fous-efpeces de la livre.

9. Tout nombre, foit que fa fignification foit déterminée, ou qu'elle ne le foit pas, eft ou *entier*, ou *rompu*, autrement dit *fraction*. Un nombre *entier* eft un nombre qui par lui-même ne nous donne point l'idée d'un tout dont il faffe partie; l'unité & tous les nombres au-deffus de l'unité font de cette nature; car quand on dit par exemple 2 ou 2 écus, ce nombre 2 ne nous préfente l'idée que de deux unités ou de deux écus fans aucun rapport à quelque autre nombre dont ces deux unités ou ces deux écus faffent partie : au contraire le nombre *rompu*, ou la *fraction* eft un nombre qui porte avec lui l'idée d'un tout dont ce nombre n'eft qu'une partie; de cette efpece font tous les nombres qu'on nomme un *tiers*, un *quart*, un *cinquiéme*, un *fixiéme*, &c. car ces nombres

nous présentent toujours l'idée d'un *tout* plus grand qu'eux.

Delà il suit qu'une fraction proprement dite est toujours moindre que le tout ou l'entier dont elle est partie, & que si quelquefois on se sert de ces façons de parler, *trois moitiés*, *quatre tiers*, &c. qui expriment des nombres plus grands que leur tout; ces sortes de fractions sont des fractions *improprement dites*; car au lieu de dire trois moitiés, on devroit dire à proprement parler un & demi, puisque trois moitiés sont la même chose que deux moitiés; c'est-à-dire l'entier ou le tout, plus la moitié d'un entier, & ainsi des autres.

10. Les nombres se divisent encore en nombres *simples* & en nombres *composés*, le nombre *simple* est celui qui ne contient que des choses de la même espece; 20 unités ou 20 écus est un nombre simple, parce qu'il ne contient que 20 unités de même nature, ou 20 écus; de même trois quarts est un nombre simple, parce qu'il contient des parties d'un tout de même espece. Le nombre *composé* est un nombre qui contient des *sous-especes*; 20 & un quart est un nombre composé, à cause qu'il contient vingt unités, & un quart d'unité ou une sou-division d'unité. De même, 20 livres 4 sols est un nombre composé, puisqu'outre les livres il contient des sols, c'est-à-dire des sous-especes de la livre. Au reste, il faut prendre garde qu'on ne doit appeller nombre *composé*, que ceux qui sont composés d'especes & de sous-especes, ou d'unités & & de fractions de ces mêmes unités; 20 écus & 3 toises ne font pas un nombre composé, non plus que 20 sols & trois quarts de toises.

11. Les principales operations de l'Arithmétique sont l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, & la *Division*.

Ajouter, c'est faire un tout de deux ou plusieurs nombres de même espece; ce tout se nomme *Somme*.

Soustraire, c'est retrancher un nombre d'un autre de même espece; ce qui reste après l'opération se nomme *Reste* ou *Différence*, parce que la différence de deux nombres inégaux, n'est autre chose que ce qui reste, lorsqu'on a retranché le plus petit du plus grand.

Multiplier, c'est prendre un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui le multiplie. Quand on multiplie 2 par 3, on prend deux autant de fois qu'il y a d'unités dans trois, c'est-à-dire, on le prend trois fois, le nombre 2 se nomme le *Multiplicande*, le nombre 3 le *Multiplicateur*, & le nombre 6 qui

A iij

provient de cette Multiplication ſe nomme le *Produit.* Il eſt indifférent de prendre le Multiplicande pour le Multiplicateur, ou le Multiplicateur pour le Multiplicande; car il eſt viſible que ſi l'on multiplie 2 par 3, ou 3 par 2, le Produit ſera toujours 6.

Diviſer, c'eſt retrancher un nombre d'un autre autant de fois qu'il y eſt contenu. Quand on diviſe 6 par 2, on cherche combien de fois 2 eſt contenu dans 6, le nombre 6 ſe nomme le *Dividende* le nombre 2 ſe nomme *Diviſeur*, & le nombre 3 qui marque combien de fois le Diviſeur 2 eſt contenu dans le Dividende 6, ſe nomme le *Quotient.*

12. Ces quatre opérations peuvent ſe faire ſur les nombres entiers, ſur les nombres rompus, ſur les nombres ſimples, & ſur les nombres compoſés. Nous allons expliquer dans le Chapitre ſuivant l'Addition & la Souſtraction des nombres entiers ſimples, & compoſés, la Multiplication & la Diviſion des nombres entiers ſimples, après quoi nous parlerons dans les Chapitres ſuivans de la maniere de faire les mêmes opérations ſur les fractions, & de la Multiplication & Diviſion compoſée.

AXIÔME.

13. Un *Tout* eſt égal à ſes parties priſes enſemble. Les parties du nombre 5 ſont 2 & 3; il eſt viſible qu'en ajoutant enſemble 2 & 3, on aura 5 égal au nombre 5 qui eſt compoſé de ces deux parties.

CHAPITRE SECOND.

Contenant l'explication des quatre premieres Regles d'Arithmétique.

ADDITION SIMPLE.

14. POUR ajouter enſemble pluſieurs grandeurs ſimples, on les écrit les unes ſous les autres en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. après quoi on opére comme on va voir dans l'Exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Il y a dans une Armée 4538 hommes d'Infanterie, 1519 Carabiniers, 3323 Cavaliers, & 2242 Dragons, on demande combien il y a d'hommes en tout.*

J'écris tous ces nombres les uns ſous les autres, comme il vient d'être dit, après quoi commençant par la colonne à droite,

j'ajoute tous les nombres qu'elle contient, en disant : 8 & 9 font 17 & 3 font 20 & 2 font 22, c'est-à-dire deux dixaines & deux unités, & comme cette colonne ne peut contenir que des unités, je mene une ligne par-dessous, & j'écris 2 sous cette colonne, transportant les deux dixaines à la colonne suivante.

	4538	*Fantassins.*
	1519	*Carabiniers.*
	3323	*Cavaliers.*
	2242	*Dragons.*
Somme	11622	*Hommes.*

Je viens donc à la colonne suivante, & je dis : 2 que je transporte & 3 font 5 & 1 font 6 & 2 font 8 & 4 font 12, c'est-à-dire douze dixaines, ou cent & deux dixaines, & comme cette colonne ne peut contenir que des dixaines, j'écris par-dessous 2, ou deux dixaines, & je transporte une centaine à la colonne suivante.

Je passe à cette troisiéme colonne, & je dis : 1 que je transporte & 5 font 6 & 5 font 11 & 3 font 14 & 2 font 16, c'est-à-dire 16 centaines, ou un mille & six centaines, & comme cette colonne ne peut contenir que des centaines, j'écris par-dessous 6, & je transporte un mille à la colonne suivante.

Je dis donc 1 & 4 font 5 & 1 font 6 & 3 font 9 & 2 font 11; c'est-à-dire onze mille, ou une dixaine de mille & un mille, j'écris 1 sous cette colonne, & j'avance 1 ou une dixaine de mille vers la gauche, & la somme totale est 11622.

La Démonstration de ceci est évidente par elle-même ; car il est visible qu'en opérant comme j'ai fait, j'ai formé un tout qui comprend tous les nombres proposés ; or le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble (*N.* 13.) donc le tout que j'ai trouvé est égal à toutes ses parties prises ensemble.

15. On donne plusieurs manieres de faire la preuve de l'Addition, c'est-à-dire, de voir si on ne s'est point trompé ; mais la meilleure est de recommencer de nouveau, non plus en ajoutant chaque colonne de haut en bas, comme nous avons fait, mais de bas en haut : on dira donc 2 & 3 font 5 & 9 font 14 & 8 font 22 ; ainsi on verra qu'on ne s'est pas trompé en écrivant 2 sous cette colonne, & en transportant deux dixaine à la colone suivante, & continuant de la même façon, on découvrira aisément si on a commis quelque erreur.

ADDITION COMPOSE'E.

16. L'Addition composée se fait en écrivant d'abord chaque

fous-efpece fous la fous-efpece femblable, après quoi on opere comme on va voir.

EXEMPLE. *Un homme a reçu de l'un de fes créanciers 365 livres 15 fols 11 deniers, d'un autre 432 livres 14 fols 10 deniers, d'un troifiéme 534 livres 19 fols 9 deniers, & d'un quatriéme 635 liv. 18 fols 10 deniers, combien a-t'il reçu en tout?*

	365#	15fols	11den.
	432	14	10.
	534	19	9.
	635	18	10.
Somme	1969#	9fols	4den.

Après avoir écrit ces nombres les uns fous les autres comme on voit ici, je commence par les deniers, & comme il en faut 12 pour faire un fol, je dis: 11 & 10 font 21, c'eft-à-dire un fol & neuf deniers, je mets un point à côté du dix pour marquer que j'ai un fol, & je continue en difant: 9 deniers que j'ai au-deffus d'un fol, & 9 qui viennent après font 18, c'eft-à-dire un fol & 6 deniers, je mets un point à côté du 9, pour marquer que j'ai encore un fol, & je dis: 6 deniers que j'ai au-deffus d'un fol & 10 font 16, ou un fol quatre deniers, je mets un point à côté du 10, & j'écris 4 au-deffous de la ligne.

Les trois points que j'ai marqué me faifant voir que j'ai trois fols, je porte ces trois fols au rang des fols, & je dis: 3 & 5 font 8 & 4 font 12 & 9 font 21 & 8 font 29, ou deux dixaines & neuf fols, j'écris 9 fous la ligne, & je porte 2 au rang des dixaines, en difant: 2 & 1 font 3 & 1 font 4 & 1 font 5 & 1 font 6 dixaines; or il en faut 2 pour faire une livre, je prens donc la moitié de 6 qui eft 3, & par conféquent j'ai trois livres, & comme il ne me refte point de dixaines, je n'écris rien fous le rang des dixaines de fols.

Je porte mes 3 livres au rang des livres, en difant: 3 & 5 font 8 & 2 font 10, &c. & achevant le refte comme dans l'exemple précédent, j'ai la fomme totale demandée.

Si au lieu de 6 dixaines de fols, j'avois eu un nombre impair comme 7. J'aurois pris la moitié de 7 qui eft 3 livres, & par conféquent j'aurois porté 3 au rang des livres, mais comme il me feroit refté une dixaine, j'aurois écrit 1 fous le rang des dixaines de fols.

Tout ceci n'a pas befoin de Démonftration.

SOUSTRACTION

SOUSTRACTION SIMPLE.

17. Ier. EXEMPLE. *Il y a dans une Place 9586 hommes, on veut en faire sortir 4374, combien en restera-t'il ?*

9586	
4374	
5212	*Reste.*
9586	*Preuve.*

J'écris le plus petit nombre sous le grand, en mettant les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. & tirant une ligne par-dessous, je commence à droite, & je dis : de 6 retranchez 4, il reste 2 que j'écris sous la ligne ; de 8 retranchez 7, il reste 1 que j'écris de même, & agissant de la même façon aux autres colonnes, je trouve qu'il restera 5212 hommes dans la Place.

18. Pour faire la preuve, j'ajoute ensemble le reste avec le nombre des hommes qu'on veut faire sortir, & si la somme se trouve égale au nombre total d'hommes qui étoit dans la Place, la regle est juste, puisqu'il est évident que la somme totale n'est autre chose que le nombre des hommes qui sortent joint au nombre de ceux qui restent.

De même que l'Addition sert de preuve à la Soustraction, de même aussi la Soustraction sert de preuve à l'Addition; car si dans l'exemple que nous venons de donner les 4374 hommes qui doivent sortir, joints aux 5212 qui doivent rester, font véritablement la somme de 9586 ; il est clair qu'en retranchant de cette somme le nombre 4374, le reste doit être 5212, & de même si on retranche de cette même somme 9586, le nombre 5212, le reste doit être 4374; donc si en faisant l'une ou l'autre de ces Soustractions, on ne retrouve pas l'un ou l'autre de ces deux restes, ce sera une marque que l'Addition aura été mal faite.

II. EXEMPLE. *Un homme a reçu d'une part 70082 livres, & de l'autre il a payé 58765 livres, combien lui reste-t'il?*

70082#
58765#
11317#

J'écris ces nombres comme il vient d'être dit ; ensuite je dis : de 2 retranchez 5, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'emprunte une dixaine au rang des dixaines, & je mets un point sur le 8, pour marquer qu'il ne vaudra plus que 7 ; je dis donc une dixaine que j'ai emprunté & deux unités font 12 unités, & de 12 retranchez 5 il reste 7 que j'écris sous la ligne ; je passe aux dixaines en disant : de 7 ôtez 6, il reste 1 que j'écris ; ensuite de 0 retranchez 7, cela ne se peut :

c'eſt pourquoi j'emprunte une unité du rang ſuivant ; mais comme il n'en a point, je paſſe à l'autre ſur lequel je mets un point ; or les unités de ce rang valent des dixaines de mille, ainſi l'unité que j'ai emprunté vaut dix mille, mais dix mille eſt trop grand pour retrancher 7, c'eſt-à-dire 7 centaines dans le rang où je dois opérer, c'eſt pourquoi je laiſſe 9 mille ſur le rang des mille, en mettant un point ſur le zero de ce rang, pour marquer que ce zero vaudra neuf, & il ne me reſte plus qu'un mille ou dix centaines; je dis donc de 10 centaines ôtez 7, il reſte 3 que j'écris ſous la ligne ; enſuite de 9 ôtez 8, il reſte 1, & enfin de 6 ôtez 5, il reſte 1, & par conſéquent il reſte à cet homme 11317 livres. La regle eſt donc lorſqu'il ſe trouve pluſieurs zeros dans les rangs où l'on veut emprunter, de paſſer juſqu'au rang où il ſe trouve des unités, & de mettre des points ſur ce rang & ſur les zeros de ceux où on n'a pas pû emprunter, & faire valoir 9 chacun de ces zeros.

Ainſi pour retrancher 3542 de 6001, on dira d'abord ; de 1 ôtez 2, cela ne ſe peut, on empruntera donc une dixaine ; mais le rang des dixaines n'en ayant point non plus que celui des centaines, on paſſera au rang des mille, & l'on empruntera un mille ou 10 centaines, & comme dix centaines ſont trop grandes pour ne retrancher que 2 unités, on laiſſera 9 centaines au rang des centaines, & de la centaine reſtante on laiſſera 9 dixaines au rang des dixaines, & il ne reſtera plus qu'une dixaine, laquelle jointe à l'unité qu'on a, fera 11 ; on dira donc : de 11 ôtez 2, il reſte 9 ; de 9 ôtez 4, il reſte 5 ; de 9 ôtez 5, il reſte 4, & de 5 ôtez 3, il reſte 2.

```
 ...
6001
3542
----
2459
```

SOUSTRACTION COMPOSÉE.

19. Ier. EXEMPLE. *Sur 986 livres 15 ſols 8 deniers, on veut payer 754 livres 9 ſols 6 deniers, que reſtera-t'il?*

J'écris le moindre nombre ſous le plus grand, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, &c. & je dis : de 8 deniers ôtez 6, il reſte 2 ; de 15 ſols ôtez 9, il reſte 6 ; de 6 livres ôtez 4, il reſte 2, & achevant le reſte de même que dans la Souſtraction ſimple, je trouve qu'il reſtera 232 livres 6 ſols 2 deniers.

986#	15 fols	8 den.
754#	9 fols	6 den.
232#	6 fols	2 den.

II. Exemple. *De 9600 livres, 8 ſols, 6 deniers, on veut ôter 7564 livres 12 ſols 10 deniers, quel ſera le reſte?*

9600#	8 ſols	6 den.
7564#	12 ſols	10 den.
2035#	15 ſols	8 den.

Après avoir écrit ces deux nombres à la maniere accoutumée, je dis : de 6 deniers ôtez 10, cela ne ſe peut, j'emprunte un ſol au rang des ſols, ce qui fait 12 deniers & ſix que j'ai font 18, & de 18 ôtez 10, il reſte 8.

Je paſſe au rang des ſols, & comme de 7 on ne peut ôter 12, j'emprunte une livre ou 20 ſols au rang des unités de livres, mais ce rang n'en ayant point non plus que les dixaines, j'emprunte un cent au rang des centaines où je mets un point ; de cette centaine je laiſſe 9 dixaines au rang des dixaines, en mettant un point ſur le zero pour marquer qu'il vaudra 9 ; de la dixaine reſtante, je laiſſe 9 unités en mettant un point ſur le zero de ce rang, & il me reſte une unité de livres, ou 20 ſols, leſquels, joints au 7 que j'ai déja font 27, & de 27 ôtez 12 il reſte 15.

Je paſſe aux livres, en diſant : de 9 ôtez 4 il reſte 5 ; de 9 ôtez 6 il reſte 3 ; de 5 ôtez 5 il reſte 0, & de 9 ôtez 7, il reſte 2.

III. Exemple. *Un homme doit 90000 livres, il en paye 75432 liv. 12 ſols 6 deniers, que lui reſte-t'il encore à payer?*

90000#	ſols	den.
75432#	12 ſols	6 den.
14567#	7 ſols	6 den.

J'écris les deux nombres à la façon ordinaire, & comme dans le nombre ſupérieur il n'y a ni ſols, ni deniers, ni unités de livres, ni dixaines, ni centaines, ni mille, j'emprunte ſur le 9 une dixaine de mille ; de cette dixaine j'en laiſſe 9 mille ſur les mille, en mettant un point ſur le zero de ce rang ; du mille reſtant je laiſſe 9 centaines ſur le rang des centaines, en mettant un point ſur le zero de ce rang ; de la centaine reſtante je laiſſe 9 dixaines ſur le rang des dixaines, en mettant un point ſur le zero ; de la dixaine reſtante je laiſſe 9 unités au rang des unités en mettant un point ſur ſon zero, & il me reſte une livre ou 20 ſols ; or pour paſſer aux deniers, je n'ai beſoin que d'un ſol ou de 12 deniers, c'eſt pourquoi je laiſſe 19 au rang des ſols, ce que je marque en y mettant un point ; après quoi je dis de 1 ſol qui me reſte ou de 12 deniers ôtez 6 il reſte 6 ; de 19 ſols ôtez 12, il reſte 7 ; de 9 livres ôtez 2, il reſte 7 ; de 9 ôtez 3, il reſte 6 ; de 9 ôtez 4, il reſte 5 ; de 9 ôtez 5, il reſte 4 ; & de 8 ôtez 7, il reſte 1 ; donc cet homme eſt encore redevable de 14567 livres 7 ſols 6 deniers.

MULTIPLICATION SIMPLE.

20. Ier. EXEMPLE. *36 aunes d'étoffe à 4 livres l'aune, combien valent-elles?*

Puisque chaque aune vaut 4 livres, 36 aunes vaudront 4 fois 36, c'est-à-dire, il faudra prendre 36 quatre fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; donc c'est ici une Multiplication. (*N.* 11.)

J'écris d'abord le nombre 36 aunes qui est le nombre à multiplier, & par-dessous j'écris le multiplicateur 4 sous les unités 6 du nombre 36; ensuite je mene une ligne, & je dis: 4 fois 6 font 24, c'est-à-dire 2 dixaines & 4 unités, j'écris 4 unités sous la ligne, & je retiens 2 dixaines: je dis 4 fois 3 dixaines font 12 & 2 que je retiens font 14, j'écris 4 sous les dixaines, & j'avance 1 au rang des centaines, ainsi j'ai 144 livres pour la valeur de 36 aunes à 4 livres l'aune.

	36 aunes.
	4 #
Produit	144 #

Pour démontrer ceci, il n'y a qu'à faire attention que le nombre 36 est la même chose que 3 dixaines & 6 unités; or en multipliant 6 unités par 4, j'ai pris 6 unités autant de fois qu'il y a d'unités dans 4, & en multipliant 3 dixaines par 4, j'ai aussi pris 3 dixaines autant de fois qu'il y a d'unités dans 4. Donc j'ai pris le nombre 36 autant de fois qu'il y a d'unités dans 4, & par conséquent j'ai fait la multiplication demandée. (*N.* 11.)

II. EXEMPLE. *Un homme a fait 236 toises d'ouvrages à 28 livres la toise, combien lui revient-il?*

Puisque chaque toise vaut 28 livres, il faudra donc prendre 236 vingt & huit fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 28, pour avoir la valeur de 236 toises, ainsi c'est encore une Multiplication. C'est pourquoi j'écris d'abord le nombre à multiplier 236, & ensuite le Multiplicateur 28, en mettant les unités sous les unités, & les dixaines sous les dixaines, après quoi je multiplie d'abord le nombre 236 par les unités 8 du multiplicateur, ce qui donne 1888; ensuite je multiplie le même nombre 236 par les dixaines 2 du multiplicateur, en disant: 2 fois 6 font 12, c'est-à-dire 12 dixaines, parce que le multiplicateur 2 signifie des dixaines, ainsi j'écris 2 dixaines sous les dixaines 8 du premier produit

236 toises
28 #
1888
472
6608

1888, & je retiens 1 ; deux fois 3 font 6 & 1 de retenu font 7, & j'écris 7 ; 2 fois 2 font 4, & j'écris 4 ; ainsi ce second produit est 472 ; j'ajoute ensemble ces deux produits 1888, & 472 tels qu'ils sont rangés, c'est-à-dire j'écris d'abord 8, ensuite je dis : 8 & 2 font 10, j'écris 0 & retiens 1 ; 1 de retenu & 8 font 9 & 7 font 16, j'écris 6 & retiens 1 ; 1 de retenu & 1 font 2 & 4 font 6, j'écris 6, & le produit total 6608 est la valeur des 236 toises.

Pour comprendre la raison de ceci, on considerera que le multiplicateur 28 est la même chose que 2 dixaines & 8 unités. Or en multipliant 236 d'abord par 8, j'ai pris ce nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans 8, & en le multipliant ensuite par 2 dixaines, je l'ai pris 2 dixaines de fois, à cause que j'ai avancé le produit d'un rang vers la gauche, ce qui le fait valoir dix fois plus qu'il ne vaudroit si je ne l'avois pas avancé. Donc j'ai pris le nombre 236 2 dixaines de fois & 8 fois, c'est-à-dire 28 fois ; & par conséquent j'ai fait la multiplication requise, ajoutant donc ensemble les deux produits en conservant leur rang, j'ai eu necessairement le produit total.

21. Pour faire plus commodément la multiplication, on se sert d'une Table nommée *Quarré de Pythagore* du nom de son Auteur. On la construit en faisant d'abord un grand quarré que l'on partage en dix rangs égaux de gauche à droite, & en dix autres de haut en bas, de façon que tout le quarré est partagé en 100 petits quarrés ou cellules que l'on voit ici.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

On écrit dans les dix cellules à gauche de haut en bas, les dix nombres 1, 2, 3 &c. jusqu'à 10 & l'on fait la même chose dans les 10 cellules superieures de gauche à droite, ensuite dans les dix cellules du second rang de haut en bas, à la tête duquel est le nombre 2, on écrit les nombres 2, 4, 6, &c. en augmentant toujours de 2, de même dans les cellules du troisiéme rang de haut en bas, à la tête duquel est le nombre 3, on écrit les nombres 3, 6, 9, 12, &c. en augmentant toujours de 3, de même encore dans les cellules du 4e. rang de haut en bas, à la tête duquel est le nombre 4, on écrit les nom-

bres 4, 8, 12, &c. en augmentant toujours de 4, & faisant la même chose à l'égard des autres rangs de haut en bas, la Table se trouve construite.

Pour faire usage de cette Table, si l'on veut par exemple sçavoir ce que fait 6 fois 7, on cherche d'abord dans la premiere colonne de haut en bas, à gauche, la cellule où le nombre 6 se trouve écrit, & dans le rang superieur de gauche à droite la cellule où se trouve le nombre 7. Après quoi suivant des yeux le rang de gauche à droite, qui commence par le nombre 6, & le rang de haut en bas qui commence par 7, la cellule où ces deux rangs s'entrecoupent contient 42, ce qui fait voir que 6 fois 7 font 42; & la raison en est évidente par la construction de la Table; car il est visible qu'en formant le rang du haut en bas qui commence par 7, la seconde cellule contient 2 fois 7 ou 14, la troisiéme 3 fois 7 ou 21, &c. de sorte que la sixiéme qui répond au rang de gauche à la droite qui commence par 6, doit nécessairement contenir 6 fois 7 ou 42.

De même si on vouloit trouver ce que vaut 7 fois 9, on prendroit le rang de gauche à droite qui commence par 7, & le rang de haut en bas qui commence par 9, & l'endroit où ces deux rangs se couperoient contiendroit 63, qui est le produit de 7 par 9, & ainsi des autres.

22. La preuve de la multiplication, c'est-à-dire la maniere de voir si on ne s'est point trompé en faisant l'operation, se fait par la division, qui est une opération toute contraire, comme on verra bien-tôt.

Division simple.

23. Ier. Exemple. *On veut partager 69 livres à 3 Soldats, combien reviendra-t'il à chacun d'eux?*

Il est visible que pour répondre à cette question, il faut partager le nombre 69 en 3, & par conséquent examiner combien de fois 3 est dans 69; car s'il s'y trouve par exemple 23 fois sans reste, il sera vrai de dire que 23 pris trois fois font 69, puisque le tout est égal à ses parties prises ensemble (*N.* 13.), & qu'ainsi 23 sera la partie qui reviendra à chaque Soldat. C'est donc ici une division (*N.* 11.).

Pour cela j'écris le nombre à diviser 69, & le diviseur 3 pardessus sur le premier caractere à gauche; je mene ensuite une ligne sous 69, & une autre à droite pour séparer le dividende

du quotient que je mettrai à côté de cette ligne. Cela fait, je dis : en 6 combien de fois 3, & trouvant qu'il y est 2 fois, j'écris 2 au quotient, & je dis 2 fois 3 font 6, & du caractere 6 du dividende ôtez 6, il ne reste rien. Je divise l'autre caractere 9 du dividende de la même façon, & pour cela je l'écris sous la ligne, directement sous le diviseur, & je dis : en 9 combien de fois 3, & trouvant qu'il y est 3 fois, j'écris 3 au quotient, & je dis 3 fois 3 font 9, & du caractere 9 du dividende ôtez 9, il ne reste rien, & comme il n'y a plus de caractere au dividende, l'opération est finie ; ainsi il revient 23 livres à chaque soldat.

3
69 (23
9

La raison de ceci paroîtra claire, si l'on considere que lorsqu'en faisant la premiere opération, j'ai dit en 6 combien de fois 3 il m'est venu 2 dixaines ou 20 ; car 6 dixaines contiennent 3 vingt fois, ou deux dixaines de fois ; ainsi en multipliant le diviseur 3 par le premier quotient 2, ce qui fait 6 dixaines, & retranchant ces 6 dixaines du dividende, il n'est plus resté au dividende que 9 unités. Or par la seconde opération ayant trouvé que le diviseur étoit 3 fois dans ces 9 unités, j'ai multiplié le diviseur 3 par le second quotient 3, & j'ai retranché le produit 9 des 9 unités du dividende ; ainsi il n'est resté rien au dividende. Donc j'ai retranché du dividende le diviseur 3, autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conséquent j'ai fait la division demandée (*N.* 11.).

24. La preuve de cette regle se fait par la multiplication ; car il est clair que si le diviseur 3 est contenu 23 fois dans le dividende 69, le même diviseur 3 pris 23 fois ou multiplié par 23, doit être égal au dividende, puisque la somme des parties est toujours égale au tout qui le contient (*N.* 13.). Donc si après avoir multiplié le diviseur par le quotient, on ne retrouvoit pas le dividende, ce seroit marque qu'on auroit mal operé. Ceci suppose qu'il ne reste rien au dividende qui ne puisse plus être divisé par le diviseur ; car si cela arrivoit, il faudroit, pour faire la preuve, multiplier le diviseur par le quotient, & ajouter au produit ce qui seroit resté du dividende, & la somme devroit être égale au dividende.

De même que la multiplication sert de preuve à la division, de même aussi la division sert de preuve à la multiplication. Car on voit bien que si en multipliant 3 par 23 on trouve un produit 69. Il s'ensuit nécessairement qu'en divisant 69 par 3, on doit retrouver 23 au quotient, ou qu'en divisant le même 69 par 23, le quotient doit donner 3.

II. Exemple. *Un Marchand a employé 156024 livres à acheter des Etoffes qui lui coutent 6 livres l'aune, combien d'aunes en a-t'il acheté?*

Puisque l'aune vaut 6 livres, le Marchand a acheté autant d'aunes que le nombre 6 est contenu de fois dans la somme 156024 livres qu'il a déboursée. Pour répondre donc à la question proposée, il faut voir combien de fois 6 est contenu dans 156024, & par conséquent il faut faire une division.

J'écris le nombre à diviser 156024 sous lequel je tire une ligne & une autre à droite, pour séparer le dividende du quotient; ensuite j'écris le diviseur au-dessus du dividende à gauche; mais comme 6 n'est pas contenu dans le premier caractere 1 du dividende, je l'écris au-dessus du second caractere 5.

```
 6 . . .
156024(26004
 36
  00
   02
    24
     0
```

Je dis donc en 15 combien de fois 6? & trouvant qu'il ne peut y être que 2 fois, j'écris 2 au quotient; je multiplie le diviseur 6 par le quotient 2, ce qui fait 12, & de la partie 15 du dividende retranchant le produit 12, il reste 3 que j'écris sous la ligne, non pas sous le caractere 5, mais en l'avançant d'un rang à gauche, afin de pouvoir placer sous le caractere 5, & par conséquent sous le diviseur 6, le troisiéme caractere 6 du dividende, pour faire une seconde opération.

Je place donc sous le diviseur le troisiéme caractere 6 du dividende, & je vois qu'au lieu des trois premiers caracteres 156 du dividende, je n'ai plus que 36; je dis donc en 36, combien de fois 6? & trouvant qu'il y est 6 fois, j'écris 6 au quotient. Je multiplie ce quotient 6 par le diviseur 6, ce qui fait 36, & retranchant ce produit des deux caracteres 36 du dividende, il ne reste rien; c'est pourquoi je mene une ligne sous 36, & j'écris o, non pas sous le diviseur, mais en l'avançant d'un rang à gauche pour la même raison que ci-dessus.

J'abbaisse le quatriéme caractere o du dividende sous le diviseur, & je vois qu'au lieu des quatre premiers caracteres 1560 du dividende, je n'ai plus que oo. Je dis donc en zero, combien de fois 6, & trouvant qu'il n'y est point, j'écris un zero au quotient, je multiplie le diviseur 6 par ce quotient zero, ce qui donne zero. Je retranche ce produit zero des caracteres oo du dividende, & le reste est o; ainsi je tire une ligne sous deux oo, & j'écris

cris o, non pas directement sous le diviseur, mais en l'avançant d'un rang à gauche.

J'abbaisse le cinquiéme caractere 2 du dividende sous le diviseur, & je trouve qu'au lieu des cinq premiers caracteres 15602 du dividende, je n'ai plus que 02, c'est-à-dire 2; car le zero qui le précede ne signifie rien; je dis donc en 2, combien de fois 6? & trouvant qu'il n'y est point, j'écris encore zero au quotient. Je multiplie le diviseur 6 par le quotient zero, ce qui fait zero, & retranchant ce produit du caractere 2 du dividende, le reste est 2; car de 2 retranchez zero, le reste est 2; je mene une ligne, & j'écris le reste 2, non pas sous le diviseur, mais en l'avançant d'un rang à gauche.

J'abbaisse le dernier caractere 4 du dividende sous le diviseur, & je trouve qu'au lieu du dividende 156024, je n'ai plus que 24. Je dis en 24, combien de fois 6? & trouvant qu'il y est 4 fois, j'écris 4 au quotient. Je multiplie le diviseur 6 par ce quotient 4, ce qui donne 24, & retranchant ce produit des caracteres 24 du dividende, le reste est zero, que j'écris au dessous en menant une ligne; & comme il ne reste plus rien au dividende, la division est finie; & par conséquent le quotient 26004 marque le nombre d'aunes que ce Marchand a acheté.

Lorsqu'en retranchant des caracteres du dividende, le produit du diviseur par l'un des quotients il ne reste rien, on peut se dispenser d'écrire o par dessous; car ce caractere au commencement d'un nombre ne signifie rien.

Il faut observer à mesure qu'on abbaisse un caractere du dividende sous ce diviseur, de mettre un point sur ce caractere pour marquer qu'il a été abbaissé.

III. Exemple. *On veut partager à 26 personnes la somme de 154518 livres, combien reviendra-t'il à chacun?*

```
 26
154518(5943
245
111
 78
 00
```

Cette question se résout comme les deux précédentes, & il n'y a de différence qu'en ce que le diviseur 26 a deux caracteres; or voici ce qu'on fait.

J'écris le Dividende 154518 menant une ligne par-dessous & à côté comme ci-dessus, ensuite je mets le Diviseur 26 non pas sur le premier caractere 1, parce que 2 n'est pas contenu dans 1, mais sur le second caractere; puis je cherche combien

de fois 26 eſt contenu dans les trois premiers caractères 154 du diviſeur; mais comme cet examen ſeroit embarraſſant, je le fais par partie, en cherchant combien de fois le premier caractère 2 du diviſeur eſt contenu dans les deux premiers caractères 15 du dividende, & examinant enſuite ſi après avoir retranché le produit du diviſeur 2 par le quotient, le ſecond caractère 6 eſt contenu un même nombre de fois dans ce qui reſte, joint au troiſiéme caractère 4 du dividende; que ſi 6 n'y eſt pas contenu un même nombre de fois, je diminue le nombre de fois, juſqu'à ce que les deux caractères 2 & 6 ſoient contenus également.

Je dis donc 2 eſt à la verité 7 fois dans 15; car 2 fois 7 font 14, & 14 étant ôté de 15 il reſte 1, qui avec le caractère ſuivant 4 fait 14, mais 6 n'eſt pas contenu 7 fois dans 14; ainſi au lieu de 7 fois, je ne fais entrer 2 dans 15 que 6 fois; or 2 fois 6 font 12, & 12 étant retranché de 15 il reſte 3, qui avec le caractère ſuivant 4 du dividende font 34, & 6 n'eſt pas contenu 6 fois dans 34; donc au lieu de faire entrer 2 ſix fois dans 15, je ne le fais entrer que 5, & je dis 2 fois 5 font 10, & 10 étant retranché de 15 il reſte 5, qui avec le 4 ſuivant fait 54; mais 6 peut aller 5 fois dans 54, c'eſt pourquoi j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 26 par ce quotient, & je retranche ce produit des 3 premiers caractères 154 du dividende, en diſant: 5 fois 6 font 30, or 30 ne peut être ôté de 4, j'emprunte donc ſur le caractère ſuivant du dividende à gauche autant d'unités qu'il en faut pour faire avec 4 un nombre plus grand que 30, & par conſéquent j'en emprunte 3, qui avec 4 feront 34, & 30 étant retranché de 34 il reſte 4, que j'écris au deſſous en avançant d'un rang à gauche. Je continue en diſant 2 fois 5 font 10, & comme les 2 caractères 15 du diviſeur ne devroient plus valoir que 12, à cauſe des trois unités que j'ai emprunté, je corrige ce défaut en donnant au produit 10 trois unités; je dis donc 2 fois 5 font 10, & 3 que j'ai emprunté font 13; & 13 étant retranché de 15 il reſte 2 que j'écris au deſſous à la gauche du 4 que j'ai écrit auparavant.

Cette premiere operation étant faite, j'abbaiſſe le quatriéme caractère 5 du dividende ſous le dernier caractère du diviſeur, & je vois qu'au lieu des quatre premiers caractères 1545 du dividende, je n'ai que 245. J'examine combien de fois 26 eſt contenu dans 245 de la façon que je viens de dire, & trouvant qu'il y eſt 9 fois, j'écris 9 au quotient, je multiplie le diviſeur 26 par le quotient, & le retranchant de 245 de la même maniere que j'ai

fait ci-dessus, il reste 11, que je mets sous la ligne que je tire, en avançant d'un rang à gauche.

Je fais les mêmes operations à l'égard des deux caracteres restants 1 & 8 du dividende, & tout étant achevé, le quotient total 5943 marque ce qui revient à chacune des 26 personnes.

25. Il y a donc trois choses à observer dans chaque operation que l'on fait en divisant. La premiere est d'examiner combien de fois le diviseur est dans les caracteres du dividende, qui sont au dessous de lui, & à gauche s'il s'en trouve; & d'écrire ce nombre de fois au quotient : la seconde est de multiplier le quotient par le diviseur, & la troisiéme est de retrancher le produit qu'on a trouvé, des caracteres du dividende qui sont sous le diviseur, & à gauche.

26. Lorsque la Division se fait exactement & sans reste comme dans les exemples précédens, on dit que le diviseur est *exact*, mais lorsqu'il se trouve un reste qui ne peut plus être divisé, on dit que le diviseur n'est pas *exact*. Qu'on propose par exemple, le nombre 434 à diviser par 3, on trouvera après avoir fait toutes les opérations, un reste 2 qui ne sçauroit se diviser par 3, puisque 3 n'est pas contenu dans 2, ainsi le diviseur n'est pas exact, & dans ce cas si l'on vouloit faire la preuve, on multiplieroit le diviseur 3 par le quotient 144, ce qui donneroit le le produit 432, auquel on ajouteroit le reste 2 pour avoir le Dividende 434.

```
3
434 (144
13
 14
  2
```

```
144
  3
---
432
  2
---
434
```

27. Lorsque le diviseur n'est pas éxact, le reste est une fraction; ainsi dans l'Exemple que nous venons de donner le nombre 2, est une fraction, car ce nombre signifie 2 unités qu'il faut partager en trois, ou deux tiers d'unité; supposons par exemple que l'on veüille partager 2 écus à 3 personnes, il est sur que si on partage chaque écu en 3 parties égales, les deux écus seront composés de six parties égales, dont chacune vaudra le tiers d'un écu; ainsi divisant ce nombre 6 par le nombre 3 des personnes, le quotient 2 marquera que chaque personne aura deux de ces 6 parties, & par conséquent deux tiers d'écus. Donc 2 écus à partager entre trois personnes, est la même chose que deux tiers d'écus; or 2 tiers d'écus est une fraction, donc le reste d'une division est une fraction.

28. De tout ce que nous venons de dire touchant la multiplication & la division, on doit tirer les conséquences suivantes.

Dans toute multiplication, si l'on divise le produit par le nombre à multiplier, le quotient sera égal au multiplicateur; & si l'on divise le même produit par le multiplicateur, le quotient sera égal au nombre à multiplier (*N.* 24.)

29. *Dans toute division éxacte, le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende; & dans toute division qui n'est pas éxacte, le produit du quotient par le diviseur étant ajouté au reste de la division, donne une somme égale au dividende ou nombre à diviser* (*n.* 24.).

Il y a donc deux differentes regles, l'une pour la division éxacte, & l'autre pour celle qui ne l'est pas; mais il faut observer que ces deux régles peuvent se reduire à une seule; car le reste d'une division non-éxacte étant une fraction (*n.* 27.), si j'écris le reste à côté du quotient en guise de fraction, comme on verra bien-tôt dans le Chapitre suivant, le quotient & la fraction étant multipliés par le diviseur, donneront un produit égal au dividende. Soit par exemple le nombre 14 à diviser par 3, le quotient est 4, & le reste 2 est une fraction qui signifie *deux tiers* (*N.* 27.) or deux tiers s'écrivent de cette façon $\frac{2}{3}$ (*N.* 30.), ainsi j'écris $\frac{2}{3}$ à côté du quotient 4, ce qui fait $4\frac{2}{3}$; je multiplie $4\frac{2}{3}$ par le diviseur 3 en disant: 3 fois deux tiers font six tiers, & six tiers font deux entiers; car chaque entier contient trois tiers, donc je n'ai plus de fraction & je retiens deux entiers; 3 fois 4 font 12 entiers & 2 de retenu font 14, ainsi le produit est 14, & ce produit est égal au dividende; d'où l'on voit *que dans la Division non exacte, de même que dans la Division exacte, le produit du diviseur par le quotient total, c'est-à-dire par le quotient & la fraction qui exprime le reste, est égal au dividende*; & par conséquent la même regle sert pour l'un & l'autre cas.

$$\begin{array}{l} 3 \\ 14(4\frac{2}{3} \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\frac{2}{3} \\ 3 \\ \hline 14 \end{array}$$

CHAPITRE III.

DES FRACTIONS.

30. UNe fraction nous présente toujours deux idées, dont l'une est l'idée du nombre des parties qui composent l'entier, & l'autre est celle du nombre des parties que l'on prend. Quand on dit deux tiers d'écus, on conçoit qu'un écu est partagé en trois parties égales, & qu'on en prend 2, & ainsi des autres. D'où il suit qu'il faut nécessairement employer deux expressions qui répondent à ces deux idées; or voici comme on fait.

Pour exprimer deux tiers, on écrit d'abord le nombre 2, ſous lequel on mene une petite ligne, & ſous cette ligne on met le nombre 3. Ainſi on écrit $\frac{2}{3}$, de même pour exprimer trois quarts, quatre cinquiémes, &c. on écrit $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c, le nombre écrit au deſſus de la petite ligne ſe nomme le *numerateur*, parce qu'il marque combien on prend des parties de l'entier, & celui qui eſt ſous la ligne ſe nomme *dénominateur*, parce qu'il exprime en combien de parties égales on conçoit que l'entier eſt diviſé, & que par conſéquent il détermine l'eſpece de la fraction.

31. Deux ou pluſieurs fractions de differente eſpece, c'eſt-à-dire, dont les dénominateurs ſont differens, ne peuvent ni être ajoutées enſemble, ni être ſouſtraites les unes des autres. $\frac{2}{3}$ d'écus & $\frac{3}{4}$ d'écus ne peuvent faire ni $\frac{5}{3}$ ni $\frac{5}{4}$; car quoiqu'on prenne d'un côté 2 parties d'un écu, & de l'autre 3, ce qui fait 5; cependant on ne peut pas dire que ces cinq parties ſont toutes ou des tiers ou des quarts: par la même raiſon on ne ſçauroit retrancher la fraction $\frac{1}{2}$ de la fraction $\frac{2}{3}$; c'eſt pourquoi ſi l'on veut faire ces operations ſur ces ſortes de fractions, il faut néceſſairement les reduire à avoir une même dénomination, ſans cependant changer leur valeur; & c'eſt ce que nous allons voir après que j'aurai poſé les principes ſuivans.

32. *Si l'on multiplie deux nombres par un même nombre, les produits ſeront entr'eux comme les nombres à multiplier, c'eſt-à-dire, le premier produit ſera contenu dans le ſecond, ou le contiendra autant de fois que le premier nombre à multiplier ſera contenu ou contiendra le ſecond.*

Soient les nombres à multiplier 4 & 8, & le multiplicateur 3, les produits ſeront 12 & 24, & il eſt viſible que le nombre 4 étant contenu 2 fois dans 8, le même 4 pris 3 fois, c'eſt-à-dire 12, ſera auſſi contenu deux fois dans le nombre 8 pris 3 fois, c'eſt à-dire 24; ainſi 12 ſera à 24 comme 4 eſt à 8.

4	8
3	3
12	24

33. *Si l'on diviſe deux nombres par un même nombre, les quotiens ſeront en même raiſon que les autres à diviſer.*

Soient les nombres 12 & 48 à diviſer par 3, les quotiens ſeront 4 & 16; or 12 étant le quart de 48, il eſt clair que le tiers de douze, c'eſt-à-dire le quotient 4 doit être le 4 du tiers de 48, c'eſt-à-dire du quotient 16.

3	3
12(4	48(16
	18
	0

34. *Lorſque l'on multiplie un nombre ſucceſſivement par pluſieurs*

multiplicateurs, le produit que l'on trouve est égal au produit que l'on auroit, si l'on multiplioit tout d'un coup le nombre proposé par le produit de tous les multiplicateurs.

Soit le nombre 4 à multiplier successivement par 2 & 3, le produit sera 24; car 4 multiplié par 2 donne 8, & 8 multiplié par 3 donne 24; d'autre part si je multiplie le multiplicateur 2 par le multiplicateur 3, ce qui fait 6, & que je multiplie le nombre proposé 4 par ce produit, j'ai aussi 24.

4	2	6
2	3	4
8	6	24
3		
24		

Et la raison en est évidente, car en multipliant 4 par le premier multiplicateur 2, je prens 4 deux fois, c'est-à-dire je le rends double de lui-même, & dans cet état en le multipliant par 3, je le prens 3 fois, de sorte qu'en tout je le prens 2 fois 3 fois, c'est-à-dire 6 fois; or lorsqu'après avoir fait le produit 6 des multiplicateurs 2 & 3, je multiplie 4 par 6, je prens aussi 4 six fois, donc de part & d'autre je fais la même chose, & le produit doit être le même.

35. *Lorsqu'on divise un nombre successivement par plusieurs diviseurs, le quotient que l'on trouve est le même que celui qu'on trouveroit, si l'on divisoit tout d'un coup le nombre proposé par le produit de tous les diviseurs.*

Soit le nombre 24 à diviser par 2 & 3, le quotient sera 4, car 24 divisé par 2 donne 12, & 12 divisé par 3 donne 4; d'autre part le produit des deux diviseurs 2 & 3 est 6, & si je divise 24 par 6, j'ai aussi 4 pour quotient.

2 3	2	6
24(12(4	3	24(4
0 0	6	0

La raison en est qu'en divisant 24 par 2, je le reduits à la moitié, & dans cet état en le divisant par 3, je le réduits au tiers de la moitié, & par conséquent je le réduits au sixiéme; car la moitié étant partagée en trois parties, l'entier qui contient deux moitiés, contient aussi 6 de ces parties; ainsi chacune d'elles est le sixiéme de l'entier: or lorsqu'après avoir fair le produit 6 des deux diviseurs, je divise 24 par ce produit, je réduits 24 au sixiéme; donc de part & d'autre je fais la même chose, & le quotient doit être le même.

Réduire deux ou plusieurs fractions à un même dénominateur.

36. Soient les deux fractions proposées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je multiplie les deux dénominateurs 3 & 5 l'un par l'autre, ce qui donne le dé-

nominateur commun 15; ensuite je multiplie le numérateur 2 de la premiere par le dénominateur 5 de la seconde, & le numérateur 4 de la seconde par le dénominateur 3 de la premiere, ce qui me donne deux nouveaux numérateurs 10 & 12, & je dis que la premiere fraction $\frac{2}{3}$ est changée en $\frac{10}{15}$ qui a la même valeur que $\frac{2}{3}$, & que la seconde $\frac{4}{5}$ est changée en $\frac{12}{15}$ qui ne vaut pas plus que $\frac{4}{5}$.

10		12
$\frac{2}{3}$	15	$\frac{4}{5}$

Pour en être convaincu, on n'a qu'à considerer qu'en operant comme j'ai fait, le numerateur 2 de la premiere fraction, & son dénominateur, ont été multipliés par un même nombre 5, & qu'ainsi les produits 10 & 15 sont en même raison que les nombres à multiplier 2 & 3 (*N.* 32.); d'où il suit que 10 est les deux tiers de 15, de même que 2 est les deux tiers de 3, & que par conséquent c'est la même chose de partager l'entier en 15 parties égales, & d'en prendre 10, que de le partager en 3, & d'en prendre 2; de même le numerateur 4 de la seconde fraction, & son dénominateur 5, ayant été multipliés par le même nombre 3, les produits 12 & 15 sont en même raison que les nombres 4 & 5. Donc les deux nouvelles fractions $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, sont les mêmes que les deux proposées $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$; & il est visible qu'elles ont le même dénominateur 15, puisque dans l'une & dans l'autre ce dénominateur est le produit des 2 dénominateurs 3 & 5 des fractions proposées.

Soient les trois fractions proposées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, je multiplie les trois dénominateurs les uns par les autres, c'est-à-dire je multiplie 3 par 5, ce qui fait 15, & 15 par 6, ce qui fait 90, & je prens 90 pour le dénominateur commun: je multiplie ensuite le numérateur 2 de la premiere successivement par les dénominateurs des deux autres, ou ce qui revient au même, par le produit 30 de ces deux dénominateurs 5 & 6 (*N.* 34.) & le produit 60 est le nouveau numérateur de cette fraction.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \underline{5} \\ 15 \\ \underline{6} \\ 45 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 60 & 72 & 15 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{1}{6} \\ & 90 & \end{array}$$

Je multiplie de même le numerateur 4 de la seconde successivement par les dénominateurs 3 & 6 des deux autres, ou tout d'un coup par le produit 18 de ces deux denominateurs; & le produit 72 est le nouveau numerateur de cette seconde fraction; enfin je multiplie le numerateur 1 de la troisiéme fraction successivement par les dénominateurs 3 & 5 des deux autres, ou tout d'un coup par leur produit 15, & le produit 15 est le nouveau numerateur de cette troisiéme fraction.

Les trois fractions proposées $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$, sont donc changées en ces trois ci $\frac{60}{90}, \frac{72}{90}, \frac{15}{90}$, qui ont un même dénominateur, & dont les valeurs sont les mêmes que celles des proposées. La démonstration de ceci est la même que la précedente; car il est aisé de voir qu'en operant de cette façon, le numerateur 2 & le dénominateur 3 de la premiere fraction ayant été multipliés l'un & l'autre successivement par les dénominateurs 3 & 5, ou tout d'un coup par le produit 30 de ces deux dénominateurs, les produits 60, 90, sont en même raison que 2 & 3 (*n.* 34.), & que par conséquent 60 est les deux tiers de 90, de même que 2 est les deux tiers de 3; d'où il suit que c'est la même chose de partager l'entier en 90 parties égales, & d'en prendre 60, que de le partager en 3 & d'en prendre 2, & qu'ainsi la fraction $\frac{60}{90}$ est la même que $\frac{2}{3}$. On fera le même raisonnement à l'égard des deux autres fractions.

La regle est donc de multiplier tous les dénominateurs ensemble, & de prendre le produit pour le dénominateur commun, ensuite de multiplier le numerateur de chaque fraction par les dénominateurs de toutes les autres, ce qui donnera les nouveaux numerateurs que l'on cherche.

Réduire un entier en fraction dont le dénominateur soit donné.

Soit le nombre 15 à réduire en une fraction dont le dénominateur soit 3, je multiplie 15 par 3, & le produit est 45, j'écris donc 45, & menant une ligne, j'écris le dénominateur 3 au-dessous, ce qui me donne la fraction $\frac{45}{3}$ égale à l'entier 15.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{3} \\ 45 \end{array} \quad \frac{45}{3}$$

DÉMONSTRATION. Chaque unité de l'entier 15 étant divisée en trois parties égales, contient 3 tiers, & par conséquent 15 unités doivent contenir 15 fois 3 tiers, c'est-à-dire $\frac{45}{3}$. Donc $\frac{45}{3}$ est égal à 15.

Réduire en entier une fraction improprement dite, ou dont le numérateur est plus grand que le dénominateur.

38. Soit la fraction $\frac{45}{3}$ à réduire en entiers; je divise 45 par le dénominateur 3, & le quotient 15 est l'entier que je cherche.

$$\begin{array}{l} 3 \\ 45(15 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Puisque la fraction est une fraction de tiers, chaque entier en doit contenir 3, ainsi il doit y avoir dans $\frac{45}{3}$ autant d'entiers qu'il y aura de 3, & par conséquent en divisant 45 par 3, on a le nombre des entiers contenus dans $\frac{45}{3}$.

Réduire

Réduire une fraction aux plus petits nombres qui puissent l'exprimer.

39. Soit la fraction $\frac{12}{24}$ à reduire à ses moindres termes, il est sur qu'il faut pour cela que je cherche un nombre qui divise exactement le numerateur 12 & le dénominateur 24; car les quotients seront certainement plus petits que 12 & 24, & cependant ils seront en même raison (*n.* 33.), d'où il suit que je pourrai mettre le premier quotient à la place du numerateur 12, & le second à la place du dénominateur 24, ce qui me donnera une nouvelle fraction égale à $\frac{12}{24}$, & dont les termes seront moindres. 2°. Il faut encore que ce diviseur que je cherche, soit le plus grand diviseur éxact qui puisse diviser 12 & 24; car les quotients deviendront alors les moindres qu'ils puissent être, à cause que plus le diviseur est grand, moins il est contenu dans le dividende, & par conséquent le diviseur devient moindre.

Pour remplir donc ces deux conditions, je divise le dénominateur 24 par le numerateur 12, & trouvant que la division est exacte, & que le quotient est 2, je divise aussi 12 par lui-même, & le quotient est 1; ainsi les deux nombres 12 & 24 ayant été divisés par le même nombre 12, les quotients 1 & 2 sont en même raison (*N.* 33.) & par conséquent la fraction $\frac{1}{2}$ est la même que la fraction $\frac{12}{24}$; de plus on ne sçauroit trouver de moindres termes pour exprimer cette fraction, puisque le diviseur 12 étant égal au numerateur, on ne sçauroit trouver un plus grand nombre qui divise exactement 12 & 24.

12	12
24 (2	12 (1
0	0

Si après avoir divisé le dénominateur par le numerateur, la division n'est pas exacte; on néglige le quotient, & l'on divise le numerateur par le reste de la premiere division; & si cette seconde division n'est pas éxacte, on divise le reste de la premiere division par le reste de la seconde, & on continuë de même jusqu'à ce qu'on trouve un diviseur éxact; alors on divise le numerateur & le dénominateur de la fraction proposée par ce diviseur, & les deux quotients composent la fraction reduite.

Soit par exemple la fraction $\frac{168}{240}$ à réduire aux moindres termes. Je divise le dénominateur 240 par le numérateur 168, & la division n'est pas éxacte; car il me reste 72.

168	72	24
240(1	168(2	72 (3
72	24	0

Je neglige le quotient 1, & je divise le numerateur 168 par 72,

& la division n'est pas éxacte, puisqu'il me reste 24.

Je néglige le quotient 2, & je divise le premier reste 72 par le second 24, & la division est éxacte.

Je prens donc le diviseur 24 & je divise le numerateur 168, & le dénominateur 240 l'un & l'autre par 24, & les quotients 7 & 10 sont en même raison que 168 & 240; donc la fraction $\frac{7}{10}$ est la même que la fraction $\frac{168}{240}$ réduite à ses moindres termes.

24	24
168(7	240(10
00	00
	0

Demonstration. Je dis 1°. que 24 doit diviser exactement le numerateur 168 & le dénominateur 240; car 24 divise exactement 72, or 168 contient 2 fois 72 plus 24, comme on voit par la division que nous avons faite; ainsi 168 est le même que 2 fois 72 plus 24; mais 24 se divise exactement lui-même, & divise aussi exactement 2 fois 72: puisqu'il divise exactement 72, donc 24 divise exactement 2 fois 72 plus 24, c'est-à-dire 168. De même 240 contient une fois 168 plus 72, comme on voit par la division que nous avons faite; donc 240 est la même chose que 168 plus 72; or 24 divise exactement 168 & 72, donc 24 doit aussi diviser exactement 168 plus 72, c'est-à-dire 240.

Je dis 2°. que 24 est le plus grand diviseur qui puisse diviser exactement 168 & 240. Si l'on vouloit qu'il y eût un nombre plus grand que 24, qui divisât exactement 168 & 240, il faudroit que ce nombre divisât exactement 168 & le premier reste 72; car 240 étant la même chose que 168 plus 72, si le diviseur de 168 ne divisoit pas exactement 72, il ne diviseroit pas non plus 168 plus 72, c'est-à-dire 240. De plus 168 étant égal à 2 fois 72 plus 24, le diviseur qui diviseroit exactement 168 & 72, devroit aussi diviser exactement 2 fois 72, & 24; car autrement il ne diviseroit pas 168 égal à 2 fois 72 plus 24; or 24 ne peut pas avoir un diviseur plus grand que lui, donc il ne peut pas se trouver de nombre plus grand qui divise exactement 168 & 240.

Evaluer une fraction.

40. Nous avons dit (*N.* 8.), qu'il y a certaines choses dont l'usage a voulu qu'on ait fait des divisions & de soudivisions nommées sous especes. Or *évaluer* une fraction de quelqu'une de ces choses, c'est chercher combien la fraction contient de sous-especes.

Pour sçavoir combien $\frac{1}{4}$ de livres contient de sols, qui est la sous-

espece de la livre, il faut reduire la livre en sols, c'est-à-dire la multiplier par 20, à cause que la livre contient 20 sols; ensuite on divisera 20 par 4 pour en avoir le quart qui est 5, & l'on multipliera ce quart par 3, parce qu'on a $\frac{3}{4}$, & le produit 15 sols marquera que $\frac{3}{4}$ de livres valent 15 sols, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

Ajouter ensemble deux ou plusieurs fractions.

41. Si les fractions ont un même dénominateur, on ajoute ensemble tous les numerateurs; mais si les dénominateurs sont differens, on réduit auparavant les fractions à une même dénomination.

Ier. EXEMPLE. *Un homme a acheté d'une part 12 aunes $\frac{3}{5}$ d'étoffe, & d'un autre 14 aunes & $\frac{4}{5}$, combien a-t'il acheté d'aunes en tout?*

12 aunes	$\frac{3}{5}$
14	$\frac{4}{5}$
27 aunes	$\frac{2}{5}$

J'écris les aunes sous les aunes, & les fractions sous les fractions, après quoi je dis $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$ font $\frac{7}{5}$, & comme le numérateur 7 est plus grand que le dénominateur 5, je divise 7 par 5, pour sçavoir combien il y a d'entiers, & je trouve 1 entier avec un reste 2, c'est-à-dire $\frac{2}{5}$, j'écris $\frac{2}{5}$ sous la ligne, & passant aux aunes, je dis 1 entier que j'ai & 2 font 3, & 4 font 7, & achevant le reste à l'ordinaire, je trouve que cet homme a acheté 27 aunes & $\frac{2}{5}$.

II. EXEMPLE. *Un Marchand a vendu à trois differentes personnes 15 aunes $\frac{2}{3}$, 12 aunes $\frac{3}{4}$, 18 aunes $\frac{4}{5}$, combien a-t'il vendu en tout?*

40	45	48
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
	60	

Je réduis les trois fractions au même dénominateur, & j'ai les nouvelles fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, qui sont les mêmes que les fractions proposées.

15 aunes	$\frac{40}{60}$
12...	$\frac{45}{60}$
18...	$\frac{48}{60}$
47 aun.	$\frac{13}{60}$

J'écris donc 15 aunes $\frac{40}{60}$, au lieu de 15 aunes $\frac{2}{3}$, 12 aunes $\frac{45}{60}$, au lieu de 12 aunes $\frac{3}{4}$, & 18 aunes $\frac{48}{60}$, au lieu de 18 aunes $\frac{4}{5}$, & ajoutant ensemble les trois numerateurs, la somme est $\frac{133}{60}$; & comme le numerateur est plus grand que le dénominateur, je divise 133 par 60, & le quotient est 2 entiers avec un reste $\frac{13}{60}$. J'écris $\frac{13}{60}$ sous les fractions, & portant 2 entiers au rang des aunes, je dis 2 que je porte & 5 font 7, & achevant le reste à la maniere accoutumée, je trouve que ce Marchand a vendu 47 aunes $\frac{13}{60}$.

Soustraire une fraction d'une autre.

42. Si les deux fractions ont le même dénominateur, on soustrait le numerateur de la petite du numerateur de la grande, & ce qui reste est le numerateur de la fraction restante : que si les dénominateurs sont differens, on réduit auparavant les deux fractions à une même dénomination.

Ier. Exemple. *Un homme entreprend un voyage qui en suivant la route commune seroit de 28 lieuës $\frac{3}{4}$, mais en prenant une autre route, il ne sera que 17 lieuës $\frac{1}{4}$, combien épargnera-t'il de lieuës ?*

$28^{\text{lieuës}}\ \frac{3}{4}$
$17\ \ \frac{1}{4}$
$11^{\text{lieuës}}\ \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$

J'écris ces deux nombres l'un sous l'autre, c'est-à-dire les lieuës du petit sous les lieuës du grand, & les fractions sous les fractions ; ensuite je dis : de $\frac{3}{4}$ ôtez $\frac{1}{4}$, ou de 3 ôtez 1, il reste 2, ou $\frac{2}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; de 8 ôtez 7, il reste 1, & de 2 ôtez 1, il reste 1 ; ainsi cet homme fera 11 lieuës $\frac{1}{2}$ de moins.

II. Exemple. *De 17 aunes $\frac{3}{4}$, ôtez 15 aunes $\frac{2}{3}$, que reste-t'il ?*

9 8 — $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ — 12

$17^{\text{aunes}}\ \frac{9}{12}$
$15\ \ \frac{8}{12}$
$2^{\text{aunes}}\ \frac{1}{12}$

Je réduis les deux fractions au même dénominateur, ce qui donne $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$; j'écris donc 17 aunes $\frac{9}{12}$, au lieu de 17 aunes $\frac{3}{4}$, & par-dessous 15 aunes $\frac{8}{12}$, au lieu de 15 aunes & $\frac{2}{3}$; ensuite je dis : de $\frac{9}{12}$ ôtez $\frac{8}{12}$, ou de 9 ôtez 8, il reste 1 ou $\frac{1}{12}$; de 7 aunes ôtez 5, il reste 2, & de 1 ôtez 1, il ne reste rien ; ainsi le reste est 2 aunes $\frac{1}{12}$.

III. Exemple. *Un homme a acheté 25 aunes $\frac{2}{5}$ d'étoffe, il en a cedé à un ami 9 aunes $\frac{3}{4}$, combien lui en reste-t'il ?*

8 15 — $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ — 20

$25^{\text{aunes}}\ \frac{8}{20}$
$9\ \ \frac{15}{20}$
$15^{\text{aunes}}\ \frac{13}{20}$

Je réduis les deux fractions au même dénominateur, ce qui donne $\frac{8}{20}$, & $\frac{15}{20}$, j'écris donc 25 aunes $\frac{8}{20}$, & par dessous 9 aunes $\frac{15}{20}$, & je dis : de $\frac{8}{20}$ je ne puis ôter $\frac{15}{20}$, c'est pourquoi j'emprunte une unité au rang des aunes, & la réduisant en une fraction dont le dénominateur soit 20, j'ai $\frac{20}{20}$ qui joints aux $\frac{8}{20}$ que j'ai déja font $\frac{28}{20}$, & de $\frac{28}{20}$ ôtez $\frac{15}{20}$, il reste $\frac{13}{20}$; ensuite de 4 ne pouvant ôter 9, j'emprunte une unité sur le rang suivant, laquelle unité vaut 10, & ces 10 joints aux 4 que j'ai déja font 14, & de 14 ôtez 9, il reste 5 ; enfin de 1

ôtez o, il reste 1; donc ce qui reste à cet homme est 15 aunes $\frac{11}{10}$.

Multiplier une fraction par une autre.

43. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, soit que les dénominateurs soient les mêmes, ou qu'ils soienr differens, on multiplie les deux numerateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs aussi, & l'on a une nouvelle fraction qui est le produit des deux.

Pour multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, on multiplie le numerateur 3 par le numerateur 4, ce qui fait 12, on multiplie de même le dénominateur 4 par le dénominateur 5, ce qui fait 20, & l'on écrit $\frac{12}{20}$ pour le produit des deux fractions.

Demonstration. Si au lieu du multiplicateur $\frac{4}{5}$ j'avois quatre unités, je multiplierois le numerateur 3 de la fraction $\frac{3}{4}$ par le multiplicateur 4, & j'aurois $\frac{12}{4}$ pour le produit; car $\frac{3}{4}$ pris 4 fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 4 font $\frac{12}{4}$; or ce n'est pas par 4 unités que je dois multiplier $\frac{3}{4}$, mais par $\frac{4}{5}$, ou par 4 divisé par 5; ainsi en multipliant par 4, j'ai trop multiplié, & le produit $\frac{12}{4}$ est trop grand; pour corriger donc ce défaut, il faut que je divise ce produit par le dénominateur 5 de $\frac{4}{5}$; mais $\frac{12}{4}$ étant la même chose que 12 divisé par 4, il s'ensuit que 12 divisé par 4, doit être ensuite divisé par 5, ou ce qui revient au même, que 12 doit être divisé tout d'un coup par le produit 20 des deux diviseurs 4 & 5 (*N.* 35.). Donc la fraction $\frac{12}{20}$ est le produit cherché.

Diviser une fraction par une autre.

44. Pour diviser une fraction par une autre, il faut toujours que les dénominateurs soient les mêmes; & si cela n'est pas, il faut auparavant réduire les fractions à la même dénomination. Après quoi on divise le numerateur de la fraction à diviser par le numerateur de la fraction qui doit la diviser.

Pour diviser $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$, on divise 8 par 4, & le quotient 2 fait voir que $\frac{8}{9}$ contient 2 fois $\frac{4}{9}$.

Pour diviser $\frac{9}{10}$ par $\frac{7}{10}$, on divise 9 par 7, & le quotient $\frac{9}{7}$ ou 1 $\frac{2}{7}$ fait voir que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ une fois & deux septiémes de fois, c'est-à-dire que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ & 2 parties de sept dixiémes ou $\frac{2}{10}$, & ainsi des autres.

Des fractions de fractions.

45. De même qu'on peut diviser un entier en plusieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction : de même aussi on peut diviser une fraction en plusieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction de fraction. D'où l'on voit qu'une fraction de fraction n'a pas un rapport immediat à l'entier, mais seulement à la fraction dont elle est partie. Le $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ n'est pas le tiers de l'entier, mais le tiers d'une partie de l'entier.

Pour operer sur les fractions de fractions, il faut auparavant leur donner un rapport immediat à l'entier, c'est-à-dire les faire devenir simples fractions, ce que l'on fait ainsi.

Soit la fraction de fraction $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune; je multiplie les deux dénominateurs ensemble. Ce qui fait 12, & prenant 12 pour dénominateur, & 1 pour numerateur, j'ai la fraction $\frac{1}{12}$ d'aune égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune ; ce qui est visible, puisque l'aune contenant quatre quarts, & chaque quart contenant trois tiers, l'aune doit par conséquent contenir trois fois quatre, ou 12 parties telles que chacune soit le tiers de son quart ; & par conséquent chacune de ces parties est la douziéme partie de l'aune.

Soit encore la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d'aune; je multiplie les deux numerateurs, ce qui fait 6, & les deux dénominateurs, ce qui fait 12, & j'ai la fraction $\frac{6}{12}$ d'aune égale à $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d'aune : car le tiers d'un quart étant un douziéme d'aune, les deux tiers d'un quart sont deux douziémes d'aune, & les deux tiers de trois quarts sont 2 fois 3 ou 6 douziémes d'aune.

CHAPITRE IV.

De la Multiplication & de la Division composée.

46. LA partie *aliquote* d'un nombre est une partie qui étant prise plusieurs fois est égale à ce nombre : 4 étant pris 5 fois est égal à 20, donc 4 est une partie *aliquote* de 20.

47. La partie *aliquante* d'un nombre est une partie qui étant prise plusieurs fois, est toujours ou moindre ou plus grande que ce nombre, sans pouvoir jamais lui être égale : 6 pris 3 fois est moindre que 20, & le même 6 pris 4 fois, 5 fois, &c. est plus grand que 20. Donc 6 est partie *aliquante* de 20.

48. Toute partie aliquante d'un nombre peut se partager en deux ou plusieurs parties aliquotes. Par exemple 6, partie aliquante de 20, peut se couper en deux parties 4 & 2, donc la premiere est contenuë 5 fois dans 20, & la seconde y est contenuë dix fois : le même 6 peut se couper encore en deux parties 5 & 1 ; donc la premiere est contenuë 4 fois dans 20, & l'autre y est contenuë 20 fois.

49. C'est par le moyen des parties aliquotes, & des aliquantes réduites en aliquotes qu'on fait la multiplication composée, ainsi qu'on verra après que nous aurons établi les deux principes suivans.

50. *Si l'on divise un nombre entier par 10, le quotient sera toujours égal à toutes les parties du dividende, excepté la derniere à droite, qui sera une fraction, donc le dénominateur sera 10.*

Soit le nombre 3642 à diviser par 10, je le divise à la façon ordinaire, & je vois que dans chaque operation le premier nombre 1 du diviseur est contenu dans le caractere du dividende qui se trouve sous lui autant de fois que ce caractere contient d'unités ; & que le second caractere o du diviseur laisse toujours subsister le caractere du dividende qui est sous lui ; donc après la derniere opération, je dois avoir au quotient les caracteres 364 qui sont les trois premiers caracteres du dividende, & le dernier caractere est un reste à diviser par 10, & par conséquent ce reste est $\frac{2}{10}$.

```
10
3642 (364 2/10
--------------
64
--
42
--
2
```

De-là il suit qu'au lieu de faire la division demandée, on n'a qu'à retrancher tout d'un coup le dernier caractere & écrire $364\frac{2}{10}$.

51. *Si l'on divise un nombre par 20, le quotient sera toujours égal à la moitié de tous les termes de ce nombre qui précédent le dernier, & le reste sera une fraction qui aura pour dénominateur 20.*

Soit le nombre 4652 à diviser par 20. Je fais la division, & je trouve que le premier caractere 2 du diviseur me donne dans chaque opération la moitié du caractere du dividende qui se trouve sous lui, parce que c'est la même chose de prendre la moitié ou de diviser par 2, & que le second caractere zero du diviseur laisse toujours subsister le caractere du dividende qui se trouve sous lui ; donc après la derniere operation je dois avoir au quotient 232, c'est-

```
20
4652 (232 12/20
---------------
65
--
52
--
12
```

à-dire la moitié des trois premiers caracteres 465 du dividende ; & après avoir pris cette moitié, il reste 1 dixaine, laquelle jointe au dernier caractere 2 du dividende fait 12, c'est-à-dire 12 à diviser par 20, ou $\frac{12}{20}$.

De-là il suit qu'au lieu de faire la division demandée, il n'y a qu'à retrancher du dividende le dernier caractere à droite, & prendre la moitié en allant de gauche à droite ; ainsi on dira la moitié de 4 est 2, la moitié de 6 est 3, & la moitié de 5 est 2 ; & il reste 1 dixaine, qui jointe au caractere retranché 2 fait $\frac{12}{20}$, & l'on aura 232 $\frac{12}{20}$.

Je laisse à examiner aux commençans ce qui arriveroit, si l'on divisoit un nombre par 30, 40, 50, 60, &c.

Ier. EXEMPLE. *Un Ouvrier a fait 365 toises d'ouvrage à 4 livres 10 sols la toise, combien lui revient-il?*

365 toises	
4#	10 sols
1460	
182	10
1642#	10 sols

J'écris le nombre à multiplier 365, & sous son dernier caractere à droite j'écris 4 liv. & j'avance 10 sols, ensuite je multiplie 365 par 4, ce qui donne 1460 livres.

Maintenant pour multiplier par 10 sols, je dis : si l'aune ne coutoit qu'une livre ou 20 sols, le prix de 365 aunes feroit 365 livres, mais 10 sols est la moitié d'une livre, donc je ne dois avoir que la moitié de 365 ; je dis donc : la moitié de 3 est 1 & il reste 1 qui joint au caractere suivant 6 fait 16 ; la moitié de 16 est 8 ; la moitié de 5 est 2, & il reste 1 livre à partager en deux ou une moitié de livre ; or la moitié d'une livre est 10, & par conséquent j'écris 10 sols, & ajoutant ensemble les deux produits, j'ai 1642 liv. 10 sols pour le prix de 365 toises.

II. EXEMPLE. *A 5 livres 13 sols 6 deniers la toise, combien vaudront 535 toises?*

535 toises		
5#	13 sols	6 den.
2675		
267	10	
53	10	
26	15	
13	7	6
3036#	2 sols	6 den.

Je multiplie 535 par 5 liv. ce qui donne 2675 liv. ensuite les 13 sols n'étant pas une partie aliquote de 20 sols, ou d'une livre, je coupe 13 sols en trois parties 10, 2, & 1, dont la premiere est la moitié d'une livre, la seconde est le dixiéme, & la troitroisiéme est le vingtiéme ; je multiplie donc par 10 sols, en disant : si la toise ne valoit que 1 livre, le prix de 535 toises ne vaudroit que 535 livres ; or

or 10 eſt la moitié de la livre, donc je ne dois prendre que la moitié, & prenant cette moitié, j'ai 267 livres 10 ſols.

Pour multiplier par 2 ſols qui eſt le dixiéme d'une livre, je prens le dixiéme de 535 que rendroit une livre; or pour prendre le dixiéme, ou pour diviſer par 10, je coupe le dernier caractere de 535 (*N.* 50.) & j'ai 53 livres, & le reſte eſt une fraction $\frac{5}{10}$, mais chaque dixiéme vaut 2 ſols, donc 5 dixiémes valent 10 ſols, & par conſéquent j'ai 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols.

Pour multiplier par 1 ſol, je prends le vingtiéme de 535 livres qu'une livre rendroit, c'eſt-à-dire, je diviſe 535 par 20, ainſi je coupe le dernier caractere 5, & je prends la moitié de 53 qui eſt 26 (*n.* 51.), & il reſte 1, lequel joint au dernier caractere fait $\frac{15}{20}$. Or chaque vingtiéme vaut 1 ſol, donc $\frac{15}{20}$ font 15 ſols; j'ai donc 26 livres 15 ſols pour le produit de 1 ſol.

Maintenant pour multiplier par 6 deniers, je prends la moitié de ce que 1 ſol m'a rendu, à cauſe que 6 deniers eſt la moitié d'un ſol, & j'ai 13 livres 7 ſols 6 deniers. Mais ſi avant les ſix deniers je n'avois eu que 10 ſols, & que par conſéquent je n'euſſe point le produit d'un ſol qui me fait voir tout d'un coup que 6 deniers doivent me rendre la moitié de ce produit, je ferois une ſuppoſition en diſant: ſi j'avois à multiplier par 2 ſols qui eſt le dixiéme d'une livre, je n'aurois qu'à retrancher le dernier caractere de 535, & j'aurois 53 livres & $\frac{5}{10}$, chacun deſquels valant 2 ſols font 10 ſols; ainſi j'aurois 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols; or 6 deniers ſont le quart de 2 ſols: donc 6 deniers doivent me produire le quart de 53 livres 10 ſols, & prenant le quart, j'aurois le quart de 5 eſt 1, & il reſte 1, qui avec le 3 ſuivant fait 13; le quart de 13 eſt 3, & il reſte 1 livre ou 20 ſols, qui joint aux 10 ſols ſuivans font 30 ſols; le quart de 30 ſols eſt 7 ſols, & il reſte 2 ſols ou 24 deniers, dont le quart eſt 6; ainſi j'aurois 13 livres 7 ſols 6 deniers pour le produit de 6 deniers.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver, & le produit total 3036 livres 2 ſols 6 deniers eſt le prix des 535 aunes.

III. EXEMPLE. *327 toiſes 3 pieds 6 pouces à 3 livres 9 ſols 4 deniers la toiſe, combien valent-elles?*

Je néglige les 3 pieds 6 pouces du multiplicateur, & je multiplie 327 par 3, ce qui donne 981 livres.

9 ſols n'étant pas une partie aliquote de 20 ſ. je coupe 9 en 2 parties 5 & 4, dont l'une eſt le quart, & l'autre le cinquiéme d'une liv.

327 toif.	3 pie.	6 pouces.	
3 ₶	9 fols	4 den.	
981			
81	15		
65	8		
5	9		
1	14	8	
0	5	9	$\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$
1135 ₶	12 fols	5 den.	$\frac{1}{3}$

Je multiplie par 5 fols, en prenant le quart de 327 ; le quart de 32 eft 8, le quart de 7 eft 1, & il refte 3 livres à divifer par 4, ou $\frac{3}{4}$ de livres ; or chaque quart vaut 5 fols, donc $\frac{3}{4}$ valent 15 fols, & par conféquent j'ai 81 livres 15 fols pour le produit de 5 fols.

Je multiplie par 4 fols en prenant le cinquiéme de 327 ; le cinquiéme de 32 eft 6, & il refte 2, qui avec le caractere fuivant 7 font 27 ; le cinquiéme de 27 eft 5, & il refte 2 à divifer par 5, ou $\frac{2}{5}$; or chaque cinquiéme vaut 4 fols, donc $\frac{2}{5}$ valent 8 fols ; ainfi j'ai 65 livres 8 fols pour le produit de 4 fols.

Pour multiplier par 4 deniers, je fuppofe que j'euffe à multiplier par 2 fols, qui eft le dixiéme d'une livre, & en ce cas j'aurois 32 livres $\frac{7}{10}$ ou 14 fols pour le produit de deux fols ; or 4 deniers font le fixiéme de 2 fols, donc je dois prendre le fixiéme de 32, mais ce fixiéme eft 5, & il refte 2 livres ou 40 fols, lefquels joints aux 14 fols font 54 fols, & le fixiéme de 54 fols eft 9 fols, donc j'ai 5 livres 9 fols pour le produit de 4 deniers.

Il refte encore les 3 pieds 6 pouces que j'ai negligé. Or puifque la toife coûte 3 livres 9 fols 4 deniers, 3 pieds qui font la moitié de la toife, ne doivent coûter que la moitié de 3 livres 9 fols 4 deniers. Je dis donc la moitié de 3 livres eft 1 livre, & il refte 1 livre ou 20 fols, lefquels joints aux 9 fols font 29 fols ; la moitié de 29 eft 14, & il refte 1 fol ou 12 deniers, lefquels joints aux 4 deniers font 16 deniers, & la moitié de 16 eft 8.

Six pouces font le fixiéme de 3 pieds ; car la valeur de chaque pied étant de 12 pouces, 3 pieds en valent 36, dont 6 eft le fixiéme. Je prends le fixiéme de ce que trois pieds m'ont rendu en difant : le fixiéme de 1 liv. eft zero de livres, & il refte une livre ou 20 fols, lefquels joints aux 14 fols font 34 fols ; le fixiéme de 34 eft 5 fols, & il refte 4 fols ou 48 deniers, lefquels joints aux 8 deniers font 56 ; le fixiéme de 56 eft 9 deniers, & il refte $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ que j'écris.

J'ajoute enfemble tous les produits que j'ai trouvé, & la fomme totale 1135 livres 12 fols 5 deniers $\frac{1}{3}$ eft la valeur des 327 toifes 3 pieds 6 pouces.

52. REMARQUE. J'ai dit au fujet des 4 deniers, qu'en fuppofant que j'euffe à multiplier par 2 fols, qui eft le dixiéme d'une livre, je n'avois qu'à retrancher le dernier caractere de 327, & que j'aurois 32 livres 14 fols pour le produit de 2 fols, c'eft-à-dire qu'il

faudroit doubler le dernier caractere 7 en le mettant au rang des sols, & cela pour les raisons que j'en ai apportées (*n.* 50.); or en voulant multiplier par 4 deniers, qui est le sixiéme de 2 sols, j'ai pris le sixiéme de 32 qui est 5, & il m'est resté 2 livres ou quatre dixaines de sols, lesquels jointes aux 14 ont fait 54 sols, dont j'ai pris le sixiéme, d'où l'on voit que j'ai doublé le reste 2 de même qu'il faut doubler le dernier caractere 7 du nombre 327. Or si l'on ne veut doubler ni le reste ni le dernier caractere, on n'a qu'à prendre le tiers au lieu du sixiéme, & dire le tiers de 27 sols est 9 sols; & la raison de cela, c'est que le tiers de 27, qui est la moitié de 54, est égal au sixiéme du tout de 54, & on fera de même dans tous les cas semblables, en prenant pour le reste & pour le dernier caractere une fraction dont le dénominateur ne feroit plus que la moitié du dénominateur de celle qu'on prenoit.

Ainsi si l'on vouloit multiplier par 2 deniers, qui sont le douziéme de 2 sols, on prendroit le douziéme de 32 qui est 2, & il resteroit 8, qui avec le dernier caractere 7 feroit 87, & au lieu d'en prendre le douziéme on en prendroit le sixiéme, en disant, le sixiéme de 8 est 1, & il reste 2, qui avec 7 font 27, le sixiéme de 27 est 4, & il reste 3 ou $\frac{3}{6}$, or chaque sixiéme de sol vaut 2 deniers, donc $\frac{3}{6}$ font 6 deniers; on auroit donc 2 livres 14 sols 6 deniers pour le produit de 2 deniers, & ainsi des autres.

IVe. **Exemple.** *A 3 livres 4 sols 3 deniers, combien valent 535 aunes $\frac{1}{4}$.*

535 aunes	$\frac{1}{4}$		
3 #	4 sols	3 den.	
1605			
107			
6	13	9	
0	16	0	$\frac{3}{4}$
1719 #	9 sols	9 den.	$\frac{3}{4}$.

Je néglige d'abord la fraction, & multipliant 535 par 3, j'ai 1605 livres.

4 sols étant la cinquiéme partie d'une livre, je prens le cinquiéme de 535, & j'ai 107 livres.

Pour multiplier par 3 deniers, je suppose que j'aye à multiplier par 2 sols, & en ce cas retranchant le dernier caractere de 535, j'aurois 53 liv. $\frac{5}{10}$, ou 10 sols pour le produit de 2 sols; or 3 deniers est le huitiéme de 2 sols; je prens donc le huitiéme de 53 livres qui est 6, & il reste 5 liv. qu'il faudroit doubler pour avoir 10 dixaines, lesquelles jointes au double 10 du dernier caractere feroient 110 dont il faudroit prendre le huitiéme, mais pour n'être pas obligé de doubler rien, je laisse subsister le reste 5, & le dernier caractere 5, ce qui ne fait plus que 55, c'est-à-dire la moitié de 110, & je prens non plus le huitiéme, mais le quart de 55,

parce que le quart de la moitié eſt égal au huitiéme du tout ; or le quart de 55 ſols eſt 13 ſols, & il reſte 3 ou $\frac{3}{4}$ qui valent 9 deniers, parce que chaque quart de ſols vaut 3 deniers ; j'ai donc 6 livres 13 ſols 9 deniers pour le produit de 3 deniers.

Il reſte à multiplier par le quart d'aune que j'ai negligé. Or la valeur d'une aune étant 3 liv. 4 ſols 3 deniers, la valeur d'un quart ne doit être que le quart de 3 livres 4 ſols 3 deniers ; je dis donc le quart de 3 livres eſt zero de livres, & il reſte 3 livres ou 60 ſols, leſquels joints aux 4 ſuivans font 64 ; le quart de 64 ſols eſt 16 ſols, le quart de 3 deniers eſt zero de deniers, & il reſte $\frac{3}{4}$ que j'écris.

J'ajoute enſemble tous les produits trouvés, & le produit total 1719 livres 9 ſols 9 deniers $\frac{3}{4}$ eſt la valeur des 535 aunes $\frac{3}{4}$.

De la Diviſion compoſée.

53. La diviſion compoſée ſeroit trop embarraſſante à faire par les parties aliquotes, ſur tout lorſque le dividende & le diviſeur ſeroient des nombres compoſés ; c'eſt pourquoi avant de faire l'operation on reduit tout aux moindres eſpeces, ainſi qu'on va voir dans les exemples ſuivans, qui ſerviront de preuves aux exemples de la multiplication compoſée que je viens de donner.

Ier. **Exemple.** *On a donné à un Ouvrier 1642 livres 10 ſols pour avoir fait 365 toiſes d'ouvrage, combien vaut la toiſe de cet ouvrage?*

1642 livres 10 ſols viennent d'avoir multiplié les 365 toiſes par le prix de la toiſe : donc ſi je diviſe le produit 1642 livres 10 ſols par le nombre à multiplier 365, le quotient ſera le multiplicateur ou la valeur de la toiſe qu'on demande (*N.* 28.).

Avant de faire la Diviſion, je réduis les livres en ſols, c'eſt-à-dire je multiplie 1642 par 20, à cauſe que chaque livre vaut 20 ſols, & j'ai 32840, auſquelles ajoutant les 10 ſols, la ſomme eſt 32850 ſols, & c'eſt le Dividende.

1642#	365
20 ſols	20
32840	7300 *Diviſeur.*
10	
32850 *Dividende.*	
7300	7300
32850 (4#	73000 (10 ſols
3650	00
20	0
73000 ſols	

Maintenant le dividende étant devenu 20 fois plus grand, à cauſe de cette multiplication, le quotient deviendroit 20 fois plus grand que ſi je n'avois pas augmenté le Di-

vidende; car le diviseur est d'autant plus contenu dans le dividende que ce dividende est plus grand, & par conséquent le quotient devient plus grand; c'est pourquoi je multiplie le diviseur par le même nombre 20 qui a multiplié le dividende; ainsi le dividende & le diviseur sont encore entr'eux comme si je ne les avois pas multiplié (*N.* 33.), & par conséquent le quotient doit être le même qu'il seroit si je n'avois fait aucune multiplication.

Le produit de 365 par 20 étant 7300, je divise 32850 par 7300, & le quotient est 4 livres, & il reste 3650 ou $\frac{3650}{7300}$ qui est une fraction de livre, & qui par conséquent est la même chose que 3650 livres à diviser par 7300; je reduis ces livres en sols, en multipliant par 20, ce qui donne 73000 sols, que je divise par le diviseur 7300, & le quotient est 10 sols; ainsi le prix de la toise est 4 livres 10 sols, & ceci est la preuve du premier exemple de la multiplication composée.

J'aurois pu me passer de multiplier le diviseur 365 par 20, & alors faisant la division, le quotient auroit contenu des sols, puisque le dividende auroit contenu des sols, & que le diviseur n'auroit pas été augmenté à proportion du dividende; ainsi j'aurois eu 90 sols; or pour réduire 90 sols en livres, il faut les diviser par 20, c'est-à-dire, chercher combien il y a de fois 20 sols ou 1 livre dans 90 sols, & par conséquent retranchant le dernier caractere 0, j'aurois pris la moitié de 9 qui est 4 liv. & il seroit resté 1 qui avec le 0 retranché auroit fait $\frac{10}{20}$ ou 10 sols, & j'aurois eu 4 livres 10 sols pour le prix de la toise; or quoique cette méthode soit plus abregée, cependant comme elle seroit embarrassante dans certains cas, j'ai mieux aimé donner la précédente qui convient à tous les cas, comme on verra dans les exemples suivans.

```
     365
   32850 ( 9.0 sols
   ----
    0000    4# 10
   ----
     0
```

54. Il faut remarquer en passant que lorsqu'on multiplie par un nombre dont le dernier caractere à droite est un zero, il faudroit multiplier tous les caracteres du nombre à multiplier par zero, & que par conséquent on auroit un rang de zeros comme on voit ici, après quoi il faudroit multiplier le nombre à multiplier 1642 par le second caractere 2 du multiplicateur, & écrire le produit par-dessous le rang des zeros, en commençant à écrire sous les dixaines;

```
 1642      1642
   20        20
 ----     -----
 0000     32840
3284
-----
32840
```

or pour abréger on n'écrit qu'un zero sous les unités, & à côté de ce zero on écrit le second produit 3284, ce qui donne le même produit total que si on avoit écrit le rang de zeros tout entier.

De même pour multiplier 1642 par le multiplicateur 200 qui a 2 zeros de droite à gauche, au lieu d'écrire un rang de zeros pour le premier zero, ensuite un second rang de zeros pour le second zero, ensuite un troisiéme rang pour le produit 3284, on écrira simplement deux zeros l'un sous les unités & l'autre sous les dixaines, & ensuite on écrira le produit 3284 à côté de ces zeros; c'est-à-dire, à commencer sous le rang des centaines, car par ce moyen le produit 3284 aura toujours sa même valeur, & le produit total sera toujours le même.

```
 1642      1642
  200       200
 ----    ------
 0000    328400
0000
3284
------
328400
```

II. Exemple. *535 toises d'ouvrage ont couté 3036 livres 2 sols 6 deniers, combien vaut la toise?*

Pour faire cette division, je reduis les livres en sols, en les multipliant par 20, ce qui fait 60720 sols, ausquels ajoutant les 2 sols, j'ai 60722 sols. Je reduis ces sols en deniers en les multipliant par 12, ce qui fait 728664 deniers, ausquels ajoutant les 6 deniers, la somme est 728670, & c'est le dividende.

```
  3036                 535
    20                  20
 -----               -----
 60720               10700
     2                  12
 -----               -----
 60722               21400
    12               10700
 ------              ------
121444               128400 Diviseur
60722
------
728664
     6
------
728670 Dividende
```

Or ce dividende ayant été multiplié par 20 & par 12, est devenu beaucoup plus grand qu'il ne faut par rapport au diviseur, & par conséquent le quotient deviendroit plus grand qu'il ne faut pour exprimer des livres, c'est pourquoi afin de conserver le rapport du dividende au diviseur, je multiplie aussi le diviseur par 20, & ensuite par 12, ce qui donne 128400.

```
128400               184000
728670 (5 #          1733400 (13 sols
------              --------
 86670                449400
    20               -------
-------                64200
1733400                   12
                      ------
                      128400
                      64200
                      ------
                      770400

128400
770400 (6 den.
------
000000
```

Je divise 728670 par 128400, & le quotient eſt 5 livres; car quoique j'ai réduit le nombre à multiplier en deniers, cependant comme j'ai multiplié le diviſeur par 20 & 12, c'eſt comme ſi je n'avois rien fait, & par conſéquent il doit me venir des livres au quotient, & la fraction reſtante $\frac{86670}{128400}$ eſt une fraction de livres.

J'évaluë cette fraction en multipliant ſon numérateur par 20, à cauſe que la livre contient 20 ſols (*N.* 40.), & je diviſe le produit 1733400 par le dénominateur 128400, & le quotient eſt 13 ſols & une fraction de ſols $\frac{64200}{128400}$.

J'évaluë cette ſeconde fraction en multipliant ſon numerateur par 12, à cauſe que le ſol contient 12 deniers, & je diviſe le produit 770400 par le dénominateur 128400, ce qui me donne 6 deniers, & il ne reſte rien. Ainſi la valeur de la toiſe eſt 5 livres 13 ſols 6 deniers, & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication compoſée.

III. Exemple. 327 *toiſes 3 pieds 6 pouces ont coûté* 1135 *livres* 12 *ſols* 5 *deniers* $\frac{1}{3}$, *ſur quel pied a-t'on payé la toiſe?*

Je reduis le dividende 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$ en ſols en multipliant les livres par 20, & le produit eſt 22700 ſols, auſquels ajoutant les 12 ſols, la ſomme eſt 22712 ſols; je reduis ces ſols en deniers en les multipliant par 12, & le produit eſt 272544 deniers, auſquels ajoutant les 5 deniers, la ſomme eſt 272549 deniers; enfin je reduis ces deniers en tiers en les multipliant par 3, & le produit eſt 817647, auquel ajoutant 1 tiers que j'ai, la ſomme eſt 817648 tiers de deniers.

Je réduis auſſi le diviſeur 327 toiſes 3 pieds 6 pouces en pieds, en multipliant 327 par 6 à cauſe que la toiſe contient 6 pieds, & le produit eſt 1962 pieds, auſquels ajoutant les 3 pieds, la ſomme eſt 1963 pieds; je réduis ces pieds en pouces, en les multipliant par 12, à cauſe que le pied contient 12 pouces, & le produit eſt 23580 auquel ajoutant les 6 pouces, la ſomme eſt 23586 pouces.

1135	
20	327
22700	6
12	1962
22712 *ſols*	3
12	1965 *pieds*
45424	12
22712	3930
272544	1965
5	23780
272549 *deniers*	6
3	23786 *pieds*
817647	20
1	471720
817748 *tiers*	3
6	1415160 *diviſeur*
4905888 *dividende*	

Le dividende & le diviseur sont donc réduits par là à leurs dernieres especes; mais afin de conserver le même rapport qu'ils avoient avant ces multiplications, je tâche de faire en sorte qu'ils se trouvent également multipliés par les mêmes nombres, & pour cela je multiplie les tiers de deniers par *6*, à cause que les 327 ont été multipliées par *6*, & je multiplie les pouces par 20 & par *3*, à cause que les 1135 livres ont été multipliées par 20 & par *3*, par ce moyen le dividende & le diviseur se trouvant multipliés l'un & l'autre par 20, 12, *6*, & *3*, sont entr'eux dans le même rapport que si on ne les avoit pas multipliés.

Ces multiplications faites, je divise le dividende 4905888 par le diviseur 1415160, & achevant le reste comme dans l'exemple précédent, je trouve 3 livres 9 sols 4 deniers pour le prix de la toise, & c'est la preuve du troisiéme exemple de la multiplication composée.

```
1415160
4905888 (3#
-------
 660408
     20
--------
13208160

 1415160
13208160(9 f.
--------
  471720
      12
--------
  943440
 471720
--------
 5660640

1415160
5660640(4 den.
-------
000000
```

IV. Exemple. *Un homme a acheté 535 aunes ¼ d'étoffe qui lui ont coûté 1719 livres 9 sols 9 deniers ¾, combien l'aune lui a-t'il coûté?*

Je réduis les livres en sols, les sols en deniers, & les deniers en quarts, ce qui donne 1650711 quarts de deniers, je réduits de même les aunes en quarts, ce qui donne 2141 quarts d'aunes.

```
1719# 9 sols 4 den.
     20
-------
  34380
      9
-------
  34389 sols
     12
-------
  68778
 34389
-------
 412668
      9
-------
 412677
      4
-------
1650708
      3
-------
1650711 quarts de den.

535 aunes ¼
  4
-----
 2140
    1
-----
 2141 quarts d'aune
   20
-----
42820
   12
-----
 85640
42820
------
513840 diviseur

 513840
1650711 (3#
-------
 109191
     20
-------
2183820

 513840
2183820 (4 f.
-------
 128460
     12
-------
 256920
128460
-------
1541520

 513840
1541520 (3 den.
-------
0000000
```

Or

Or comme les aunes n'ont été multipliées que par 4, tandis que les livres ont été multipliées par 20, par 12, & par 4; je multiplie les 2141 quarts d'aunes par 20 & par 12, afin que le dividende & le diviseur soient entr'eux dans le même rapport qu'ils étoient avant la multiplication, & par conséquent j'ai pour dividende 1650711, & pour diviseur 513840.

Je divise le dividende par le diviseur, & évaluant les fractions à l'ordinaire, je trouve 3 livres 4 sols 3 deniers pour la valeur de l'aune, & ceci est la preuve du quatriéme Exemple de la multiplication composée.

55. Ce seroit ici le lieu d'expliquer les autres opérations de l'Arithmétique, mais comme les démonstrations de ces régles dépendent des principes que je donnerai dans les Chapitres suivans, je n'en parlerai qu'en leur lieu, pour être plus court & en même tems plus clair.

CHAPITRE V.

De l'Algebre.

56. La difficulté, l'ennui, & souvent même l'impossibilité que l'on trouve à résoudre grand nombre de questions & de problêmes concernant les nombres, lorsqu'on veut se servir des régles ordinaires de l'Arithmetique, ont été cause qu'on a cherché une autre méthode, qui par les principes les plus simples nous mît en état de découvrir les vérités proposées sans fatiguer trop l'esprit. Cette méthode fut nommée par ses Auteurs *Arithmetique spécieuse* ou *Logistique spécieuse*; & comme elle ne rouloit que sur les nombres, les uns y employoient les chiffres ordinaires avec les lettres nommées *Majuscules* à l'exemple de *Diophante* d'Alexandrie, & les autres à l'imitation de *Viete* ne se servoient que des lettres majuscules. Les préceptes de cette science étoient extrêmement simples & très naturels; mais la maniere obscure dont on annonçoit la plûpart des choses, les dénominations barbares que l'on donnoit à certaines quantités, & les expressions embarrassantes que l'on y employoit la rendoit si dégoûtante, qu'il se trouvoit très-peu de personnes qui voulussent s'en accommoder. Dans la suite Mr. Descartes, non-seulement la délivra de tout ce qui la rendoit si hérissée en donnant des dénominations plus faciles,

des expressions plus courtes, & en substituant les petites lettres de l'alphabet au lieu des grandes; mais encore il la perfectionna, & l'étendit à la quantité continuë, qui est l'objet de la Géometrie. C'est cette méthode que l'on nomme aujourd'hui *Analyse* pour les raisons que nous dirons dans le chapitre suivant, où nous expliquerons ses préceptes, & la maniere de les mettre en usage.

57. *L'Algébre* est la science qui apprend à faire les opérations de l'Arithmetique sur les lettres de l'alphabet.

58. Les caracteres que l'on employe dans l'arithmetique ayant une valeur déterminée, il est sûr que si on veut les ajouter, les soustraire, les multiplier ou les diviser, on peut trouver d'autres caracteres qui représentent leur somme, ou leur reste, ou leur produit, ou leur quotient. Mais il n'en est pas de même des lettres de l'alphabet; car comme on peut supposer que la lettre *a* ou la lettre *b* représente un nombre tantôt plus grand, tantôt moindre, selon les differentes questions que l'on veut résoudre, on ne sçauroit dire qu'une troisiéme lettre *c*, ou *d* soit leur somme, ou leur reste, &c. Sans faire des suppositions qui seroient fort embarrassantes, sur tout lorsque le calcul viendroit un peu long. C'est pourquoi on a trouvé des signes qui d'un côté préviennent ces embarras, & qui de l'autre mettent tant de netteté dans les opérations, qu'après avoir resolu la question proposée, on voit d'un coup d'œil & le point d'où l'on est parti, & tous les pas que l'on a faits. Ces signes sont les suivans.

Des Signes de l'Algébre.

59. Le signe + signifie *plus*, & marque l'addition; $a+b$ fait voir que la grandeur exprimée par la lettre *b* est ajoutée à la grandeur exprimée par la lettre *a*.

60. Le signe — signifie *moins*, & marque la soustraction; $a-d$ signifie que la grandeur *d* est retranchée de la grandeur *a*.

61. Le signe × est la marque de la multiplication; $a\times b$ c'est la grandeur *a* multipliée par la grandeur *b*. Ordinairement on retranche ce signe, & l'on se contente de joindre ensemble les lettres que l'on veut multiplier. Ainsi *ab* signifie que *a* est multiplié par *b*.

62. Lorsqu'on écrit une ou plusieurs lettres au-dessus du signe — & une ou plusieurs lettres au dessous, cela signifie que ce qui est au-dessus est divisé par ce qui est en dessous. $\frac{a}{b}$ fait voir

que la grandeur a eſt diviſée par la grandeur b; $\frac{ab}{cd}$ ſignifie que le produit de a par b eſt diviſé par le produit de c par d; $\frac{a+d}{c-b}$ marque que la ſomme des deux quantités a, d eſt diviſée par c, duquel on a retranché b, ou par la difference de c à b; car cette difference n'eſt autre choſe que ce qui reſte après qu'on a retranché la grandeur b de la grandeur c.

63. Le ſigne $=$ ſignifie que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt égale à celle qui eſt à droite. $a=b$ marque que a eſt égal à b; $ab=cd$ ſignifie que le produit de a par b eſt égal au produit de la grandeur c par la grandeur d; $a+b=c+d$ marque que la ſomme des grandeurs a, b, eſt égale à la ſomme des grandeurs c, d, & ainſi des autres; on trouve dans quelques Auteurs le ſigne $\propto$ au lieu du ſigne $=$; mais ce dernier eſt aujourd'hui le plus uſité.

64. Quand une grandeur eſt égale à une autre, cela ſe nomme *Equation* ou *Egalité*: la grandeur qui eſt à gauche du ſigne $=$ ſe nomme premier *membre* de l'Equation, & celle qui eſt à gauche ſe nomme ſecond *membre*. Dans l'Equation $a=b$, la grandeur a eſt le premier membre, & la grandeur b eſt le ſecond; de même dans l'Equation $a+b=c-d$, la grandeur $a+b$ eſt le premier membre, & la grandeur $c-d$ eſt le ſecond, & ainſi des autres.

65. Le ſigne $>$ marque que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt plus grande que celle qui eſt à droite. $a>b$ ſignifie que a eſt plus grand que b; $a+b>e+f$ ſignifie que $a+b$ eſt plus grande que la ſomme des grandeurs e, f.

66. Le ſigne $<$ marque que la grandeur miſe à gauche eſt moindre que la grandeur miſe à droite. $a<b$ ſignifie que a eſt moindre que b.

67. Ce ſont là les ſignes les plus frequens dans l'Algébre; quand aux autres nous les expliquerons en leur lieu.

Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives.

68. Par le mot de *grandeur* en général on entend tout ce qui peut s'augmenter ou ſe diminuer, & qui par conſéquent a des parties. Il y en a de deux ſortes, l'une qu'on nomme *ſucceſſive*, parce que ſes parties ſe ſuccedent les unes aux autres ſans exiſter jamais toutes à la fois, comme la durée ou le tems, & l'autre qu'on nomme *permanente*, parce que ſes parties exiſtent en même tems. La grandeur *permanente* ſe diviſe encore en grandeur ou quantité *diſ-*

crete dont les parties ne ſont pas liées, telles que ſont les nombres, & tous les aſſemblages où la continuité & la liaiſon des parties ne ſont pas néceſſaires; & en grandeur ou quantité *continuë*, c'eſt-à-dire, dont les parties ont une étroite liaiſon, telles que ſont toutes les choſes materielles. Comme l'Algébre peut employer ſon calcul ſur ces differentes eſpeces de grandeurs, on a donné le nom de *grandeur* en général aux lettres dont elle ſe ſert.

69. La grandeur *complexe* eſt une grandeur compoſée de deux ou pluſieurs autres grandeurs, entre leſquelles ſe trouvent le ſigne + ou le ſigne —; ainſi $a+b$ eſt une grandeur complexe, de même que $a+c-d$. Mais ab quoique formée par le produit de deux lettres n'eſt pas une grandeur complexe, parce qu'il ne ſe trouve entr'elles ni le ſigne + ni le ſigne —.

70. La grandeur *incomplexe* eſt celle qui n'eſt pas liée avec une ou pluſieurs autres par le ſigne + ou par le ſigne —. Ainſi a eſt une grandeur incomplexe, & le produit ab l'eſt auſſi.

71. La grandeur *poſitive* ou *réelle* eſt une grandeur qui a le ſigne + ou qui n'en a point du tout, parce qu'alors on ſous-entend qu'elle a le ſigne +. Ordinairement la lettre qui commence une expreſſion algébrique n'a point de ſigne; ainſi l'on écrit $a+b$ au lieu de mettre $+a+b$; mais ſi cette premiere lettre avoit le ſigne —, alors il faudroit abſolument écrire $-a+b$; car ſi on ne mettoit pas ce ſigne —, on ſous-entendroit que la lettre a auroit le ſigne +, ce qui feroit faux.

72. La grandeur *négative* ou fauſſe eſt une grandeur qui a le ſigne —, & qu'on devroit appeller plutôt un défaut de grandeur. Un homme qui n'ayant rien doit 10 écus, eſt certainement au-deſſous du rien, puiſqu'il faudroit lui donner 10 écus pour payer ſa dette, & faire que ſon bien fût égal à zero; ainſi les 10 écus qu'il doit ſont une grandeur négative ou un défaut qui le mettent au-deſſous du rien. De même une longueur de 70 toiſes comparée à une grandeur de 80, eſt égale à 80 moins dix, c'eſt-à-dire qu'il faudroit lui donner 10 pour la rendre égale à 80 : donc ce 10 qu'elle n'a pas eſt pour elle une grandeur négative ou un défaut, & ainſi des autres. Au reſte, cette façon de parler n'eſt pas particuliere à l'Algébre ; car tous les jours dans les converſations on dit fort bien qu'un homme a 100 moins 2 ans, qu'un autre a 20 écus moins dix ſols, &c.

De l'Addition des grandeurs littérales.

73. Pour ajouter deux ou plusieurs grandeurs incomplexes, on les écrit de suite en mettant entr'elles les signes qu'elles ont; pour ajouter $+a$ avec $+b$, ou a avec b, on écrit $a+b$; pour ajouter les quatre grandeurs positives a, b, c, d, on écrit $a+b+c+d$; & pour ajouter les trois grandeurs $a, b, -d$, dont la derniere est négative, on écrit $a+b-d$, & non pas $+d$, parce qu'ajouter un défaut, c'est retrancher une grandeur positive: si j'ai 20 écus, & qu'on me charge d'une dette de 10, c'est comme si on me retranchoit 10 écus.

74. Si parmi les grandeurs incomplexes qu'on veut ajouter, il s'en trouve quelques-unes qui soient exprimées par une même lettre, & qui ayent le même signe, on n'écrit qu'une fois cette lettre, & l'on met à sa gauche le caractere arithmetique qui marque le nombre des grandeurs exprimées par la même lettre. Pour ajouter les grandeurs a, a, a, b, b, on écrit $3a+2b$, au lieu d'écrire $a+a+a+b+b$, & cela s'appelle *corriger l'expression*, c'est-à-dire la rendre plus simple & plus nette, ce qu'il ne faut jamais négliger, parce que la netteté des expressions partage moins l'attention de l'esprit, & contribuë à la netteté des idées.

Que si parmi les grandeurs exprimées par la même lettre, les unes avoient le signe + & les autres le signe —; on prendroit le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le signe +, & le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le signe —, & retranchant ce dernier nombre du premier, on écriroit une fois la lettre qui exprime l'une de ces grandeurs, & à gauche de cette lettre on mettroit le reste de la soustraction; ainsi pour ajouter les grandeurs $a, a, a, a, -a, -a$, on écriroit $-2a$; car les quatre premieres ayant le signe + feroient $4a$, ou $+4a$, & les deux autres ayant le signe — feroient $-2a$; or $4a-2a$, c'est la même chose que de retrancher $2a$ de $4a$, ce qui fait $+2a$, & par conséquent $4a-2a$ feroient $+2a$ ou simplement $2a$. Si j'ai 4 écus, & qu'on me charge d'une dette de 2 écus, je n'en aurai plus que 2.

Enfin si le nombre qui exprime combien il y a de grandeurs qui ont le signe +, & qui sont exprimées par la même lettre, est moindre que celui qui exprime combien il y en a qui ont le signe —, & qui sont exprimées aussi par la même lettre, on ne pourra retrancher ce second nombre du premier, mais on retranchera le premier du second, & on écrira le reste avec le signe —. Ainsi pour ajouter

les grandeurs $a, a, -a, -a, -a, -a$, les deux premieres ayant le signe $+$, feront $2a$ ou $+2a$, & les quatre dernieres ayant le signe $-$, feront $-4a$. Ainsi ajoutant $2a$ avec $-4a$ on auroit $2a - 4a$ ou $-2a$; car si j'ai 2 écus, & qu'on me charge d'une dette de 4, il est clair qu'après avoir donné les 2 écus que j'avois, je devrai encore 2 écus.

Il faut bien prendre garde à ces sortes de corrections, car autrement le calcul algébrique deviendroit embroüillé & embarrassant.

L'addition des grandeurs complexes se fait de même que l'addition des incomplexes, en observant ce qui vient d'être dit.

Pour ajouter $a+b$ avec $c+d$, on écrit $a+b+c+d$. De même pour ajouter $a+b$ avec $e+f$ on écrit $a+b+e-f$.

Pour ajouter $4a+2b+d$ avec $3a+3b+e$, on écrit les grandeurs exprimées par les mêmes lettres les unes sous les autres, ensuite on dit $4a$ & $3a$ font $7a$; $2b$ & $3b$ font $5b$, après quoi on écrit $+d+e$.

$$\begin{array}{l} 4a+2b+d \\ 3a+3b+e \\ \hline 7a+5b+d+e \end{array}$$

Pour ajouter $8a+5b+d$ avec $5a-2b-f$, on écrit les grandeurs marquées par les mêmes lettres les unes sous les autres, ensuite on dit $8a$ & $5a$ font $13a$; $5b$ moins $2b$ font $+3b$, après quoi on écrit $+d-f$.

$$\begin{array}{l} 8a+5b+d \\ 5a-2b-f \\ \hline 13a+3b+d-f \end{array}$$

Pour ajouter $5a+2b+f$ avec $-6a-3b-f$, on écrit les grandeurs de même nom les unes sous les autres, & l'on dit $5a$ moins $6a$ fait moins un a, ou $-a$; $2b-3b$ fait moins un b, ou $-b$; $f-f$ ne fait rien, parce qu'un de reçu & un de donné, il ne reste rien, ainsi la somme est $-a-b$, & de même des autres.

$$\begin{array}{l} 5a+2b+f \\ -6a-3b-f \\ \hline -a-b \end{array}$$

De la Soustraction des grandeurs littérales.

75. La soustraction des grandeurs littérales incomplexes se fait en changeant toujours le signe de la grandeur qui doit être soustraite.

Si l'on veut soustraire $+a$ de $+b$, on écrit $b-a$. Car si de 10 écus que j'ai on m'en retranche 4, il m'en restera $10-4$.

Pour soustraire $+c$ de $-d$, on écrit $-d-c$. Si je dois dix écus, & qu'on m'en retranche encore 5, ou qu'on m'en fasse devoir encore 5, il est clair que je devrai payer $10+5$, & que par

conséquent mon bien sera diminué non-seulement de 10, mais encore de 5.

Si l'on veut soustraire $-a$ de $+b$, on écrit $b+a$; car si tandis que j'ai 10 écus on me retranche une dette de 4 écus, ce qu'on ne peut faire qu'en me donnant ces 4 écus, on voit bien que j'aurai 14 écus ou 10 écus plus 4.

Pour soustraire $-a$ de $-b$, on écrit $+b+a$; car si je dois 10 écus, & que quelqu'un supprime une partie de cette dette, par exemple 4 écus, ce qu'il ne peut faire qu'en me donnant 4 écus, il est sûr que je devrai 10 d'un côté, mais que j'aurai 4 de l'autre, ainsi j'aurai $-10+4$.

76. La Soustraction des grandeurs complexes se fait de même que celle des grandeurs incomplexes, en observant ce que nous avons dit ci-dessus touchant la correction des expressions.

Pour soustraire $a+b$ de $c+d$, on écrit $c+d-a-b$. De même pour soustraire $a-c$ de $d-f$, on écrit $d-f-a+c$, & ainsi des autres.

Pour soustraire $2a+2b+c$, de $5a+4b+d$, on écrit les grandeurs marquées des mêmes lettres les unes sous les autres, ensuite on dit: de $5a$ ôtez $2a$, il reste $3a$; de $4b$ ôtez $2b$, il reste $2b$, & de d ôtez c, il reste $d-c$.

$$\begin{array}{l} 5a+4b+d \\ 2a+2b+c \\ \hline 3a+2b+d-c \end{array}$$

Pour soustraire $3a-4b-2d$; de $6a+2b-4d$, on dit: de $6a$ ôtez $3a$, il reste $3a$, de $2b$ ôtez $-4b$, il reste $6b$; car puisqu'il faut changer le signe $-$ en $+$, j'ai $2b+4b$ qui font $6b$; de $-4d$ ôtez $-2d$, il reste $-2d$; car puisqu'il faut changer le signe de $-2d$ en $+$, j'ai $-4d+2d$, mais $+2d$ effacent $-2d$ de $-4d$, à cause que $-$ & $+$ se détruisent, ainsi il reste $-2d$.

$$\begin{array}{l} 6a+2b-4d \\ 3a-4b-2d \\ \hline 3a+6b-2d \end{array}$$

Pour soustraire $6a+4b-3d$ de $4a+3b-2d$, on dit: de $4a$ ôtez $6a$, il reste $-2a$, car $4a-6a$ font la même chose que $-2a$, puisque dans $-6a$ il y a $-4a$ qui effacent $+4a$, & il reste $-2a$; de $3b$ ôtez $4b$, il reste $-b$, & de $-2d$ ôtez $-3d$, il reste $+d$; car puisqu'il faut changer le signe de $-3d$, j'ai $-2d+3d$; or dans $+3d$, il y a $2d$ qui effacent $-2d$, & il reste encore un d, & par conséquent j'ai $+d$, & ainsi des autres.

$$\begin{array}{l} 4a+3b-2d \\ 6a+4b-3d \\ \hline -2a-b+d \end{array}$$

De la Multiplication des grandeurs littérales.

77. Si les deux grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre ont toutes les deux le signe +, ou toutes les deux le signe —, le produit a toujours le signe +, & si l'une ayant le signe +, l'autre ayant le signe —, le produit a toujours le signe —, d'où l'on tire cette régle. *Plus par plus, ou moins par moins, donne plus, & plus par moins, ou moins par plus, donne moins.*

Demonstration. Nous avons dit (*N.* 11.) que dans la multiplication on doit prendre le nombre à multiplier autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Donc 1°. supposant que le nombre à multiplier soit a, & le multiplicateur b, & que l'un & l'autre soient positifs, il faudra prendre la grandeur positive a autant de fois que la grandeur positive b contiendra d'unités; c'est pourquoi si b contient 3 unités, le produit ab sera la grandeur positive $3a$, & par conséquent ab aura le signe plus. 2°. Si le nombre à multiplier a est positif, & le multiplicateur b est négatif, c'est-à-dire s'il est $-b$ ou -3, il faudra prendre la grandeur positive a, non pas 3 fois, mais -3 fois, parce que le multiplicateur ne contient pas 3 unités, mais -3 unités; ainsi le produit ab sera la même chose que la grandeur négative $-3a$, & son signe sera négatif: car prendre une grandeur -3 fois, c'est la soustraire 3 fois. 3°. Si le nombre à multiplier a est négatif, c'est-à-dire s'il est $-a$, & que le multiplicateur b soit positif, il faudra prendre le défaut $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités dans b ou 3; & par conséquent le produit ab sera la même chose que $-3a$, & son signe sera encore négatif. 4°. Enfin si a & b ont tous deux le signe moins, il faudra prendre le défaut $-a$, non pas 3 fois, mais -3 fois, à cause que b ou 3 ayant le signe moins, ne contient pas 3 unités, mais -3 unités. Or prendre -3 fois, c'est soustraire 3 fois, & soustraire 3 fois un défaut ou une dette, c'est donner 3 fois ce qu'il faut pour la réparer, puisqu'il n'est pas possible qu'on éteigne une dette que j'aurois, si on ne me donnoit ce qui est nécessaire pour la payer. Donc prendre -3 fois le défaut $-a$, c'est donner $3a$, & par conséquent le produit ab est la même chose que $3a$, & son signe est positif. Donc la régle que nous venons de donner est véritable.

78. La multiplication des grandeurs complexes se fait à peu près comme la multiplication des nombres, & l'on y observe les régles que nous venons de donner touchant les signes. En voici quelques exemples.

Ier. EXEMPLE. Pour multiplier $a+b$ par $a+c$, on écrit le multiplicateur $a+c$ ſous la grandeur à multiplier, & l'on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par $+a$ donne $+aa$; $+b$ par $+a$ donne $+ab$; enſuite on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le ſecond terme c du multiplicateur; $+a$ par $+c$ donne $+ac$, & $+b$ par $+c$ donne $+bc$; ainſi le produit eſt $aa+ab+ac+bc$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+c \\ \hline aa+ab+ac+bc \end{array}$$

II. EXEMPLE. Pour multiplier $a+b+c$ par $a+b+d$, j'écris le multiplicateur $a+b+d$ ſous la grandeur à multiplier $a+b+c$, & je multiplie d'abord tous les termes $a+b+c$ par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par $+a$ donne $+aa$; $+b$ par $+a$ donne $+ab$; & $+c$ par $+a$ donne $+ac$.

$$\begin{array}{llllllll} a+b+c \\ a+b+d \\ \hline aa & +ab & +ac \\ & +ab & & +bb & +bc \\ & & & & & +ad & +bd & +cd \\ \hline aa & +2ab & +ac & +bb & +bc & +ad & +bd & +cd \end{array}$$

Je multiplie tous les termes $a+b+c$ par le ſecond terme b du multiplicateur. $+a$ par $+b$ donne $+ab$, & comme j'ai déja un produit $+ab$, j'écris celui-ci ſous le premier, ce qu'il faut toujours obſerver lorſqu'il ſe trouve des produits qui ont les mêmes lettres; $+b$ par $+b$ donne $+bb$; & $+c$ par $+b$ donne $+bc$.

Enfin je multiplie de la même façon tous les termes $a+b+c$ par le troiſiéme terme d du multiplicateur, ce qui donne $+ad+bd+cd$, & corrigeant l'expreſſion, c'eſt-à-dire mettant $+2ab$ au lieu de $+ab+ab$, le produit eſt $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$.

III. EXEMPLE. Pour multiplier $a+b$ par $a-b$; je multiplie les termes $a+b$ par le premier terme a du multiplicateur, ce qui donne $aa+ab$. Je multiplie les mêmes termes par le ſecond terme $-b$ du multiplicateur, en diſant: $+a$ par $-b$ donne $-ab$ que j'écris ſous $+ab$, & $+b$ par $-b$ donne $-bb$. Je corrige l'expreſſion en effaçant $+ab-ab$, à cauſe que ces grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires, & le produit eſt $aa-bb$.

$$\begin{array}{lll} a+b \\ a-b \\ \hline aa & +ab \\ & -ab & -bb \\ \hline aa & & -bb \end{array}$$

IV. Exemple. Pour multiplier $a+b-c$ par $a-b+c$, je multiplie tous les termes $a+b-c$ par le premier terme a du multiplicateur, ce qui donne $aa+ab-ac$. Je multiplie les mêmes termes par le second terme $-b$ du multiplicateur, ce qui donne $-ab-bb+bc$ que j'écris en mettant $-ab$ sous $+ab$; je multiplie les mêmes termes par le troisiéme terme $+c$ du multiplicateur, ce qui donne $+ac+bc-cc$ que j'écris en mettant $+ac$ sous $-ac$, & $+bc$ sous $+bc$; je corrige l'expression en effaçant $+ab-ab$, & $-ac+ac$, parce que ces grandeurs se détruisent par des signes contraires, & en mettant $+2bc$ au lieu de $+bc+bc$; & le produit est $aa-bb+2bc-cc$.

$$\begin{array}{lll} a+b-c & & \\ a-b+c & & \\ \hline aa+ab-ac & & \\ \quad -ab & -bb+bc & \\ \quad\quad +ac & \quad +bc & -cc \\ \hline aa & -bb+2bc & -cc \end{array}$$

79. *Remarque*. Il faut prendre garde que dans les produits de deux ou plusieurs lettres, chaque lettre conserve sa valeur, soit qu'elle soit mise ou après les autres, ou entre deux; ainsi ab ou ba sont la même chose: de même abc, bac, bca, cab, cba ont toujours la même valeur. De même $ab+bc$, ou $bc+ab$ ne sont pas différens; & en ceci l'Algébre différe beaucoup de l'Arithmetique, dont on ne sçauroit déranger aucun caractére sans changer sa valeur.

De la Division des grandeurs littérales.

80. Il en est des signes + & — à l'égard de la division, de même qu'à l'égard de la multiplication; c'est-à-dire que si l'on divise + par + ou — par —, le quotient a le signe +; & si l'on divise + par —, ou — par +, le quotient a le signe —.

Demonstration. Supposons que le dividende soit 6, & le diviseur 2. 1°. Si l'un & l'autre ont le signe +, le dividende 6 contiendra positivement le diviseur 2, trois fois, ainsi le quotient 3 aura le signe +. 2°. Si l'un & l'autre ont le signe —, le défaut -6 contiendra positivement 3 fois le défaut -2; & par conséquent le quotient 3 aura encore le signe +. 3°. Si le dividende est -6 & le diviseur $+2$, le défaut -6 ne contiendra pas 3 fois la grandeur positive, mais trois fois le défaut de 2, ainsi le quotient 3 aura le signe —. 4°. Si le dividende est $+6$, & le diviseur -2, la grandeur positive 6 ne contiendra pas trois fois le dé-

faut — 2, mais trois fois son contraire ou la grandeur positive 2, donc le quotient 3 aura le signe —.

Et pour être encore plus convaincu de ceci, il n'y a qu'à observer que le diviseur étant exact dans la supposition que nous venons de faire, il faut nécessairement que le produit du diviseur par le quotient soit égal au dividende (*N. 29.*). Or cela ne sçauroit être si le quotient n'avoit pas le signe que notre régle lui donne; car dans le premier cas si le quotient étoit — 3, le produit de — 3 par le diviseur + 2 donne — 6, au lieu que le dividende est + 6. Dans le second cas, si le quotient étoit — 3, le produit de — 3 par le diviseur — 2 donne + 6, au lieu que le dividende est — 6. Dans le troisiéme cas, si le quotient étoit + 3 par le diviseur, + 2 donneroit + 6 & non pas — 6. Enfin dans le troisiéme cas, si le quotient étoit + 3, le produit de + 3 par le diviseur — 2 donneroit — 6 au lieu de + 6.

81. La même chose arriveroit encore si le diviseur n'étoit pas exact. Supposons que le dividende soit 7 & le diviseur 2, le quotient sera 3 avec un reste 1. Or si 7 & 2 sont positifs, le quotient doit être positif, parce que + 3 par + 2 font plus 6, lequel ajouté au reste 1 fait + 7 égal au dividende 7. Si 7 & 2 sont négatifs, le quotient sera positif; car + 3 par — 2 fait — 6, lequel ajouté au reste — 1, qui est négatif, puisque c'est le reste de — 7, la somme est — 7 égale au dividende — 7. Si 7 est négatif, & 2 est positif, le quotient doit avoir —, parce que — 3 par + 2 fait — 6, lequel ajouté au reste 1 qui est encore négatif, à cause que c'est le reste de — 7, la somme est — 7 égale au dividende: enfin si 7 est positif & 2 est négatif, le quotient doit être négatif, à cause que — 3 par — 2 fait + 6, lequel étant ajouté au reste 1 qui est positif, puisque c'est le reste de + 7, donne la somme + 7 égale au dividende.

82. Pour diviser $+a$ par $+b$, ou $-a$ par $-b$, on écrira $+\frac{a}{b}$; ou $\frac{a}{b}$, & pour diviser $-a$ par $+b$, ou $+a$ par $-b$, on écrira $-\frac{a}{b}$.

83. Si le dividende & le diviseur étoient exprimés par une même lettre a, on écriroit $+1$ au lieu de $\frac{a}{a}$, ou -1 au lieu de $-\frac{a}{a}$; car le quotient 1 multiplié par le diviseur $+a$ donne le dividende a, & le même quotient 1 multiplié par le diviseur $-a$ donne le dividende $-a$. De même le quotient -1 multiplié par le

diviseur $-a$, donne le dividende $+a$, & le quotient -1 multiplié par le diviseur $+a$, donne le dividende $-a$.

Pour marquer la division de ab par b, au lieu d'écrire $\frac{ab}{b}$ on écrira simplement a, parce que le quotient a multiplié par b donne le dividende ab, par la même raison, au lieu d'écrire $\frac{aac}{aa}$ on écrira c; au lieu d'écrire $\frac{acb}{cb}$ on écrit a, & ainsi des autres; d'où l'on voit que *quand il y a des grandeurs marquées par les mêmes lettres au dividende & au diviseur, il faut les effacer en même nombre de fois de part & d'autre*, & c'est une regle qu'il faut observer pour abréger les expressions. Ainsi au lieu de $\frac{aabbc}{abc}$ on écrira ab : au lieu de $\frac{abc}{abd}$ on écrira $\frac{c}{d}$; au lieu de $\frac{aabbcdef}{abbcde}$ on écrira af, ce qui, comme on voit, abrége beaucoup, & donne plus de clarté.

84. S'il y avoit des nombres à gauche du dividende & du diviseur, on diviseroit ces deux nombres à la façon ordinaire, & l'on mettroit le quotient à gauche du quotient littéral. Pour abréger l'expression $\frac{6aabbcd}{3abcd}$ on diviseroit 6 par 3, ce qui donne 2, & l'on écriroit $2ab$: pour abréger l'expression $\frac{9acccd}{3acce}$, on écriroit $\frac{3acd}{e}$, & ainsi des autres.

Mais si la division des chiffres ne pouvoit se faire exactement, on les laisseroit subsister; on écriroit donc $\frac{7aab}{3a}$, au lieu de $\frac{7aaab}{3a}$, &c.

85. La division des grandeurs complexes se fait à peu près comme la division ordinaire, & l'on y observe les régles que nous avons données touchant les signes $+$, & en voici quelques exemples qui serviront de preuve à ceux que nous avons donné touchant la multiplication des grandeurs complexes.

Ier. EXEMPLE. Pour diviser $aa+ab+ac+bc$ par $a+c$, je mene une ligne sous le dividende, & une autre à droite pour y placer le quotient, ensuite j'écris le diviseur $a+c$ sous le dividende, en mettant ses termes sous ceux du dividende qui ont les mêmes lettres. Je dis donc aa divisé

aa	$+ab$	$+ac$	$+bc$	($a+b$
a		$+c$		
	$+ab$		$+bc$	
	a		$+c$	
	0		0	

par $+a$ donne au quotient a (*N.* 82.) je multiplie les caractéres du quotient par le diviſeur, & je retranche le produit du dividende en diſant : $+a$ par $+a$ donne $+aa$, & de $+aa$ ôtez $+aa$, il ne reſte rien, & je mets un point ſur le terme aa du dividende, pour marquer qu'il a été diviſé ; $+a$ par $+c$ fait $+ac$, & du terme $+ac$ du dividende ôtez le produit $+ac$, il ne reſte rien, & je marque un point ſur ac.

Je mene une ligne ſous $a+c$, & abaiſſant les deux termes $+ab+ac$ du dividende qui n'ont pas été diviſés, j'écris ſous eux le diviſeur $a+c$, & je dis $+ab$ diviſé par $+a$ donne au quotient $+b$, je multiplie ce quotient par $a+c$, & retranchant le produit $ab+bc$ des termes $ab+bc$ du dividende, il ne reſte rien : ainſi le quotient eſt $a+b$, & c'eſt la preuve du premier exemple de la multiplication des grandeurs complexes; car notre dividende étoit le produit dans cet exemple, & notre diviſeur étoit le multiplicateur, & par conſéquent notre quotient $a+b$ a dû être le nombre à multiplier.

II. EXEMPLE.

$$\dot{a}\dot{a}+2\dot{a}\dot{b}+\dot{a}\dot{c}+\dot{b}\dot{b}+\dot{b}\dot{c}+ad+bd+c\dot{d}\,(\,a+b+d$$

$$a+b+c$$

$$+ab \qquad +bb+bc$$

$$a \qquad +b+c$$

$$+ad+bd+cd$$

$$+a+b+c$$

$$o \quad o \quad o$$

Pour diviſer $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$ par $a+b+c$, j'écris le dividende & le diviſeur comme dans l'Exemple précédent, enſuite je dis aa diviſé par $+a$ donne a au quotient; je multiplie les termes $a+b+c$ du diviſeur par le quotient, & j'ai a par $+a$ donne aa, & du terme aa du dividende retranchant aa, il ne reſte rien. a par $+b$ donne ab, & de $+2ab$ retranchant ab, il reſte ab que j'écris au-deſſous, en mettant un point ſur $2ab$ de même que ſur aa, pour marquer qu'ils ont été diviſés, ce qui doit toujours être obſervé; a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ retranchant $+ac$, il ne reſte rien.

J'abbaiſſe les termes $bb+bc$ du dividende, & j'écris par-deſſous le diviſeur $a+b+c$, puis je dis $+ab$ diviſé par a donne au

quotient $+b$, & multipliant ce quotient par le diviſeur, & retranchant le produit des termes $ab+bb+bc$, il ne reſte rien; j'abbaiſſe les trois derniers termes $ad+db+cd$, & écrivant le diviſeur $a+b+c$, je trouve au quotient $+d$, & achevant le reſte de la même façon, il ne reſte rien; ainſi le quotient total eſt $a+b+d$, & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication des grandeurs complexes.

86. *Remarque.* Il arrive ſouvent que la diviſion ſemble ne pouvoir pas ſe faire, parce qu'il manque au diviſeur des termes qui contiennent quelqu'un des termes du diviſeur, lorſqu'il ſe trouve multiplié par le quotient; cependant il y a bien des cas où la diviſion devient poſſible, en donnant au dividende la grandeur qui lui manque une fois ſous le ſigne $+$, & une autre fois ſous le ſigne $-$, ce qui eſt la même choſe que ſi on ne lui donnoit rien: les deux exemples ſuivans feront mieux comprendre ceci.

$$\begin{array}{l} \dot{a}a-\dot{b}b\ (a+b \\ \underline{a-b} \\ +\dot{a}b-bb \\ \underline{\quad a-b} \\ \quad o \quad o \end{array}$$

III. Exemple. Pour diviſer $aa-bb$ par $a-b$, je dis aa diviſé par $+a$ donne $+a$ au quotient. Je multiplie le diviſeur par ce quotient, en diſant: a par $+a$ donne $+aa$, & du terme aa du dividende ôtant $+aa$ il ne reſte rien. a par $-b$ donne $-ab$; or il n'y a point de terme dans le dividende qui contienne le produit ab; ainſi il ſemble que la diviſion ne puiſſe pas ſe faire; cependant voici comme je m'y prens. Je ſuppoſe que le dividende outre les termes $aa-bb$ contient encore les termes $+ab-ab$, ce qui ne l'augmente ni le diminue, puiſque $+ab-ab$ n'eſt rien; & je dis: du produit $-ab$ du dividende ôtant le produit $-ab$ du quotient par le caractere $-b$ du diviſeur, il ne reſte rien. J'abbaiſſe les deux termes $+ab-bb$ du dividende, & écrivant le diviſeur par deſſous, je dis: $+ab$ diviſé par a donne b au quotient, multipliant donc ce quotient par le diviſeur $a-b$, j'ai $ab-bb$ qui ôté de $ab-bb$ ne laiſſe rien; ainſi le quotient total eſt $a+b$, & c'eſt la preuve du troiſiéme exemple de la multiplication.

IV. Exemple. Pour diviſer $aa-bb+2bc-cc$ par $a-b+c$; je dis aa diviſé par $+a$ donne au quotient $+a$, & multipliant ce diviſeur par ce quotient, j'aurai aa, qui retranché de aa ne laiſſe rien; a par $-b$ donne $-ab$, & de $-ab$ que je ſuppoſe être au dividende il ne reſte rien; mais à cauſe que j'ai ſuppoſé au dividende $-ab$, ce qui n'eſt pas vrai, j'écris $+ab$ au-deſſous, ainſi $+$;

$ab - ab$ que je donne au dividende ne l'augmentent ni ne le diminuent. a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ que je suppose au dividende, ôtant $+ac$, il ne reste rien ; mais j'écris $-ac$ par-dessous, afin de corriger ma supposition.

$$\begin{array}{l} aa - bb + 2bc - cc \ (a + b - c \\ a - b + c \\ \hline \quad + ab - ac - bb + 2bc \\ \quad\ \ a \qquad\quad - b + c \\ \hline \qquad\quad - ac \quad + bc - cc \\ \qquad\quad\ \ a \qquad - b + c \\ \hline \qquad\quad\ \ 0 \qquad\ \ 0 \quad 0 \end{array}$$

J'abbaisse les termes $-bb + 2bc$ du dividende à côté de $+ab - ac$, & j'écris le diviseur par dessous en disant : ab divisé par $+a$, donne b au quotient ; je multiplie ce quotient par le diviseur, b par $+a$ donne ab, qui retranché de ab ne laisse rien, b par $-b$ donne $-bb$, & de $-bb$ ôtez $-bb$, il ne reste rien ; b par $+c$ donne $+bc$, & de $+2bc$ ôtez bc, il reste bc que j'écris au-dessous.

J'abaisse les termes restans $-ac$ $-cc$ du dividende, & écrivant le diviseur par dessous, il me vient $-c$ au quotient, j'acheve le reste à l'ordinaire, & le quotient total est $a + b - c$. C'est la preuve du quatriéme exemple de la multiplication.

87. Si par le moyen de ces sortes de suppositions la division ne pouvoit pas se faire, on écriroit le diviseur sous le dividende, de même qu'on fait pour les fractions.

Des Puissances des grandeurs incomplexes.

88. On appelle *puissances* d'une grandeur, les différens degrés par lesquels elle s'éléve en se multipliant elle-même successivement 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. à l'infini : les anciens appelloient premiere *puissance* d'une grandeur, le produit de cette grandeur multipliée par elle-même, c'est à dire son quarré ; mais aujourd'hui on appelle premiere puissance la grandeur prise en elle-même. Ainsi a est la premiere puissance de a ; multipliant a par a, le produit aa est la seconde puissance ou le *quarré* de a ; multipliant aa par a, le produit aaa est la troisiéme puissance ou le cube de a ; & ainsi de suite : de sorte que $aaaa$ est la quatriéme puissance, $aaaaa$ est la cinquiéme puissance, &c. ce que l'on peut continuer à l'infini.

89. La grandeur a est la racine de toutes ses puissances ; c'est-à-dire a est la racine quarrée de sa seconde puissance ou de son

quarré *aa*, il est la racine troisiéme de sa troisiéme puissance ou de son cube *aaa*; la racine quatriéme de sa quatriéme puissance *aaaa*, &c.

90. Pour abréger l'expression de ces puissances, on n'écrit qu'une fois la lettre avec un petit chiffre à droite un peu élevé, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite; ainsi au lieu de *aa*, *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, &c. on écrit a^2, a^3, a^4, a^5, &c. ce qui signifie *a* élevé au quarré, au cube ou à la troisiéme puissance, à la quatriéme, à la cinquiéme, &c. ces chiffres se nomment *exposants*, parce qu'ils marquent à quel degré la grandeur est élevée.

91. Il ne faut pas confondre ces *exposants* avec les chiffres qui se trouvent quelquefois à gauche d'une grandeur algébrique: Ceux-ci se nomment *coëfficients*, & marquent une addition réïterée de la grandeur qui est à leur droite: au lieu que les *exposants* marquent la multiplication réïterée de la grandeur par elle-même, ce qui est bien différent. Par exemple si *a* vaut 3, l'expression 4*a* marquera que *a* doit être pris 4 fois, ce qui fait 12, & au contraire a^4 marquera que *a* doit être multiplié par lui-même pour faire *aa* ou a^2, ce qui fait d'abord 9, qu'ensuite a^2 doit être multiplié par *a*, ce qui fait *aaa* ou a^3, & par conséquent 27; & enfin que a^3 doit être multiplié encore par *a*, ce qui donne *aaaa* ou a^4; & par conséquent 81 qui est différent de 12 ou de 4*a*.

Des Puissances des grandeurs complexes.

92. Les grandeurs complexes prennent différens noms selon qu'elles ont plus ou moins de termes; on les nomme *binomes* lorsqu'elles ont deux termes; *trinomes* quand elles en ont trois; *quadrinomes* quand elles en ont quatre, &c. & en général on les nomme *multinomes*, $a+b$ est un binome; $c+d+e$ est un trinome, &c.

93. De même qu'on peut élever les grandeurs incomplexes à la seconde puissance, à la troisiéme, à la quatriéme, &c. on peut élever aussi les grandeurs complexes aux mêmes puissances; & ces grandeurs venant à se multiplier elles-mêmes, donnent des produits qui ont toujours plus de termes qu'elles, & dont il est bon de connoître la formation.

Pour cela, prenons un binome dont nous ferons successivement les puissances, après quoi ce qui arrivera dans ces différentes multiplications, nous fera juger aisément de ce qui doit arriver aux termes des trinomes, quadrinomes, &c.

94. Soit

94. Soit donc le binome $a+b$, je le multiplie par lui-même, ce qui me donne le quarré $aa+2ab+bb$; je multiplie ce quarré par $a+b$, & j'ai le cube $a^3+3a^2b+3abb+b^3$; je multiplie ce cube par $a+b$, ce qui donne la quatriéme puissance $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, & continuant de la même façon, je trouve les autres puissances de $a+b$ telles qu'on les voit dans la table suivante qu'on nomme Table des puissances.

Table des Puissances d'un Binome.

1re. *Puissance.*	a	b				
2e.	a^2	$2ab$	bb			
3e.	a^3	$3a^2b$	$3abb$	b^3		
4e.	a^4	$4a^3b$	$6a^2bb$	$4ab^3$	b^4	
5e.	a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5

Cette Table contient deux sortes de rangs : les uns qui vont de gauche à droite, & qui contiennent les puissances de $a+b$, & les autres qui vont de haut en bas; & les cellules de tous ces rangs sont remplies de différens produits qui ont tous leurs *coëfficients*, ou des nombres à leur gauche; car ceux qui n'en ont point sont censés avoir l'unité pour coëfficient, puisque b^3 ou b^4 est la même chose que $1b^3$ ou $1b^4$.

Si nous ne faisons attention qu'aux produits littéraux, nous trouverons que les cellules de chaque rang de gauche à droite contiennent les puissances du premier terme a, lesquelles vont en diminuant jusqu'à la derniere cellule où le terme a ne se trouve point; & qu'au contraire les puissances de b vont en augmentant dans ces mêmes cellules, depuis la seconde où b est à la premiere puissance, jusqu'à la derniere où b se trouve élevé à la même puissance que a est dans la premiere cellule.

Pour sçavoir comment se forment les coëfficients, il n'y a qu'à examiner 1°. que dans le premier rang à gauche qui va de haut en bas, les puissances de a qui se trouvent dans ses cellules, n'ont d'autre coëfficient que l'unité. 2°. Que dans le second rang de haut en bas, les coëfficients qui se trouvent dans ses cellules sont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. 3°. Que dans le troisiéme du haut en bas les coëfficients des produits litteraux sont les sommes successives des coëfficients du rang de haut en bas qui est à

gauche, ou qui précéde celui-ci. Ainsi les coëfficients du rang précédent étant 1, 2, 3, 4 & 5, on trouve que le coëfficient de la premiere cellule du troisiéme rang est 1, que le coëfficient de la seconde est 3, c'est-à-dire la somme des coëfficients 1, 2, du rang précédent; que le coëfficient de la troisiéme cellule est 6, c'est-à-dire la somme des coëfficients 1, 2, 3, du rang précédent, & ainsi de suite. 4°. On trouvera de même que les coëfficients du 4e. rang du haut en bas, sont les sommes successives des coëfficiens du 3e. rang, & ainsi des autres. De sorte que pour avoir le coëfficient d'une cellule quelconque de l'un de ces rangs, par exemple le coëfficient 6 de la troisiéme cellule du troisiéme rang du haut en bas, on n'a qu'à prendre le coëfficient 3 de la cellule qui lui est superieure, & l'ajouter au coëfficient 3 de la cellule qui est à gauche de celle-ci, ce qui fera le coëfficient 6 que l'on cherche; car le coëfficient 3 de la cellule superieure étant la somme des coëfficients 1 & 2 du rang précédent, si on ajoute à cette somme le coëfficient 3 du rang à gauche, la somme 6 sera la somme des coëfficients 1, 2, 3, du rang précédent, & par conséquent elle sera le coëfficient demandé.

Par le moyen de ceci on peut continuer la table à l'infini, sans être obligé de faire les multiplications qu'il faudroit faire pour avoir les puissances que cette table ne contient pas; par exemple pour avoir la sixiéme puissance de $a+b$, je fais un sixiéme rang de gauche à droite, & je mets dans ses six premieres cellules a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a; & en commençant depuis la seconde jusqu'à la septiéme, je mets b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6; ainsi j'aurai déja tous les produits litteraux a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, & il ne reste plus que les coëfficients; & pour cela je mets dans la seconde cellule le coëfficient 6, parce que cette cellule se trouvera dans le second rang du haut en bas, qui comprend les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Dans la troisiéme je mets la somme 15 du coëfficient 10 de la cellule de la cinquiéme puissance qui sera au-dessus de ma troisiéme, & du coëfficient 5 de la cellule du cinquiéme rang qui est à gauche de celle qui a le coëfficient 10, & continuant de la même façon, j'aurai $a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$, qui sera la sixiéme puissance de $a+b$, & ainsi des autres.

95. Si le second terme b avoit le signe — au lieu du signe $+$, les puissances du binome $a-b$ seroient les mêmes que celles du binome $a+b$, à l'exception que leurs termes auroient alternati-

vement le ſigne + & le ſigne —. Ainſi le quarré de $a - b$ ſeroit $aa - 2ab + bb$, ſon cube ſeroit $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, & de même des autres.

96. La table des puiſſances que nous venons de donner, nous fait donc voir 1°. *Que le quarré du binome* a + b *contient le quarré* aa *de ſon premier terme* a, *deux produits du premier terme* a *par le ſecond* b, *ou le double du premier terme* a *multiplié par le ſecond* b, *& le quarré* bb *du ſecond.* 2°. *Que le cube de* a + b *contient le cube* a³ *du premier terme* a, *trois quarrés du premier par le ſecond, trois fois le premier multiplié par le quarré du ſecond & le cube du ſecond.* Et il eſt facile d'examiner de la même façon quels ſont les produits contenus dans les autres puiſſances.

97. Maintenant pour ſçavoir ce qui arriveroit à un multinome de quelque nombre de termes qu'il fût, prenons un trinome $a + b + c$, & concevons que ſes deux premiers termes $a + b$ n'en faſſent qu'un, ce qui pourroit arriver aiſément ſi nous mettions leur valeur en nombre, & que nous fiſſions la ſomme des deux. Ainſi ce trinome n'eſt plus qu'un binome, dont le premier terme eſt $a + b$, & le ſecond eſt c. Donc le quarré de ce binome contient le quarré de ſon premier terme $a + b$, le double de ce terme multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond. Mais le premier terme $a + b$ étant lui-même un binome, ſon quarré contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, & le quarré de b. Donc le quarré du trinome $a + b + c$ contient le quarré du premier terme a, le double du premier par le ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers par le troiſiéme & le quarré du troiſiéme.

De même ſi nous conſiderons le quadrinome $a + b + c + d$, comme un binome, dont le premier terme eſt $a + b + c$, & le ſecond eſt d, le quarré de ce binome contient le quarré du premier terme $a + b + c$, le double de celui-ci multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond; mais le premier terme $a + b + c$ étant lui-même un trinome, contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, le quarré de b, le double de $a + b$ multiplié par c, & le quarré de c. Donc le quarré du quadrinome $a + b + c + d$ contient le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme, le quarré du troiſiéme, le double des trois premiers multiplié par le quatriéme, & le quarré du quatriéme; & en faiſant le même raiſonnement à l'égard d'un

multinome de 5 termes, de 6, de 7, &c. on aura la régle générale ou le Théoreme suivant.

98. THEOREME. *Le quarré d'un multinome quelconque contient le quarré de son premier terme : le double du premier multiplié par le second, le quarré du second : le double des deux premiers multiplié par le troisiéme, le quarré du troisiéme : le double des trois premiers multiplié par le quatriéme, le quarré du quatriéme ;* & ainsi de suite.

99. Pour trouver les produits que contiennent les cubes des trinomes, quadrinomes, prenons le trinome $a+b+c$, & considerons-le comme un binome dont le premier terme est $a+b$, & le second est c, le cube de ce binome contiendra le cube du premier terme $a+b$, trois quarrés de ce premier terme multipliés par le second c, trois quarrés du second multipliés par le premier, & le cube du second (*N.* 94.). Or le premier terme $a+b$ étant lui-même un binome, contient le cube de a, trois quarrés de a multipliés par b, trois quarrés de b multipliés par a, & le cube de b. Donc le cube du trinome $a+b+c$ contient le cube du premier terme : trois quarrés du premier multipliés par le second : trois quarrés du second multipliés par le premier, le cube du second : trois quarrés de la somme des deux premiers multipliés par le troisiéme : trois quarrés du troisiéme multipliés par la somme des deux premiers, & le cube du troisiéme. Et faisant les mêmes observations sur un quadrinome, un quinquinome, &c. on aura la regle générale ou le Théoreme suivant.

100. THEOREME. *Le cube d'un multinome quelconque contient le cube du premier terme, trois quarrés du premier multipliés par le second, trois quarrés du second multipliés par le premier : le cube du second, trois quarrés de la somme des deux premiers, multipliés par le troisiéme, trois quarrés du troisiéme multipliés par la somme des deux premiers : le cube du troisiéme, trois quarrés de la somme des trois premiers, multipliés par le quatriéme, trois quarrés du quatriéme multipliés par la somme des trois premiers : le cube du quatriéme, &c.* ainsi de suite.

101. On peut de la même façon trouver quels sont les termes contenus dans les puissances quatriémes, cinquiémes, sixiémes, &c. des multinomes qui ont plus de deux termes.

De l'Extraction des Racines des grandeurs littérales.

102. *Extraire la Racine* d'une grandeur, c'est chercher le nombre qui, en se multipliant une ou plusieurs fois, a produit cette

grandeur. La racine d'un quarré, ou la racine quarrée, est le nombre qui, en se multipliant une fois, a produit le quarré. La racine d'un cube, ou la racine cubique, ou la racine troisiéme, est le nombre qui, en se multipliant deux fois successivement, a produit le cube : la racine quatriéme est le nombre qui, en se multipliant trois fois successivement, a produit la quatriéme puissance, &c.

103. Quand la grandeur dont on veut extraire une racine quelconque, est une grandeur incomplexe, on connoît aisément si la racine qu'on cherche peut s'extraire, ou si elle ne le peut pas. Par exemple il est évident que la racine quarrée de aa est a, que la racine quarrée de $aabb$ est ab ; que la racine cubique de aaa ou a^3 est a, que celle de a^3c^3 est ac, & ainsi des autres. Au contraire on voit bien que la racine quarrée ou cubique de ac ne peut s'extraire non plus que celle de a, de bd, &c.

104. Quand on ne peut pas extraire la racine d'une grandeur, on écrit à gauche de cette grandeur le signe $\surd$, qu'on nomme le signe radical, & l'on met au-dessus le nombre qui marque le dégré de cette racine : $\sqrt[2]{a}$ ou simplement $\sqrt{a}$, est la racine quarrée de a ; $\sqrt[3]{b}$ est la racine cubique ou troisiéme de b ; $\sqrt[4]{ac}$ est la racine quatriéme de ac ; ces sortes de racines se nomment *sourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommensurables*, parce qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelqu'autre grandeur connuë que ce soit.

105. Quand la grandeur simple dont on veut extraire une racine quelconque est une fraction, on extrait la racine du numérateur, & celle du dénominateur, & l'on en fait une nouvelle fraction, qui est la racine cherchée. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ est $\frac{a}{b}$, la racine cubique de $\frac{c^3}{d^3}$ est $\frac{c}{d}$, celle de $\frac{a^3c^3}{b^3}$ est $\frac{ac}{b}$, la racine quatriéme de $\frac{a^4b^4}{c^4b^4}$ est $\frac{ab}{cd}$. La racine quarrée de $\frac{ac}{db}$, est $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{ab}}$ ou simplement $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}}$, ou encore $\sqrt{\frac{ac}{ab}}$, en faisant en sorte que la jambe du signe radical embrasse le numérateur & le dénominateur. La racine cubique de $\frac{abc}{df}$ est $\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{df}}$, ou $\sqrt[3]{\frac{abc}{df}}$, &c.

106. Les racines des grandeurs complexes se tirent par le moyen de la table que nous avons donnée ci-devant. En voici quelques exemples.

Ier. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de $cc+2cd+dd$ je tire une ligne sous cette grandeur, & une à droite pour écrire après elle les termes de la racine que je cherche, après quoi consultant la table ou le Théorême

$$\begin{array}{l|l} \dot{c}\dot{c}+2\dot{c}\dot{d}+\dot{d}\dot{d} & c+d \\ \hline c+2c \quad d & \end{array}$$

du nombre 98. je vois que le quarré proposé contient le quarré de son premier terme, le double du premier multiplié par le second, le quarré du second, &c. donc si en retranchant de la grandeur proposée ces différens produits il ne reste rien, ce sera une marque que cette grandeur est un quarré, & j'en aurai la racine cherchée. Je dis donc le premier quarré en allant de gauche à droite est cc dont la racine est c; j'écris c au lieu marqué pour la racine, & je l'écris aussi sous le quarré cc. Je multiplie la racine c par elle-même, c'est à dire par la lettre c que j'ai écrite sous le quarré cc, & le produit est cc, lequel étant retranché de cc ne laisse rien; ainsi le quarré proposé ne contient plus le quarré que je viens de retrancher; c'est pourquoi je mets un point sur le quarré cc pour marquer qu'il a été retranché.

Je double la racine c que je viens de trouver, ce qui fait $2c$; & comme $2c$ multiplié par la seconde racine est dans le reste du quarré proposé, j'écris $2c$ sous le terme $2cd$, & je divise $2cd$ par $2c$, ce qui donne d, lequel doit être la seconde racine; car puisque le terme $2cd$ est le produit de $2c$ multiplié par la seconde racine, il est sûr par les regles de la multiplication & de la division, qu'en divisant $2cd$ par le nombre à multiplier $2c$, le quotient doit être le multiplicateur, & par conséquent doit être d. Je multiplie la racine ou le quotient d par le diviseur $2c$, ce qui donne $2cd$, de $2cd$ ôtez $2cd$, il ne reste rien, & je mets un point.

Or le quarré proposé doit encore contenir le quarré de la seconde racine d, ainsi j'écris d sous le terme dd de la grandeur proposée, & multipliant d par lui-même ou par la seconde racine d, le produit est dd, lequel retranché de dd ne laisse rien: la racine cherchée est donc $c+d$.

II. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de $bb+2bc+cc+2bd+2cd+dd$.

$$\begin{array}{l|l} \dot{b}\dot{b}+2\dot{b}\dot{c}+\dot{c}\dot{c}+2\dot{b}\dot{d}+2\dot{c}\dot{d}+\dot{d}\dot{d} & b+c+d \\ \hline b+2b+c+2b+2c+d & \end{array}$$

Je dis le premier terme à gauche est bb dont la racine est b que j'écris au lieu destiné pour la racine, & sous la grandeur bb, je multiplie b par b, ce qui donne bb, lequel retran-

ché de bb ne laiſſe rien, & je mets un point ſur le terme bb.

Je double la racine trouvée b, ce qui fait $2b$ que j'écris ſous le terme $2bc$, & diviſant ce terme par $2b$, la ſeconde racine eſt c que j'écris; je multiplie $2b$ par c, & le produit eſt $2bc$, lequel retranché de $2bc$ ne laiſſe rien. J'écris c ſous le terme cc, & multipliant c par la racine c, le produit eſt cc, lequel retranché de cc ne laiſſe rien.

Je double les deux premieres racines, ce qui fait $2b + 2c$ que j'écris ſous les termes $2bd + 2cd$, & diviſant ces termes par $2b + 2c$, le quotient d eſt la troiſiéme racine. Je multiplie cette racine par $2b + cd$, ce qui donne $2bd + 2cd$, lequel retranché de $2bd + 2cd$, ne laiſſe rien; j'écris d ſous le dernier terme dd, & multipliant d par la troiſiéme racine d, le produit eſt dd, lequel retranché de dd, ne laiſſe rien. Ainſi la racine cherchée eſt $b + c + d$.

III. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de $cc - 2cd + dd$ je trouve que la premiere racine eſt c dont le quarré étant retranché du terme cc ne laiſſe rien. Je double la premiere racine, ce qui fait $+ 2c$, & diviſant $- 2cd$ par $+ 2c$, le quotient eſt $- d$. Je multiplie $- d$ par $+ 2c$, ce qui donne $- 2cd$, lequel retranché de $- 2cd$ ne laiſſe rien. J'écris $- d$ ſous le terme dd, & multipliant $- d$ par la racine $- d$, le produit eſt $+ dd$, lequel retranché de $+ dd$ ne laiſſe rien.

$$\dot{c}c - 2cd + \dot{d}d\ (c - d$$
$$c + 2c - d$$

IV. Exemple. Pour extraire la racine cubique de $c^3 + 3ccd + 3cdd + d^3$; je dis, en ſuivant les préceptes du Théorême du nombre 100 : la racine cubique du premier terme c^3 eſt c, & faiſant le cube c^3 de cette racine, je le retranche du terme c^3, & il ne reſte rien; je fais le quarré cc de cette premiere racine, je le multiplie par 3, ce qui fait $3cc$, & comme la grandeur propoſée doit contenir $3cc$ multiplié par la ſeconde racine, je diviſe $3ccd$ par $3cc$, & le quotient d eſt la ſeconde racine cherchée. Je multiplie la ſeconde racine d par $3cc$, & le produit $3ccd$ étant retranché de $3ccd$ ne laiſſe rien. Je fais le quarré dd de la ſeconde racine d, & je le multiplie par 3 & par c, parce que la grandeur propoſée doit contenir 3 fois ce quarré multiplié par c, & le produit eſt $3cdd$, lequel retranché du terme $3cdd$ ne laiſſe rien; enfin faiſant le cube d^3 de la ſeconde racine, & le retranchant du terme d^3 il ne reſte rien, & la racine cherchée eſt $c + d$.

$$\dot{c}^3 + \dot{3}ccd + \dot{3}cdd + \dot{d}^3\ (c + d$$
$$c^3 + 3cc + 3dd + d^3$$

V. Exemple. Pour extraire la racine quatriéme de $c^4+4c^3d+6c^2dd+4cd^3+d^4$, je prens le quatriéme rang de gauche à droite de la table des puissances, lequel contient la quatriéme puissance du binome $a+b$, & je vois que cette quatriéme puissance contient la quatriéme puissance du premier terme a, 4 fois le cube de a multiplié par le second terme d, six fois le quarré du premier terme a multiplié par le quarré du second, quatre fois le cube du second multiplié par le premier, & la quatriéme puissance du second. Je dis donc le premier terme c^4 est la quatriéme puissance de c; ainsi j'écris

$$\frac{c^4+4c^3d+6c^2dd+4cd^3+d^4}{c^4+4c^3\ \ +6c^2dd+4cd^3+d^3}\ (c+d$$

c au lieu destiné pour les racines; j'éleve c à la quatriéme puissance c^4, & retranchant c^4 de c^4 il ne reste rien. Je fais le cube c^3 de la premiere racine c, & le multipliant par 4 j'ai $4c^3$; je divise le terme $4c^3d$ par $4c^3$, & le quotient d est la seconde racine à cause que la grandeur proposée doit contenir $4c^3$ multiplié par la seconde racine; je multiplie $4c^3$ par la seconde racine d, ce qui donne $4c^3d$ lequel retranché de $4c^3d$ ne laisse rien. Je fais le quarré dd de la seconde racine d & je le multiplie par 6, & ensuite par le quarré c^2 de la premiere, ce qui fait $6c^2dd$, qui retranché de $6c^2dd$ ne laisse rien. Je fais le cube d^3 de la seconde racine, je le multiplie par 4 & par c, ce qui donne $4cd^3$, qui retranché de $4cd^3$ ne laisse rien; enfin j'éleve la seconde racine à sa quatriéme puissance d^4, & d^4 retranché de d^4 ne laisse rien, la racine cherchée est donc $c+d$.

VI. Exemple. Pour extraire la racine quarrée de la grandeur $\frac{aa+2ab+bb}{cc}$ qui est une fraction. Je tire la racine du numérateur, laquelle est $a+b$, & la racine du numerateur, laquelle est c, & j'écris $\frac{a+b}{c}$, & ainsi des autres; la raison en est qu'une fraction qui se multiplie elle-même produit son quarré; or pour multiplier une fraction par elle-même, on multiplie le numérateur par lui-même, ce qui donne le quarré du numérateur, & l'on multiplie aussi le dénominateur par lui-même, ce qui donne le quarré du dénominateur; donc pour extraire la racine, il faut extraire la racine du numérateur & celle du dénominateur.

Il faut dire la même chose de la racine cubique d'une fraction; car une fraction en se multipliant deux fois successivement produit son cube; or pour cuber une fraction on multiplie son numerateur

merateur par lui-même deux fois successivement, & son dénominateur aussi; donc pour extraire la racine cubique, il faut extraire la racine cubique du numerateur, & la racine cubique du dénominateur, & il en est de même à l'égard des puissances plus élevées des fractions.

VII. Exemple. Pour extraire la racine cubique de $a^3 + b^3$, j'écris $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, parce que cette racine ne peut pas s'extraire, & j'observe que le signe radical s'étende sur tous les termes de la grandeur proposée; de même pour extraire la racine quarrée de $\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}$, j'écris $\frac{\sqrt{aa + ab + bc}}{\sqrt{cc - dd}}$, ou $\sqrt{\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}}$.

107. Ce que nous venons de dire va nous servir pour l'extraction des racines des grandeurs numeriques; mais comme il n'y a guéres que la racine quarrée, & la racine cubique qui soient en usage, nous nous en tiendrons à ces deux-ci, & ce que nous en dirons fera aisément juger de ce que l'on devroit faire, si l'on étoit obligé d'extraire les racines des grandeurs plus élevées.

De l'Extraction de la Racine quarrée des grandeurs numériques.

108. Pour extraire la racine quarrée des grandeurs numeriques, il faut d'abord connoître les quarrés des dix premiers nombres 1, 2, 3, 4, &c. & ces quarrés sont tels qu'on les voit dans la Table suivante.

Racines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

109. Quand les quantités dont il faut extraire la racine quarrée sont plus grandes que le plus grand des quarrés contenus dans la Table, on en extrait la racine de la même façon qu'on extrait la racine quarrée des grandeurs litterales; mais la difficulté est de sçavoir quelle place occupent les produits qu'il faut retrancher de la quantité proposée. Pour en venir donc à bout, il n'y a qu'à voir de quelle maniere se forme un quarré numerique, & en tirer ensuite des régles pour l'extraction de sa racine.

Soit donc le nombre 36 qu'il faut élever au quarré, je le multiplie par lui-même en écrivant 36 sous 36, & je dis 6 fois 6 font 36, j'écris 6 sous les unités, & j'avance 3 sous les dixaines au lieu de le retenir; 6 fois 3 font 18, j'écris 8 sous les dixaines

& j'avance 1 au lieu de le retenir. Je mutiplie 36 par le second caractere du multiplicateur, en disant : *3* fois *6* font 18, j'écris 8 sous les dixaines & j'avance 1 ; 3 fois 3 font 9 & j'écris 9 au rang des centaines ; ainsi cette façon de multiplier quoique différente en apparence de la façon ordinaire, n'altére point le produit total ; j'ajoute tous les produits que j'ai trouvés, & la somme est 1296. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux, & je vois que le quarré 9 du premier caractere 3 de la racine 36 est à gauche de la premiere tranche en prenant les tranches de gauche à droite ; que les deux produits 18, 18, du premier caractére 3 multiplié par le second *6*, font contenus partie à gauche & partie à droite, & enfin que le quarré 36 du second caractere *6*, est contenu entre les deux tranches.

36
36
|36
1|8
1|8
9|
12|96

Si l'on faisoit de la même façon le quarré 104329 de 323, on trouveroit qu'en coupant ce quarré par tranches de deux en deux, tels qu'on les voit ici 10|43|29, le quarré du premier caractére 3 de sa racine feroit contenu dans les caractéres 10 qui sont à gauche de la premiere tranche ; que le double de ce caractére multiplié par le second 2 feroit partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche ; que le quarré 4 du second caractere 2 feroit à gauche de la seconde tranche ; que le double des deux premiers caracteres multiplié par le troisiéme 3 feroit partie à gauche & partie à droite de la seconde tranche, & enfin que le quarré 9 du troisiéme caractére feroit à gauche de la troisiéme tranche, & on trouveroit la même chose si le quarré proposé avoit un plus grand nombres de tranches ; cela posé, nous allons donner quelques Exemples de l'Extraction de la racine quarrée, mais auparavant il est bon de faire l'observation suivante.

109. *Remarque.* Les nombres quarrés sont ainsi nommés, parce que ce sont les seuls qu'on puisse ranger de façon qu'ils forment une figure quarrée dont chaque côté contient un même nombre d'unités. Le nombre 4 rangé comme on voit ici, contient à chaque côté deux unités ; le nombre 9 en contient 3 à chaque côté ; le nombre 16 en contient 4 à chaque côté, & ainsi des autres.

1   11   111   1111
     11   111   1111
           111   1111
                  1111

Ier. EXEMPLE. *On veut faire un Bataillon quarré d'une troupe composée de 3844 hommes, combien y aura-t'il d'hommes de front & d'hommes de file, c'est-à-dire combien y aura-t'il d'hommes à chaque côté de ce quarré?*

38|44 (62	
6	
2.44	
1 22	
000	

J'écris le nombre 3844 sous lequel je mene une ligne, & une autre à sa droite pour y mettre la racine cherchée. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux caracteres, & je dis le plus grand quarré contenu dans les caracteres 38 qui sont à gauche de la premiere tranche est 36 dont la racine est 6; j'écris 6 au lieu destiné pour la racine, & 6 sous 38. Je multiplie la racine 6 par elle-même, ce qui donne 36, & 36 retranché de 38 laisse 2, c'est pourquoi je mene une ligne sous le 6 que j'ai mis au-dessous du nombre proposé, & j'écris le reste 2.

J'abbaisse les deux autres caracteres 4 & 4 du nombre proposé lesquels se trouvent entre la premiere & la seconde tranche, & doublant la premiere racine 6, ce qui fait 12; j'écris 12 sous 244, en sorte que son dernier caractere 2 soit à droite de la premiere tranche & l'autre à gauche, & comme les caracteres 24 du nombre proposé doivent contenir ce double 12 multiplié par la seconde racine; je divise 24 par 12 & le quotient 2 est la seconde racine que j'écris en son lieu; je multiplie 12 par la racine 2, ce qui fait 24, lequel retranché de 24 ne laisse rien.

J'écris la racine 2 sous le dernier caractere 4, & multipliant 2 par 2, le produit est 4, lequel ôté de 4 ne laisse rien, donc la racine est 62, & par conséquent il y aura 62 de front & 62 de file.

110. Lorsqu'en divisant ce qui reste de la grandeur proposée par le double de la premiere racine ou des deux premieres, ou des trois premieres, &c. on trouve un quotient dont le quarré ne peut pas être contenu dans les caracteres de la grandeur proposée desquels on doit le retrancher, il faut diminuer ce quotient ou cette racine d'autant d'unités qu'il en faut pour faire que ce quarré puisse être retranché, c'est ce que nous allons voir dans l'Exemple suivant.

II. EXEMPLE. Soit le nombre proposé 4831204, je le coupe par tranches à la maniere accoutumée, & je vois qu'il y aura quatre racines. Je dis donc le plus grand quarré contenu dans le

caractére à gauche, eſt 4 dont la racine eſt 2, & retranchant le quarré 4 de la racine, du caractere 4 il ne reſte rien. J'abbaiſſe les deux caracteres 83, & doublant la premiere racine, ce qui fait 4, je l'écris ſous 83, c'eſt-à-dire ſous 8 qui eſt immédiatement à droite de la premiere tranche; je diviſe 8 par 4, ce qui donne 2, mais comme après avoir retranché de 8 le produit de la racine 2 par 4, il ne reſteroit plus que 3 qui ne peut pas contenir le quarré 4 de ce quotient 2, je ne mets que 1 au lieu de 2, ainſi 1 fois 4 eſt 4 qui retranché de 8 laiſſe 4, & écrivant la racine 1 ſous le caractere 3, j'ai 1 fois 1 eſt 1 qui retranché de 3 laiſſe 2.

```
4|83|12|04(2198
2
83
41
42.12
429
351.04
4388
0000
```

J'abbaiſſe les deux caracteres 12 qui ſont entre la ſeconde & la troiſiéme tranche, & doublant les deux premieres racines 21 ce qui fait 42; j'écris 42 ſous 4212, de façon que ſon dernier terme 2 ſoit immédiatement à droite de la ſeconde tranche, de laquelle je marque la place par un point à meſure que j'abbaiſſe les termes du quarré propoſé; or ce double 42 multiplié par la troiſiéme racine, eſt contenu dans les termes 421 du quarré propoſé, diviſant donc 421 par 42 diſpoſé comme il eſt, je trouve 9 pour la troiſiéme racine; car dans 42 le nombre 4 eſt 9 fois, & il reſte beaucoup plus qu'il ne faut pour faire que 2 ſoit contenu auſſi 9 fois, & que le quarré de 9 ſoit contenu dans le reſte joint au dernier caractere 2 de 4212; j'écris donc 9 ſous ce dernier caractere, & je dis 9 fois 9 font 81, lequel ne peut ſe retrancher de 2, mais en empruntant j'ai 82, & de 82 ôtez 81 il reſte 1; 9 fois 2 font 18, & 8 d'emprunté font 26, lequel ne peut être retranché de 1, mais j'emprunte 3, ce qui fait 31, & de 31 ôtez 26 il reſte 5; 9 fois 4 font 36 & 3 font 39, & de 42 ôtez 39, il reſte 3.

J'abbaiſſe les deux derniers caracteres 04 du quarré propoſé, je double les trois premieres racines, ce qui donne 438 que j'écris de façon que ſon dernier caractere ſoit immédiatement à droite de la troiſiéme tranche, & diviſant 3510 par 438 diſpoſé comme il eſt, je trouve 8 pour la troiſiéme racine; j'écris donc 8 à la racine, & ſous le dernier caractere 4 du quarré, après quoi multipliant 4388 par la racine 8, & retranchant le produit du nombre 35104, de même que dans l'opération précédente,

il ne reste rien, & la racine cherchée est 2198.

III. EXEMPLE. Pour extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{121}{144}$, j'extrais la racine du numerateur 121 à la façon ordinaire, & cette racine est 11 ; j'extrais de même la racine 12 du dénominateur 144, & j'ai $\frac{11}{12}$ qui est la racine de la fraction donnée. J'ai donné la démonstration de ceci dans le sixiéme exemple de l'extraction des racines des grandeurs littérales (*N.* 101.)

111. Lorsqu'après avoir fait toutes les opérations nécessaires pour extraire la racine quarrée d'un nombre, on trouve un reste, cela marque que le nombre donné n'est pas un quarré parfait, & que par conséquent on ne sçauroit en extraire la racine ; ainsi on marque ce nombre avec le signe radical. Soit par exemple 126, j'en extrais sa racine, & je trouve 11 avec un reste 5, ce nombre n'est donc pas un nombre quarré, c'est pourquoi j'exprime sa racine en écrivant $\sqrt{126}$, nous ferons bientôt voir que ces racines ne peuvent s'exprimer ni par un nombre entier, ni par un nombre rompu, ni par un nombre composé d'un entier & d'une fraction, & que cependant on peut approcher de sa véritable valeur toujours de plus en plus près sans pouvoir jamais y atteindre. En attendant voici quelques Theorêmes ausquels il est bon de faire attention.

112. THEOREME. *Si l'on ajoute à un nombre entier un autre nombre entier, si on lui retranche un nombre entier, ou si on le multiplie par un autre nombre entier, la somme ou le reste, ou le prodoit sera un nombre entier ; mais si on le divise par un nombre entier, le quotient n'est pas toujours un nombre entier.*

Un nombre entier est une somme exacte d'unités sans fraction; si l'on ajoute donc deux pareilles sommes, le total ne peut être qu'un amas d'unités sans fraction, & si d'une somme exacte d'unités on ôte une autre somme exacte d'unités, mais moindre, le reste doit être encore une somme d'unités sans fraction, de même comme en multipliant un nombre entier par un autre nombre entier, on prend le premier autant de fois que l'unité est contenuë dans le second, & que ce second contient l'unité exactement, il est clair qu'on prend la somme exacte d'unités du premier un certain nombre de fois sans fraction, & que par conséquent le produit doit être sans fraction. Au contraire quand on divise un nombre entier par un autre nombre entier, il peut se faire que le diviseur ne soit pas contenu exactement un certain nombre de fois dans le dividende, ce qui donne un reste qui est une fraction.

113. THEOREME. *Si on ajoute à un nombre entier une fraction, ou si on lui retranche une fraction, la somme ou le reste ne sera pas un nombre entier, mais si on multiplie ou divise un nombre entier par une fraction, le produit ou le quotient peuvent être un nombre entier.*

Si la fraction est moindre que l'unité, il est clair qu'en ajoutant cette fraction à un nombre entier, la somme sera composée d'une somme exacte d'unités & d'une fraction, & que si on la retranche d'un nombre entier, le reste sera une somme d'unités moins une partie d'unité, & par conséquent le reste ou la somme ne seront pas des nombres entiers qui contiennent exactement l'unité, mais si l'on multiplie ou si l'on divise un entier par une fraction, il pourra se faire que le produit ou le quotient soient des nombres entiers. Par exemple, si l'on multiplie le nombre entier 3 par $\frac{2}{3}$, le produit $\frac{6}{3}$ sera un entier qui vaudra 2, & au contraire multipliant 3 par $\frac{3}{4}$, le produit $\frac{9}{4}$ ne sera pas un entier. De même si on divise 2 par $\frac{2}{3}$, ou ce qui revient au même, $\frac{6}{3}$ par $\frac{2}{3}$, le quotient 3 sera un nombre entier, & au contraire si l'on divise 3 par $\frac{2}{3}$, le quotient $4\frac{1}{2}$ ne sera pas un nombre entier.

114. THEOREME. *Si une fraction est réduite à ses moindres termes, son quarré, son cube, &c. seront des fractions réduites à leurs moindres termes.*

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à ses moindres termes, son quarré est $\frac{aa}{bb}$, si l'on veut que cette fraction ou quarré $\frac{aa}{bb}$ ne soit pas réduite à ses moindres termes, on pourra donc trouver un nombre qui divisera exactement le numerateur aa & le dénominateur bb. Supposons que les deux quotients soient xx, yy, en sorte que la fraction $\frac{xx}{yy}$ soit égale à la fraction $\frac{aa}{bb}$ réduite à ses moindres termes, la racine quarrée de cette fraction sera donc $\frac{x}{y}$, & cette racine sera égale à la racine $\frac{a}{b}$ de la fraction $\frac{aa}{bb}$; or à cause que les quarrés xx, yy sont moindres que les quarrés aa, bb, les racines x, y seront aussi moindres que les racines a, b, & par conséquent la fraction $\frac{a}{b}$ sera exprimée en termes plus grands que ceux de son égale $\frac{x}{y}$; donc cette fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas réduite à ses moindres termes, comme on le supposoit, puisqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{x}{y}$, donc, &c.

115. Nous pourrions ajouter ici grand nombre de Theorême sur cette matiere ; mais les 3 ou 4 suivans suffiront pour donner tous les éclaircissemens nécessaires.

116. THEOREME. *Si deux fractions réduites à leurs moindres termes n'ont pas un même dénominateur, elles ne peuvent être égales.*

Soient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & dont les dénominateurs sont différens, si l'on veut que ces deux fractions soient égales, le numerateur a sera aussi grand par rapport à son dénominateur b, que le numerateur c par rapport à son dénominateur d ; c'est pourquoi si d est plus grand que b, le numerateur c sera plus grand que a, & la fraction $\frac{c}{d}$ sera exprimée par des termes plus grands que ceux de son égale $\frac{a}{b}$, donc cette fraction $\frac{c}{d}$ n'aura pas été réduite à ses moindres termes comme on le supposoit, puisqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{a}{b}$; que si au contraire d est moindre que b, le numerateur c sera aussi moindre que le numerateur a, & la fraction $\frac{a}{b}$ étant exprimée par des termes plus grands que ceux de son égale $\frac{c}{d}$, n'aura pas été réduite à ses moindres termes, ce qui est encore contre la supposition, donc, &c.

117. THEOREME. *Si deux fractions qui ont même dénominateur sont ensemble égales à un entier, & que l'une des deux soit réduite à ses moindres termes, l'autre l'est aussi.*

Soit les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ qui ont même dénominateur, & dont la premiere $\frac{a}{b}$ est réduite à ses moindres termes, la somme des deux numerateurs $a+c$ est égale ou à b, ou à $2b$, ou à $3b$, &c. & par conséquent cette somme est un entier, si l'on veut que la seconde fraction $\frac{c}{b}$ ne soit pas réduite à ses moindres termes, nous trouverons un nombre que je nomme x, lequel divisant exactement le numérateur & le dénominateur de cette fraction, la réduira à ses moindres termes ; si l'on suppose donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{b}$, c'est-à-dire $a+c=b$, le nombre x qui divise exactement b, divisera exactement la quantité $a+c$, & comme ce nombre divise exactement la partie c de cette quantité, il divisera exactement

l'autre partie a; donc on aura un nombre x qui pourra diviser exactement les termes de la fraction $\frac{a}{b}$, & par conséquent cette fraction n'aura pas été réduite à ses moindres termes, ce qui est contre la supposition, & ce seroit la même chose si on supposoit $a+c=2b$; car le nombre x qui diviseroit exactement b, diviseroit aussi exactement $2b$ ou $a+c$, &c.

118. THEOREME. *Si deux fractions réduites à leurs moindres termes, ont le même dénominateur, leur somme peut être égale à un entier, mais si leurs dénominateurs sont differens, leur somme est toujours une fraction plus grande ou moindre que l'unité.*

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ réduites à leurs moindres termes, & qui ont le même dénominateur, il peut aisément se faire que la somme des numerateurs a, c, soit égale à b ou à $2b$, &c. par exemple dans les fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, qui sont réduites à leurs moindres termes, la somme $2+3$ des numerateurs est égale à 5, & par conséquent ces deux fractions font $\frac{5}{5}$, ou un entier; de même dans les fractions $\frac{8}{7}$, & $\frac{6}{7}$ réduites à leurs moindres termes, la somme $8+6$ des numerateurs est double du dénominateur 7, & les deux fractions valent $\frac{14}{7}$, ou deux entiers, & ainsi des autres.

Maintenant soient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & dont les dénominateurs sont différens; je cherche la quantité qu'il faut ajouter au numerateur a pour le rendre égal à son dénominateur, & faisant la fraction $\frac{h}{b}$ la somme $\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ sera égale à $\frac{b}{b}$, & par conséquent un entier, & à cause que la fraction $\frac{a}{b}$ est réduite à ses moindres termes, la fraction $\frac{h}{b}$ le sera aussi (*N.* 117.) Si l'on veut donc que les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ prises ensemble vaillent un entier, je les réduis au même dénominateur, ce qui donne $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, partant il faut que $ad+cb$ soit égal à bd, je multiplie les termes de la fraction $\frac{h}{b}$ par d, ce qui donne $\frac{hd}{bd}$; ainsi à cause que les deux $\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ valent un entier, les deux $\frac{ad}{bd}+\frac{hd}{bd}$ qui sont les mêmes, valent aussi un entier, ou

ou 1, or par la supposition qu'on fait, les deux $\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$ valent aussi 1; donc $\frac{ad}{bd} + \frac{hd}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$, & retranchant $\frac{ad}{bd}$ de part & d'autre, nous aurons $\frac{hd}{bd} = \frac{cd}{bd}$; mais $\frac{hd}{bd}$ est la même que $\frac{h}{b}$, & $\frac{cb}{bd}$ la même que $\frac{c}{d}$, donc les deux fractions $\frac{h}{b}$ & $\frac{c}{d}$ réduites à leurs moindres termes, & qui ont des dénominateurs inégaux, sont égales, ce qui est impossible (*N.* 116.) donc il est impossible aussi que les deux $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ vaillent ensemble l'unité, ou un entier.

Que si on prétend que les deux fractions vaillent deux entiers, ou trois, ou quatre, &c. je cherche ce qui manque au numerateur a de la fraction $\frac{a}{b}$, pour être égal à $2b$, $3b$, &c. & faisant h égal à cette quantité, je forme la fraction $\frac{h}{b}$; ainsi les deux ensemble $\frac{a}{b} + \frac{h}{b}$ valent ou $\frac{2b}{b}$, ou $\frac{3b}{b}$, &c. c'est-à-dire, ou trois unités, ou quatre, ou cinq, &c. & continuant le même raisonnement, & les mêmes opérations que ci-dessus, je ferai voir aisément que les deux $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ne peuvent valoir ni deux unités, ni trois, ni quatre, &c. ni aucun nombre entier, & que par conséquent leur somme est une fraction plus ou moins grande que l'unité.

119. THEOREME. *Si l'on multiplie une fraction par elle-même, le produit est une fraction, & jamais un entier.*

Si la fraction est moindre que l'unité, je la réduis à ses moindres termes, & supposant qu'elle soit exprimée par $\frac{a}{b}$ son quarré est $\frac{aa}{bb}$; or à cause que a est moindre que b, & que pour faire le quarré on a multiplié le numerateur de la fraction $\frac{a}{b}$ par a, & le dénominateur par b plus grand que a, le dénominateur bb du quarré $\frac{aa}{bb}$ est plus grand par rapport à son numerateur aa, que le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$ par rapport à son nuumérateur a, & par conséquent $\frac{aa}{bb}$ est moindre que la fraction $\frac{a}{b}$;

mais $\frac{a}{b}$ est moindre que l'unité; donc à plus forte raison $\frac{aa}{bb}$ est moindre que l'unité.

Si la fraction est plus grande que l'unité, elle contiendra un ou plusieurs entiers, plus une fraction moindre que l'unité ; supposant donc que l'entier ou les entiers qu'elle renferme soient exprimés par m, & que la fraction restante reduite à ses moindres termes soit $\frac{a}{b}$, cette fraction sera $m + \frac{a}{b}$, & son quarré $mm + \frac{2ma}{b} + \frac{aa}{bb}$; or dans ce quarré le premier terme mm est un entier, le second $\frac{2ma}{b}$ étant le produit de la fraction $\frac{a}{b}$ par l'entier $2m$, est ou entier ou une fraction (*N.* 113.), & le dernier est une fraction, puisqu'il est le quarré de la fraction $\frac{a}{b}$ moindre que l'unité ; donc si les deux premiers termes sont des entiers leur somme sera un entier (*N.* 112.) & ajoutant à cet entier la fraction $\frac{aa}{bb}$, la somme ne sera pas un entier (*N.* 113.) ; que si le second terme $\frac{2ma}{b}$ est une fraction, cette fraction ou sera réduite à ses moindres termes, ou ne le sera pas; si elle est réduite à ses moindres termes, il est clair que son dénominateur ne sera pas le même que le dénominateur bb du troisiéme terme $\frac{aa}{bb}$, qui par la supposition est aussi une fraction réduite à ses moindres termes (*N.* 114.) ainsi les deux termes $\frac{2ma}{b}$, $\frac{aa}{bb}$ formeront ensemble une fraction plus grande, ou moindre que l'unité (118); mais si le second terme $\frac{2ma}{b}$ n'est pas réduit à ses moindres termes, je le réduits, & il est clair que son dénominateur sera moindre que b, & par conséquent moindre que le dénominateur bb du troisiéme terme $\frac{aa}{bb}$; donc le second & le troisiéme terme n'ayant pas le même dénominateur, formeront encore ensemble une fraction plus grande ou moindre que l'unité (*N.* 18.) ; & par conséquent ces deux termes joints au premier mm, ne feront pas non plus un entier sans fraction.

120. THEOREME. *Si la racine quarrée d'un nombre entier n'est pas un nombre entier, elle ne pourra s'exprimer ni par une fraction,*

ni par un nombre composé d'entier & de fraction.

DEMONSTRATION. Si cette racine pouvoit s'exprimer par une fraction, il s'ensuivroit que le produit de cette fraction par elle-même seroit un nombre entier, ce qui est impossible (*N.* 119.), & si elle pouvoit s'exprimer par un entier & fraction, il s'ensuivroit encore qu'un entier & fraction multiplié par lui-même, seroit un nombre entier, ce qui est aussi impossible (*N.* 119.); donc, &c.

121. COROLLAIRE. Il suit delà que la racine d'un nombre entier qu'on ne peut tirer exactement, ne peut s'exprimer autrement que par le signe radical, puisqu'on ne peut l'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction; c'est l'une des choses que j'avois promis de démontrer. (*N.* 111.)

122. THEOREME. *Si les racines de deux quarrés ne different entr'elle que de l'unité, le plus grand des deux quarrés surpasse le petit de deux fois la racine du petit, plus l'unité.*

DEMONSTRATION. Soit la racine du premier quarré a, celle du second sera donc $a+1$, le quarré de la premiere sera aa, & le quarré de la seconde sera $aa+2a+1$; or si de ce second quarré je retranche le premier quarré aa, il est visible que le reste sera $2a+1$; mais ce reste est le double de la premiere racine a, plus l'unité; donc, &c.

$$\begin{array}{l} a+1 \\ a+1 \\ \hline aa+a+1 \\ \quad +a \\ \hline aa+2a+1 \quad \textit{Quarré.} \\ aa \\ \hline \quad 2a+1 \quad \textit{Reste ou Difference.} \end{array}$$

123. QUESTION. *Avec* 4001 *hommes, on veut faire un Bataillon quarré, & l'on demande au cas qu'il y ait des hommes de trop, combien il faudroit en ajouter ou en retrancher pour faire que le quarré soit parfait, & qu'il ne reste rien.*

SOLUTION. J'extrais la racine quarrée du nombre 4001, & je trouve 63 avec un reste 32, ce qui me fait voir que ce quarré

aura 63 hommes de front & de file, mais qu'il en restera 32; si l'on veut donc employer ces 32, il faut en ajouter un certain nombre, lequel joint au nombre 4001 fasse un quarré dont la racine surpasse la racine 63 d'une unité; or le quarré dont la racine est 64, surpasse le quarré dont la racine est 63 de deux fois 63 plus l'unité, c'est-à-dire de 126 + 1, ou de 127; donc si 4001 étoit exactement le quarré de 63, il faudroit lui ajouter 127 hommes pour avoir le quarré de 64, mais comme 4001 en contient déja 32 de plus, je ne dois lui ajouter que 127 moins 32, c'est-à-dire 95 hommes, & la somme est 4096, dont la racine est effectivement 64.

40|01(63	127
6	32
401	95
123	4001
32	4096

40\|96(64
6
496
124
000

Que si on vouloit seulement le quarré de 63, il est clair qu'en retranchant 32 hommes de 4001, le reste 3969 seroit le quarré de 63.

124. COROLLAIRE. Il suit du Theorême précédent que si après avoir extrait la racine d'un nombre, il reste quelque chose; ce reste est moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité; & par conséquent ce reste ajouté à la racine trouvée ne peut pas l'augmenter de l'unité; car, par exemple, si après avoir extrait la racine de 4001 qui est 63 avec un reste 32, ce reste 32 se trouvoit égal au double de 63 plus 1, c'est-à-dire à 127, le nombre 4001 diminué de 127 seroit le quarré de 63; or en ajoutant au quarré deux fois sa racine 63 plus l'unité, c'est-à-dire 127, on le feroit devenir le quarré de 64; donc 4001 seroit exactement le quarré de 64, & par conséquent en tirant sa racine, on trouveroit 64, & non pas 63 avec un reste.

De l'Extraction de la Racine quarrée des grandeurs numeriques par approximation.

125. Quand un nombre entier n'est pas un quarré parfait, sa racine ne peut s'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction (*N.* 120.); or tout ce qu'on peut faire dans ces occasions, c'est d'operer de façon que l'on approche si près de la veritable racine, que le reste soit moindre qu'une quantité donnée quelque petite qu'elle soit, & c'est ce

qu'on appelle extraire la racine par approximation. Par exemple si l'on propose d'extraire cette racine, en sorte que ce qui restera soit moindre qu'un dixiéme d'unité, ou qu'un centiéme, ou qu'un dix milliéme, &c. la maniere de satisfaire à cette question s'appelle extraire la racine quarrée par approximation, cette extraction est fondée sur le Theorême suivant.

126. Theoreme. *Si l'on prend l'unité, & qu'à sa droite on mette un zero, ou deux zeros, ou trois zeros, &c. ce qui donnera les nombres* 10, 100, 1000, 10000, *&c. les quarrés de ces nombres contiendront encore l'unité, plus un nombre de zeros double du nombre de zeros que leurs racines contiennent.*

La Démonstration de ceci étant tirée de la nature de la multiplication, on la trouvera bientôt si l'on multiplie chacun des nombres 10, 100, 1000, &c. par lui-même; car on verra que le quarré de 10 qui est 100, contient l'unité plus deux zeros, au lieu que 10 ne contient que l'unité & un zero; que le quarré de 100 qui est 10000 contient l'unité plus quatre zeros, au lieu que 100 ne contient que l'unité & deux zeros, & ainsi des autres, cela posé.

Exemple. Pour extraire la racine de 3 qui n'est pas un quarré parfait, je réduis le nombre 3 en une fraction dont le dénominateur soit 100, c'est-à-dire, je multiplie 3 par 100, ce qui fait 300, & je le divise par 100, ce qui fait $\frac{300}{100}$ égale à 3 (*N.* 37.) j'extrais la racine de cette fraction, c'est-à-dire j'extrais d'une part la racine du numerateur & de l'autre la racine du dénominateur pour faire de ces deux racines une nouvelle fraction qui sera la racine cherchée (*N.* 104.); or la racine du dénominateur 100 est 10 par le Theorême précédent; donc il ne s'agit plus que de tirer la racine du numerateur 300; j'extrais cette racine à la façon ordinaire & je trouve 17; ainsi la racine de la fraction est $\frac{17}{10}$, ou $1\frac{7}{10}$, & il reste 11 qui est moindre qu'une unité de la racine (*N.* 124.) c'est-à-dire moindre qu'un dixiéme, & par conséquent j'ai tiré la racine de 3, & ce qui reste est moindre qu'un dixiéme.

```
3|00(17
1    10
------
2.00
 27
------
 11
```

Si je veux que ce qui reste soit moindre qu'un centiéme, & que par conséquent la racine trouvée approche davantage de la véritable; je multiplie 3 non pas par 100, mais par 10000, & le divisant par 10000 j'ai la fraction $\frac{30000}{10000}$ qui est égale à 3; or la racine du dénominateur est 100 par le Theorême précedent, ainsi je n'ai plus qu'à extraire la racine du numérateur;

& cette racine étant extraite à la façon ordinaire est 173, & par conséquent la racine de la fraction est $\frac{173}{100}$, ou $1\frac{73}{100}$ avec un reste 71 qui est moindre qu'un centiéme.

```
3|00|00 ( 173
1          100
2.00
 27
 11.00
  343
   71
```

Si je veux en approcher davantage, j'ajoute encore deux zeros au numerateur & au dénominateur de la fraction $\frac{30000}{10000}$, ce qui fait $\frac{3000000}{1000000}$; or la racine du dénominateur 1000000 est 1000, ainsi extrayant la racine du numerateur qui est 1732, je trouve que la racine cherchée est $\frac{17}{1000}$, ou $1\frac{732}{1000}$ avec un reste 276 qui est moindre qu'un milliéme.

Et continuant toujours de la même façon en ajoutant toujours deux zeros au numerateur & au dénominateur, j'approcherois toujours de plus en plus de la véritable valeur de la fraction, sans pouvoir jamais y atteindre, parce qu'il me restera toujours un reste, à cause que la racine de 3 ne pouvant s'extraire en nombre entier, ne sçauroit s'extraire non plus en nombre rompu ou en nombre composé d'entier & de fraction.

```
3|00|00|00 ( 1732
1          1000
2.00
 27
 11.00
  343
   71.00
   3462
    276
```

127. La regle est donc d'ajouter au nombre dont on veut extraire la racine par approximation, ou deux zeros, ou quatre, ou six, &c. toujours en nombre pair, & d'en extraire la racine sous laquelle on mettra l'unité avec la moitié du nombre de zeros qu'on a ajouté au nombre proposé, ce qui donnera une fraction qui sera la racine cherchée, & plus le nombre de zeros ajoutés sera grand, plus aussi on approchera de la véritable valeur.

De l'Extraction de la racine cubique des quantités numeriques.

128. Pour extraire la racine cubique d'un nombre, il faut d'abord se rendre familiers les cubes des dix premiers nombres que l'on voit dans cette Table.

Racines cubiq.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Ensuite si le cube proposé est plus grand que les cubes de cette Table, on en extrait la racine cubique à peu près de même

qu'on extrait celle des grandeurs littérales ; mais la difficulté confiste à trouver les places qu'occupent les différens produits contenus dans le cube proposé, & c'eft ce que nous allons voir, en examinant de quelle façon fe forme un cube.

Soit donc le nombre 54 qu'il faut élever au cube, je le multiplie d'abord par lui-même, en écrivant chaque produit à la place qu'il doit occuper fans rien retenir, ce qui me donne les quatre produits que le quarré de 54 contient ; ainfi la fomme de ces quatre produits donneroit le quarré de 54, de même que fi j'avois multiplié à la façon ordinaire, & par conféquent en multipliant ces quatre produits encore par 54, le produit total fera le cube.

```
       54
       54
      ---
       16
      20
      20
     25
      ---
       54
    ------
     | 64
     |80
     |80
    1|00
     |80
    1|00
    1|00
  125|
  -------
  157|464 Cube
```

J'écris donc 54 par-deffous, & je multiplie chacun des quatre produits d'abord par 4, & enfuite par 5, ce qui me donne huit produits, lefquels ajoutés enfemble font le cube 157464 de 54.

Je coupe ce cube par tranches de trois en trois caracteres de droite à gauche, & je vois que le cube 125 du premier caractere 5, fe trouve à gauche de la premiere tranche, en allant de gauche à droite ; que les trois produits 100, 100, 100, font partie à gauche, & partie à droite de la premiere tranche ; que les trois produits 80, 80, 80, font à droite de la premiere tranche, & qu'enfin le cube 64 du fecond caractere 4 de la racine eft à gauche de la feconde tranche.

Or les trois produits 100, 100, 100, font chacun le produit du quarré 25 du premier caractere 5 de la racine multiplié par le fecond caractere 4, & les trois produits 80, 80, 80, font chacun le produit du quarré 16 du fecond caractere 4 de la racine multiplié par le premier caractere 5 ; donc le cube de 54 coupé par tranches contient à gauche de la premiere tranche le cube du premier caractere 5, enfuite trois quarrés de ce premier caractere 5 multipliés par le fecond, partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche, puis trois quarrés du fecond caractere 4 multipliés par le premier caractere à droite de la premiere tranche, & enfin le cube du fecond caractere à gauche de la feconde tranche.

Que fi le cube avoit un plus grand nombre de tranches, ce

qui ne pourroit ſe faire que ſa racine n'eut un plus grand nombre de caractéres, on trouveroit de même que les cubes du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. ſeroient toujours à gauche des tranches premiere, ſeconde, troiſiéme, &c. & que les produits que le cube contiendroient ſeroient toujours partie à gauche & partie à droite de ces tranches; cela poſé

I[er]. Exemple. Soit le nombre 804357, dont on demande la racine cubique, je mene une ligne ſous ce nombre & une autre à droite pour écrire la racine à côté; je coupe ce nombre par tranches de trois en trois caractéres en allant de droite à gauche, après quoi je dis: le plus grand cube contenu dans les trois premiers caractéres 804 qui ſont à gauche de la premiere tranche eſt 729, ce que je trouve par le moyen de la table des cubes des dix premiers nombres; or la racine de 729 eſt 9 que j'écris au lieu deſtiné, & mettant le cube 729 de cette racine ſous 804, je le retranche de 804, & le reſte eſt 75.

804357(93	
729	729
75.357	243
243	27
75357	75357
00000	

J'abbaiſſe les caracteres 357 du cube, & faiſant le quarré 81 du premier caractére 9 de la racine, je le multiplie par 3, ce qui donne 243; or 243, ou le triple du quarré de la premiere racine multiplié par la ſeconde eſt dans 753, j'écris donc 243 ſous ce nombre, en ſorte que ſon dernier caractere 3 ſoit à droite de la premiere tranche dont je marque la place par un point à meſure que j'abbaiſſe les caracteres 357 compris entre la premiere & la ſeconde tranche; c'eſt pourquoi je diviſe 753 par 243, & le quotient 3 étant le nombre qui multiplie 243 dans 753, eſt par conſéquent la ſeconde racine.

Je multiplie 243 qui eſt la ſomme des trois quarrés de la premiere racine par la ſeconde racine 3, & le produit eſt 729 que j'écris à part; je fais le quarré 9 de la ſeconde racine, & le multipliant par 3 pour en avoir le triple, & enſuite par la premiere racine 9, ce qui donne 243, j'écris 243 ſous 729 en avançant d'un rang vers la droite, parce que le cube propoſé contient ce produit 243 en avançant d'un rang; enfin je fais le cube 27 de la ſeconde racine, & je l'écris ſous le produit 243 en avançant d'un rang à droite, parce que le cube propoſé contient le cube 27 de cette façon, & faiſant la ſomme des trois produits, laquelle eſt

est 75357, je l'écris sous le reste 75357, & retranchant la somme 75357 du reste 75357, il ne reste rien, ainsi la racine cherchée est 93, puisqu'en retranchant du cube proposé le cube du premier caractere, le triple du quarré de ce premier caractere multiplié par le second, le triple du quarré du second multiplié par le premier, & enfin le cube du second, il n'est rien resté.

II. Exemple. Soit le nombre proposé 80621568 dont on demande la racine cubique, je le coupe par tranches, & je trouve que la racine aura trois caracteres, puisqu'il y a trois tranches.

80|621|568(432	144
64	108
16.621	27
48	15507
15 507	
1 114.568	11094
5547	516
1 114 568	8
0 000 000	1114568

Je dis donc le plus grand cube contenu dans les caracteres 80 qui sont à gauche de la premiere tranche est 64, dont la racine cubique est 4, ce que je trouve par la table des cubes des dix premiers nombres; j'écris donc 4 au lieu destiné pour la racine, & 64 sous 80; je retranche 64 de 80, & le reste est 16.

J'abbaisse les trois caracteres 621 qui sont entre la premiere & la seconde tranche, je fais le quarré du premier caractere, & le multipliant par 3, le produit est 48, & comme 48 multiplié par la seconde racine est dans les trois caracteres 166, je divise 166 par 48, & le quotient 3 est la seconde racine; je multiplie 48 par la seconde racine 3, ce qui donne le produit 144 que j'écris à part; je fais le quarré de la seconde racine 3, je le multiplie par 3, & ensuite par la premiere racine 4, ce qui donne 108 que j'écris à part sous 144, en avançant d'un rang à droite; enfin je fais le cube 27 de la conde racine, & je l'écris à part sous 108 en avançant d'un rang à droite; je fais la somme 15507 des produits que j'ai écrit à part, & l'écrivant sous le reste 16621 de la premiere opération, je retranche 15507 de 16621, & le reste est 1114.

J'abbaisse les trois caracteres 568 qui sont entre la seconde & la troisiéme tranche, & faisant le quarré des deux premieres racines 43, je le multiplie par 3, ce qui fait 5547; or ce produit multiplié par la troisiéme racine est dans 11145, j'écris donc 5547 sous 11145, & divisant 11145 par 5547, le quotient 2 est la troisiéme racine; je multiplie 5547 par la troisiéme racine 2, & le produit est 11094 que j'écris à part; je fais le quarré de la troisiéme racine 2, je le multiplie par 3, & ensuite par la somme

43 des deux premieres, le produit eſt 516 que j'écris à part ſous 11094 en avançant d'un rang à droite ; enfin je fais le cube 8 de la troiſiéme racine, & je l'écris à part ſous 516 en avançant d'un rang à droite ; je fais la ſomme 1114568 des trois produits mis à part, & retranchant cette ſomme du reſte 1114568 de la ſeconde opération, il ne reſte rien ; ainſi la racine cherchée eſt 432.

129. Il faut obſerver que ſi après avoir pris le triple du quarré de la premiere racine, & diviſé le reſte par ce triple, on trouvoit pour la ſeconde racine un nombre qui fut de telle nature qu'en achevant l'opération juſqu'à la ſeconde tranche, la ſomme des trois produits mis à part fut plus grande que ce qui ſeroit reſté après avoir retranché le premier cube, il faudroit diminuer la ſeconde racine d'une unité, ou de deux, ou de trois, juſqu'à ce que la ſouſtraction de la ſomme des trois produits put ſe faire, & la même choſe doit être obſervée à l'égard des opérations ſuivantes, s'il s'en trouve encore à faire.

IV. EXEMPLE. Pour extraire la racine cubique de la fraction $\frac{1331}{1728}$, j'extrais la racine cubique 11 du numerateur, & la racine cubique 12 du dénominateur, & j'écris $\frac{11}{12}$ pour la racine cherchée, & ainſi des autres. La démonſtration de ceci ſe trouve dans le ſixiéme exemple de l'extraction des racines des grandeurs littérales.

De l'Extraction de la racine cubique des grandeurs numeriques par approximation.

130. L'approximation de la racine cubique des nombres ſe fait à peu près comme celle de la racine quarrée, & dépend du Théorême ſuivant.

131. THEOREME. *Si l'on prend les nombres* 10, 100, 1000, &c. *qui ont tous l'unité jointe à un zero, à deux, à trois, &c. les cubes de ces nombres auront encore l'unité avec un nombre de zeros triple du nombre de zeros que leur racine contient.*

Il eſt aiſé de ſe convaincre de ceci, en faiſant les cubes des nombres propoſés, car on trouvera que le cube de 10 eſt 1000, lequel contient trois zeros, au lieu que ſa racine n'en contient qu'un, que le cube de 100 eſt 1000000, lequel contient ſix zeros, tandis que ſa racine n'en contient que trois, & ainſi des autres ; cela poſé

Soit le nombre 9 dont on demande la racine cubique, j'ajoute trois zeros ou six, ou neuf, & ainsi de suite, en augmentant toujours de trois, ce qui est la même chose que si je réduisois le nombre 9 en une fraction dont le dénominateur fut ou 1000, ou 1000000, ce qui donneroit ou $\frac{9000}{1000}$, ou $\frac{9000000}{1000000}$, &c. or la racine cubique du dénominateur est 10 quand le dénominateur est 1000, elle est 100 quand le dénominateur est 1000000, &c. par le Theorême précédent; donc en tirant la racine cubique du numérateur, j'aurois des dixiémes à la racine, lorsque la fraction seroit $\frac{9000}{1000}$, des centiémes lorsque la fraction seroit $\frac{9000000}{1000000}$, &c. & j'aurois toujours un reste qui seroit moindre qu'une unité de la racine, c'est-à-dire, qui ne sçauroit augmenter la racine d'une unité. Les opérations de ceci sont faciles à faire, c'est pourquoi je me dispense de les donner pour être plus court; mais voici un Theorême par le moyen duquel nous ferons voir que ce qui reste de l'extraction, ne peut augmenter la racine d'une unité.

132. THEOREME. *Si deux nombres ne different que de l'unité, le cube du plus grand surpasse le cube du moindre de trois fois le quarré de la racine du moindre, plus trois fois cette racine, plus l'unité.*

DEMONSTRATION. Je nomme le plus petit nombre a, & par conséquent le second sera $a+1$; je fais le cube de $a+1$, & j'ai $a^3+3aa+3a+1$; je retranche de ce cube le cube a^3 du petit nombre, & le reste $3aa+3a+1$ est l'excès du grand sur le petit; or cet excès contient trois quarrés de la racine a du petit, plus trois fois cette racine, plus l'unité; donc, &c.

$$\begin{array}{ll}
a+1 & \\
a+1 & \\
\hline
aa+a+1 & \\
\quad +a & \\
\hline
aa+2a+1 & \textit{Quarré} \\
a+1 & \\
\hline
a^3+2aa+a & \\
\quad +aa+2a+1 & \\
\hline
a^3+3aa+3a+1 & \textit{Cube du grand.} \\
a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots ? & \textit{Cube du petit.} \\
\hline
3aa+3a+1 & \textit{Différence.}
\end{array}$$

133. Pour faire donc voir que ce qui reste après l'extraction d'une racine cubique ne sçauroit augmenter cette racine d'une unité, prenons le nombre 9, & tirons-en la racine ainsi que je viens de l'enseigner, c'est-à-dire multiplions 9 par 1000, & divisons-le par 1000, ce qui donnera la fraction $\frac{9000}{1000}$ égale à 9; or la racine cubique du dénominateur est 10; tirant donc la racine

cubique du numérateur, laquelle eſt 20, nous aurons pour la racine approchée $\frac{20}{10}$, ou 2, avec un reſte 1000; ainſi le numérateur 9000 diminué de ce reſte, c'eſt-à-dire 8000 ſeroit exactement le cube du numerateur 20 de la racine; or ſi l'on veut que le reſte 1000 puiſſe donner une unité de plus à la racine, c'eſt-à-dire que cette racine puiſſe être 21, au lieu de 20, il faudra néceſſairement que ce reſte ſoit égal à trois fois le quarré de la racine 20, plus trois fois cette racine, plus l'unité: mais ſi ce reſte 1000 étoit égal à la ſomme de ces trois quantités, ce reſte ajouté au cube 8000 de 20 ſeroit exactement le cube de 21, & par conſéquent après avoir tiré la racine de 9000, on auroit 21 à la racine, & il ne reſteroit rien.

```
9|000 (20
8      10
1.000 .
12
0000
1000
```

134. Et il ne faut pas dire que ſi on réduiſoit le nombre 9 en une fraction plus grande, par exemple en $\frac{9000000}{1000000}$, ou $\frac{9000000000}{1000000000}$, &c. il pourroit arriver qu'après l'extraction de la racine il ne reſteroit rien; car ſi cela étoit, on pourroit trouver la racine exacte de 9, puiſque la fraction dont on auroit tiré la racine ſeroit égale à 9, & cette racine ſeroit ou un nombre entier, ou une fraction moindre que l'unité, ou enfin un entier & fraction; or cette racine ne peut pas être un nombre entier, puiſqu'il n'y a point de nombre entier qui en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement lui-même produiſe 9, & que d'ailleurs ſi cette racine étoit un nombre entier, on la trouveroit par les regles ordinaires ſans être obligé de réduire le nombre 9 en fraction; elle ne peut pas être non plus une fraction moindre que l'unité, car une fraction moindre que l'unité produit une fraction encore moindre qu'elle, (*N.* 119.) & ce produit multiplié par la même fraction produit une autre fraction encore moindre que lui (*N.* 119.); enfin la racine ne peut pas être un entier & fraction, parce qu'un entier & fraction multiplié par lui-même produit un entier & fraction (*N.* 119.), & que ce produit multiplié par l'entier & fraction qui l'a produit, doit encore produire un entier & fraction dont la racine ne peut pas être exacte, & par conſéquent on doit toujours trouver un reſte.

135. Comme il ſe rencontre plus de nombres qui ne ſont pas quarrés que des nombres quarrés, il eſt bon de ſe former à ces ſortes d'approximation.

136. On trouve dans quelques Livres d'Arithmetique des approximations qui ne ſont appuyées ſur aucun fondement & dont il faut ſe défier.

Du Calcul des grandeurs Radicales.

137. Les grandeurs *radicales* sont les mêmes que celles que nous avons nommées *sourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommensurables* (*N.* 104.), le nombre ou la lettre qui est sous le signe est la puissance dont on veut extraire la racine, & le signe radical avec le nombre qu'on écrit au-dessus marque de quel dégré est la racine qu'on veut extraire. $\sqrt{a}$, ou $\sqrt[2]{a}$, marque qu'on veut extraire la racine quarrée de la grandeur a; $\sqrt[3]{b}$ marque qu'on veut tirer la racine cubique de la grandeur b considerée comme un cube, & ainsi des autres.

138. Quoique les grandeurs radicales soient incommensurables en elles-mêmes, de façon qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelque autre grandeur connuë; cependant il peut se faire qu'elles soient *commensurables entr'elles.* Par exemple on ne peut pas exprimer ce que c'est que $\sqrt{3}$ par rapport à aucun nombre entier ou rompu, ou composé d'entier & de fraction, cependant on connoît aisément que $\sqrt{3}$ est le tiers de $3\sqrt{3}$, le quart de $4\sqrt{3}$, &c. & la même chose arrivera toutes les fois que les grandeurs qui sont sous le signe radical seront les mêmes, & que le signe radical sera du même dégré; car si l'une ou l'autre de ces deux conditions manquoient, les grandeurs radicales n'auroient pas plus de rapport entre elles qu'elles n'en ont avec des entiers ou des fractions, ou des entiers & fractions; ainsi le rapport de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$ ne peut s'exprimer quoique les racines soient du même genre, & la raison en est que les grandeurs qui sont sous le signe sont différentes: de même $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{2}$ n'ont point un rapport qu'on puisse exprimer, parce que les dégrés 3 & 4 de leurs racines sont différens, quoique le nombre qui est sous la racine soit le même de part & d'autre.

139. Quand les dégrés des signes radicaux sont les mêmes, & que les grandeurs qui sont sous le signe sont aussi les mêmes, les grandeurs radicales se nomment *communicantes* ou *commensurables entr'elles.*

140. On peut faire toutes les operations de l'Arithmétique & de l'Algebre sur les grandeurs radicales de même que sur les grandeurs qui ne le sont pas, moyennant certaines préparations qui dépendent des deux Théorêmes suivans.

141. THEOREME. *Si l'on multiplie deux quarrés l'un par l'autre, le produit sera un nouveau quarré dont la racine sera égale au produit*

des racines quarrées des deux quarrés, la même chose doit s'entendre de deux cubes multipliés l'un par l'autre, de deux puissances, quatriémes, cinquiémes, &c.

Soient les deux quarrés aa & bb, je les multiplie l'un par l'autre, & le produit est $aabb$, dont la racine quarrée ab est égale au produit des racines a, b, des deux quarrés. De même soient les deux cubes a^3, b^3, le produit de l'un par l'autre est a^3b^3 dont la racine cubique ab est égale au produit des deux racines a, b, des deux cubes, & ainsi des autres.

142. THEOREME. *La racine quarrée d'une grandeur est égale à la racine quatriéme du quarré de cette grandeur; à la racine sixiéme de son cube, à la racine huitiéme de sa quatriéme puissance, & ainsi de suite, en augmentant l'exposant de la racine de deux unités, à mesure que les puissances de la grandeur donnée augmentent d'une unité.*

De même la racine cubique d'une grandeur est égale à la racine sixiéme du quarré de cette grandeur, à la racine neuviéme de son cube, &c. en augmentant l'exposant de la racine de trois unités, à mesure que les puissances de la grandeur donnée augmentent de l'unité, & il faut dire la même chose des racines plus élevées en augmentant de quatre unités de 5, 6, &c. les exposans des racines à mesure que les puissances de la grandeur donnée augmentent de l'unité.

Prenons les puissances successives de la grandeur a, lesquelles sont a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, &c. la grandeur a est certainement la racine quarrée de aa, la racine cubique de a^3, la racine quatriéme de a^4, & ainsi de suite; or le quarré de aa est a^4, & par conséquent la racine quarrée de la grandeur aa est la même que la racine quatriéme de a^4 quarré de aa. De même le cube de aa est a^6, sa quatriéme puissance est a^8, sa cinquiéme puissance est a^{10}, &c. & par conséquent la racine quarrée de aa est la racine sixiéme du cube de aa, la racine huitiéme de sa quatriéme puissance, la racine dixiéme de sa cinquiéme puissance, &c.

De même le quarré de a^3 est a^6, son cube est a^9, sa quatriéme puissance est a^{12}, &c. donc la racine cubique de a^3 laquelle est a, est égale à la racine sixiéme du quarré de a^3, à la racine neuviéme de son cube, à la racine douziéme de sa quatriéme puissance, &c.

On trouvera aussi que a qui est la racine quatriéme de a^4 est la racine huitiéme du quarré de a^4, la racine douziéme de son cube, &c. en augmentant toujours l'exposant de la racine de 4,

à mesure que l'exposant des puissances de a^4 augmenté de l'unité, & de même des autres puissances. Tout ceci est extrêmement facile, & s'il y a quelque chose qui puisse faire de la peine, ce n'est uniquement que l'énoncé qu'il faut se rendre familier.

Changer une grandeur non radicale en une autre qui soit radicale & dont l'exposant soit donné.

143. Soit la grandeur radicale a qu'il faut changer en une autre qui ait le signe $\sqrt[2]{}$, ou simplement $\sqrt{}$, car l'un & l'autre sont la même chose ; je fais le quarré de a lequel est aa, & j'écris $\sqrt[2]{.aa}$, ou $\sqrt{aa}$; car cette expression $\sqrt{aa}$, signifie la racine quarrée du quarré aa, laquelle est a, & par conséquent $a = \sqrt{aa}$.

Si le signe radical donné avoit été $\sqrt[3]{}$, j'aurois élevé la grandeur a à sa troisiéme puissance a^3, & j'aurois écrit $\sqrt[3]{a^3}$; car $\sqrt[3]{a^3}$ signifie la racine cubique de a^3, mais cette racine est a, donc $a = \sqrt[3]{a^3}$, & ainsi des autres.

La regle est donc d'élever la grandeur donnée à la puissance marquée par le dégré de la racine, & d'écrire cette puissance sous le signe radical, en marquant au-dessus le dégré de la racine, & cela s'appelle *faire passer une grandeur sous le signe radical.*

Pour changer $a\sqrt{b}$ en une autre grandeur où tout se trouve sous le signe, je fais le quarré de a qui est aa, & j'écris $\sqrt{aab}$; car a est la même chose que $\sqrt{aa}$, & a multiplié par $\sqrt{b}$ est la même chose que $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$, c'est-à-dire la racine du quarré aa multipliée par la racine du quarré b ; mais quand deux racines quarrées se multiplient, elles produisent un nombre qui est la racine du quarré que produiroient les deux quarrés des deux racines (*N.* 141.), & le produit des deux quarrés seroit aab ; donc la racine produite par les deux racines $\sqrt{aa}$, $\sqrt{b}$ doit être $\sqrt{aab}$, & ainsi des autres.

Tirer une grandeur hors du signe radical.

144. Soit la grandeur $\sqrt{4}$ qu'il faut tirer hors du signe radical, je dis la racine quarrée de 4 est 2, ainsi j'écris 2 au lieu de $\sqrt{4}$; de même au lieu de $\sqrt[3]{a^3}$, j'écris a ; au lieu de $\sqrt[4]{a^4b^4}$, j'écris ab, & ainsi des autres, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

Mais si la grandeur qui est sous le signe n'est pas une puissance

parfaite du dégré marqué par la racine, j'examine si elle n'est pas le produit de quelque puissance de ce dégré multipliée par une autre grandeur qui ne soit pas élevée à ce dégré, & si cela est, je laisse sous le signe la grandeur qui n'est pas du même dégré, & tirant la racine de l'autre, je l'écris hors du signe.

Dans $\sqrt{aab}$ je vois que le quarré *aa* est multiplié par *b* qui n'est pas un quarré, je laisse *b* sous le signe, & tirant la racine *a* du quarré *aa*, j'écris $a\sqrt{b}$, au lieu de $\sqrt{aab}$.

De même dans $\sqrt{18}$, la grandeur 18 n'est pas un quarré, mais je vois que 18 est le produit du quarré 9 par 2 qui n'est pas un quarré; je laisse 2 sous le signe, & tirant la racine 3 du quarré 9 j'écris $3\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{18}$.

Dans $\sqrt[3]{a^3c}$ la grandeur a^3 est un cube, & la grandeur *c* ne l'est pas, je laisse *c* sous le signe, & tirant la racine cubique de a^3 qui est *a*, j'écris $a\sqrt[3]{c}$, au lieu de $\sqrt[3]{a^3c}$.

Dans $\sqrt[3]{54}$ la grandeur 54 n'est pas un cube, mais je vois que 54 est le produit de 27 par 2; or 27 est un cube, & 2 ne l'est pas, je laisse 2 sous le signe, & tirant la racine cubique du cube 27, j'écris $3\sqrt[3]{2}$ au lieu de $\sqrt[3]{54}$, &c.

La raison de ceci est évidente, car dans $\sqrt{aab}$, je puis regarder la grandeur *aab* comme étant le produit du quarré *aa* par le quarré *b*; mais deux quarrés qui se multiplient produisent un autre quarré dont la racine est égale au produit des racines quarrées des deux quarrés qui se sont multipliés (*N.* 141.), donc $\sqrt{aab}$ est le produit des racines des quarrés *aa*, *b*, c'est-à-dire le produit de $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$; mais $\sqrt{aa}$ est la même chose que *a*; donc $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$, ou $\sqrt{aab}$ est la même chose que $a\sqrt{b}$, & on démontrera la même chose dans tous les autres cas.

145. Quand on tire les grandeurs hors du signe, cela s'appelle *réduire les radicaux à leurs exposans ou à leurs moindres termes.*

146. Il arrive quelquefois qu'en réduisant deux grandeurs qui ont le même signe à leurs moindres termes, on rend ces grandeurs commensurables entr'elles, au lieu qu'elles ne l'étoient pas auparavant: par exemple, si on réduit les grandeurs $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$ à leurs moindres termes, on trouvera $2\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$ qui sont des grandeurs commensurables entr'elles.

Réduire

Réduire à un même signe deux ou plusieurs grandeurs Radicales qui ont différens signes.

147. Pour réduire à un même signe les deux grandeurs $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[6]{b}$, il s'agit de faire devenir 6 l'exposant 2 de $\sqrt[2]{a}$, ce qui peut se faire en le prenant trois fois ; or $\sqrt[2]{a}$ étant la racine quarrée de a est égal à la racine quatriéme du quarré de a, & à la racine sixiéme de son cube, (*N.* 142.) donc élevant a au cube, ce qui fait a^3, j'écris $\sqrt[6]{a^3}$, qui est la même chose que $\sqrt[2]{a}$, ainsi j'ai $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b}$ qui ont le même signe.

Pour réduire au même signe les deux grandeurs $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[8]{3}$, l'exposant 2 de $\sqrt[2]{2}$ est contenu précisément quatre fois dans l'autre exposant, ainsi il faut le prendre quatre fois pour avoir l'exposant 8 ; or $\sqrt[2]{2}$ étant la racine quarrée de 2, est égal à la racine quatriéme du quarré de 2, ou à la racine sixiéme du cube de 2, ou enfin à la racine huitiéme de la quatriéme puissance de 2 ; élevant donc 2 à sa quatriéme puissance 16, j'écris $\sqrt[8]{16}$, au lieu de $\sqrt[2]{2}$, & j'ai les deux grandeurs $\sqrt[8]{16}$ & $\sqrt[8]{3}$ qui ont le même signe, &c.

148. Si le moindre des deux exposans n'étoit pas exactement contenu dans le plus grand, on multiplieroit l'un par l'autre, & le produit seroit l'exposant de la racine de l'une & l'autre grandeur.

Pour réduire au même signe $\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[5]{b}$, je multiplie les exposans 3 & 5 l'un par l'autre, ce qui donne 15 qui est l'exposant que la racine de l'une & l'autre grandeur doit avoir ; or $\sqrt[3]{a}$ étant la racine cubique de a, est par conséquent la racine sixiéme du quarré de a, la racine neuviéme du cube de a, la racine douziéme de sa 4e. puissance, & la racine quinziéme de sa 5e. puissance ; ainsi élevant a à la cinquiéme puissance a^5, j'écris $\sqrt[15]{a^5}$ au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de même $\sqrt[5]{b}$ étant la racine cinquiéme de b, est par conséquent la racine dixiéme du quarré de b, & la racine quinziéme de son cube ; donc élevant b au cube, ce qui donne b^3, j'écris $\sqrt[15]{b^3}$ au lieu de $\sqrt[5]{b}$, & j'ai $\sqrt[15]{a^5}$, & $\sqrt[15]{b^3}$ qui est le même signe.

Pour réduire au même signe les trois grandeurs $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, & $\sqrt[4]{c}$, je multiplie les trois exposans 2, 3, 4, les uns par les autres, ce qui donne 24, mais comme 12 peut être divisé éxactement par 2, par 3, & par 4, je prens 12 pour l'exposant commun des racines ; or $\sqrt[2]{a}$ étant la racine quarrée de a est aussi la racine quatriéme de son quarré, la racine sixiéme de son cube, la racine huitiéme de sa quatriéme puissance, la racine dixiéme de sa cinquiéme puissance, & la racine douziéme de sa sixiéme puissance; ainsi élevant a à la sixiéme puissance ce qui donne a^6, j'écris $\sqrt[12]{a^6}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$, & faisant le même raisonnement à l'égard des deux autres, je trouve $\sqrt[12]{b^4}$, & $\sqrt[12]{c^3}$, & ainsi des autres.

Ajouter les grandeurs Radicales.

149. Quand les grandeurs radicales sont communicantes, ou commensurables entr'elles, on ajoute ensemble les grandeurs qui sont hors le signe, ainsi pour ajouter $2\sqrt{3}$, avec $4\sqrt{3}$, on ajoute les deux grandeurs 2 & 4 qui sont hors le signe, ce qui fait 6, & l'on écrit $6\sqrt{3}$. Pour ajouter $3\sqrt{5}$ avec $4\sqrt{5}$, on écrit $7\sqrt{5}$, & de même des autres.

Mais si ces grandeurs ne sont pas communicantes, on les réduit au même signe, & ensuite à leur exposans, & si par ce moyen elles deviennent commensurables entr'elles, on les ajoute comme il vient d'être dit, mais si elles ne le sont pas, on les ajoute en mettant entr'elles le signe +.

Pour ajouter $\sqrt[3]{81}$ & $\sqrt[3]{192}$, je trouve que la grandeur 81 du premier est le produit du cube 27 par 3 ; je laisse 3 sous le signe, & tirant la racine cubique de 27 qui est 3, j'écris $3\sqrt[3]{3}$, au lieu de $\sqrt[3]{81}$; je vois de même que la grandeur 192 de la seconde est le produit du cube 64 par 3, je laisse 3 sous le signe, & tirant la racine cubique de 64 qui est 4, j'écris $4\sqrt[3]{3}$, cela fait j'ajoute les grandeurs 3 & 4 qui sont sous le signe, ce qui fait 7, & j'écris $7\sqrt[3]{3}$.

Pour ajouter ensemble $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{4}$, je multiplie les deux exposans, ce qui donne l'exposant commun 6, ensuite opérant comme il a été dit (*N.* 147.) j'ai $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{16}$, & comme je ne puis pas

réduire ces grandeurs à des moindres termes, je les ajoute enſemble en écrivant $\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{16}$, mais le plus court dans ces occaſions eſt d'écrire $\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{4}$, dès qu'on voit qu'on ne ſçauroit les rendre communicantes.

Souſtraire les grandeurs Radicales.

150. Si les grandeurs ſont communicantes, on ſouſtrait la grandeur qui eſt hors du ſigne de la petite, de la grandeur qui eſt hors du ſigne de la grande, & le reſte écrit avec le ſigne & la grandeur qui eſt par deſſous eſt la Souſtraction demandée.

Pour ſouſtraire $2\sqrt{3}$ de $6\sqrt{3}$, on retranche 2 de 6, ce qui fait 4, & l'on écrit $4\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Mais ſi ces grandeurs ne ſont pas communicantes, on tâche de les rendre telles par les moyens ci-deſſus, & ſi elles le deviennent, on ſouſtrait l'une de l'autre ainſi qu'on vient de voir, mais ſi elles ne peuvent le devenir, on fait la ſouſtraction en employant le ſigne —.

Pour ſouſtraire $\sqrt[3]{4}$ de $\sqrt[2]{2}$, on les réduit au même ſigne, ce qui donne $\sqrt[6]{16}$ & $\sqrt[6]{8}$, & l'on écrit $\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{16}$, ou ſimplement $\sqrt[2]{2}-\sqrt[3]{4}$.

Multiplier les grandeurs Radicales.

151. Avant de multiplier les grandeurs propoſées, il faut avoir ſoin de les réduire à leurs moindres expreſſions, & ſur tout de leur donner un même ſigne, parce qu'il n'y a que les racines d'un même dégré qui produiſent une racine d'un même dégré. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ en ſe multipliant elles-mêmes produiſent $\sqrt[3]{10}$, c'eſt-à-dire la racine du cube qui feroit le produit des cubes 2 & 5 (*N.* 141.), mais $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{5}$ ne produiſent ni $\sqrt[2]{10}$ ni $\sqrt[3]{10}$.

Ayant donc fait les préparations dont nous venons de parler, on multiplie les grandeurs qui ſont hors du ſigne par elles-mêmes, & celles qui ſont ſous le ſigne auſſi, & l'on écrit les deux produits en mettant entre deux le ſigne radical.

Pour multiplier $\sqrt[2]{a}$ par $\sqrt[2]{b}$, on écrit $\sqrt[2]{ab}$, & pour multiplier $a\sqrt[3]{c}$ par $b\sqrt[3]{d}$, on écrit $ab\sqrt[3]{cd}$. De même $3\sqrt{2}$ par $4\sqrt{6}$ donne $12\sqrt{12}$, ou bien en réduiſant $\sqrt{12}$ à ſes moindres termes, ce qui fait $2\sqrt{3}$, à cauſe que 12 eſt le produit du quarré 4 par le nombre 3 qui n'eſt pas un quarré, & l'on écrit $12\times2\sqrt{3}$, ou $24\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Pour multiplier $a + c\sqrt{d}$ par $a + b\sqrt{c}$, on écrit ces deux nombres l'un sous l'autre, les entiers sous les entiers & les radicaux sous les radicaux, & on multiplie à la façon ordinaire, ainsi a par a donne aa; a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$; a par $b\sqrt{c}$ donne $ab\sqrt{c}$, & $c\sqrt{d}$ par $b\sqrt{c}$ donne $cb\sqrt{dc}$.

$$\begin{array}{l} a + c\sqrt{d} \\ a + b\sqrt{c} \\ \hline aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc} \end{array}$$

Pour multiplier $a + b\sqrt{d}$ par $a - b\sqrt{d}$, on fait la multiplication de même que dans l'exemple précédent, & on trouve $aa - bb\sqrt{dd}$; mais $\sqrt{dd}$ est la même chose que d, donc $-bb\sqrt{dd}$ est la même chose que $-bb \times d$, ou $-bbd$, & par conséquent le produit est $aa - bbd$.

$$\begin{array}{lll} & a + b\sqrt{d} & \\ & a - b\sqrt{d} & \\ \hline aa & + ab\sqrt{d} & - bb\sqrt{dd} \\ & - ab\sqrt{d} & \\ \hline aa & & - bb\sqrt{dd} \\ \text{ou } aa & & - bbd \end{array}$$

Ceci fait voir que la multiplication fait quelquefois disparoître les grandeurs radicales.

Diviser les grandeurs Radicales.

152. Avant de diviser on doit avoir soin de faire les mêmes préparations que pour la multiplication, après quoi on divise les grandeurs qui sont hors du signe par celles qui sont hors du signe, & celles qui sont sous le signe par celles qui sont sous le signe, & l'on écrit les deux quotients.

$\sqrt{ab}$ divisé par $\sqrt{b}$ donne $\sqrt{a}$; car multipliant le quotient $\sqrt{a}$ par le diviseur $\sqrt{b}$, on retrouve le dividende $\sqrt{ab}$. De même $cb\sqrt{a^2d}$ divisé par $c\sqrt{ad}$ donne $b\sqrt{a}$, & ainsi des autres.

Que si la division ne peut pas se faire, on écrit le diviseur sous le dividende; par exemple pour diviser $a\sqrt{c}$ par $b\sqrt{d}$, on écrit $\frac{a\sqrt{c}}{a\sqrt{d}}$, &c.

Pour diviser la grandeur complexe $aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc}$ par la grandeur complexe $a + c\sqrt{d}$, on écrit le diviseur sous le dividende, & l'on fait la division à l'ordinaire; ainsi aa divisé par a donne a, & multipliant le quotient a par les termes du diviseur, j'ai a par a donne aa lequel retranché de aa ne laisse rien; a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$ qui retranché de $ac\sqrt{d}$ ne laisse rien.

$$\begin{array}{l} aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc}\ (a + b\sqrt{c} \\ \hline a + c\sqrt{d} \\ \hline \qquad\qquad a + c\sqrt{d} \\ \hline \qquad\qquad 0\ ,\ \ 0 \end{array}$$

J'écris le diviseur sous les autres caracteres du dividende, & je trouve que $ab\sqrt{c}$ divisé par a donne au quotient $b\sqrt{c}$, & multi-

pliant ce quotient par le diviseur, & faisant ensuite la Soustraction il ne reste rien ; ainsi le quotient est $a+b\sqrt{c}$, & c'est la preuve de la premiere multiplication composée (*N.* 151.)

Pour diviser la grandeur complexe $aa-bbd$ par $a-b\sqrt{d}$, je vois que dans le second terme bbd du dividende, la grandeur d est la même chose que $\sqrt{dd}$, & que par conséquent bbd est la même chose que $bb\sqrt{dd}$, ainsi j'écris $aa-bb\sqrt{dd}$ pour le dividende, & ensuite le diviseur par dessous ; aa divisé par a donne le quotient a, je multiplie a par a, ce qui donne aa qui retranché de aa ne laisse rien ; je multiplie a par $-b\sqrt{d}$, ce qui donne $-ab\sqrt{d}$, & comme il n'y a point de produit de cet espece dans le dividende, je suppose que ce dividende contienne $-ab\sqrt{d}+ab\sqrt{d}$, ce qui ne l'augmente ni ne le diminue ; donc $-ab\sqrt{d}$ retranché de $-ab\sqrt{d}$ ne laisse rien. J'écris $+ab\sqrt{d}$ par dessous, & abbaissant le terme $-bb\sqrt{dd}$, j'écris le diviseur par dessous. $ab\sqrt{d}$ divisé par a donne au quotient $b\sqrt{d}$, & multipliant ce quotient par le diviseur, puis faisant la Soustraction, il ne reste rien, le quotient est donc $a+b\sqrt{d}$, & c'est la preuve de la seconde multiplication (*N.* 151.).

$$\begin{array}{l} aa-bb\sqrt{dd}\,(\,a+b\sqrt{d} \\ \underline{a-b\sqrt{d}\qquad\qquad} \\ +ab\sqrt{d}-bb\sqrt{dd} \\ \underline{\quad a-b\sqrt{d}\quad} \\ \quad 0 \qquad 0 \end{array}$$

Que si en opérant comme on vient de dire, la division n'étoit pas exacte, on se contenteroit d'écrire le dividende sous le diviseur comme une fraction.

Du Calcul des Exposans.

153. Le *Calcul des Exposans* est la maniere de multiplier une puissance d'une grandeur par une autre puissance de la même grandeur, de diviser l'une par l'autre, d'élever une puissance de cette grandeur à une autre puissance, ou d'en extraire la racine en ne se servant que des exposans, en voici les régles

154. Soit la grandeur a ou a^1, dont les puissances sont a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, &c. si l'on veut multiplier la puissance a^2 par la puissance a^3, on ajoute l'exposant 2 à l'exposant 3, & la somme 5 est l'exposant de la puissance qui sera le produit des deux, ainsi cette puissance sera a^5 ; car la puissance à multiplier a^2 est la même chose que aa, & le multiplicateur a^3 est la même chose que aaa ; mais pour multiplier aa par aaa, il faut écrire a^5, donc le produit a^2 par a^3 est effectivement la puissance a^5 dont l'exposant 5 est la somme des exposans 2 & 3. De même pour mul-

tiplier a^3 par a^4, on ajoute l'exposant 3 à l'exposant 4, ce qui fait 7, & l'on a a^7 pour le produit; car a^3 par a^4 est la même chose que *aaa* par *aaaa*, ce qui donne *aaaaaaa*, ou a^7.

155. Pour diviser une puissance de la grandeur *a* par une autre puissance de la même grandeur, il faut retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, & le reste est l'exposant du quotient.

Pour diviser a^6 par a^2, on retranche l'exposant 2 de l'exposant 6, ce qui donne l'exposant 4, & l'on a a^4 pour le quotient; car a^6 est la même chose que *aaaaaa*, & a^2 est la même chose que *aa*; mais pour diviser *aaaaaa* par *aa*, on écrit *aaaa* qui est la même chose que a^4, donc le quotient de a^6 divisé par a^2 est a^4, dont l'exposant 4 est le reste de la Soustraction des deux exposans.

156. Pour élever une puissance donnée de *a* à une autre puissance dont l'exposant soit donné, on multiplie l'exposant de la puissance donnée par l'exposant donné, & le produit est l'exposant de la puissance cherchée.

Si l'on veut donc élever la puissance a^3 au quarré, on multiplie l'exposant 3 par l'exposant 2 du quarré ou de la seconde puissance, ce qui fait 6, & a^6 est le quarré de a^3; car a^3 étant la même chose que *aaa*, si l'on multiplie *aaa* par lui-même, on aura *aaaaaa* qui est la même chose que a^6. De même pour élever la puissance a^2 à sa quatriéme puissance, on multiplie 2 par l'exposant 4 de la quatriéme puissance, ce qui fait 8, & l'on écrit a^8 pour le produit; car *aa* multiplié par lui-même donne sa seconde puissance *aaaa*, & celle-ci multipliée par *aa* donne la troisiéme puissance, *aaaaaa* de *aa*, & enfin cette troisiéme multipliée par *aa* donne *aaaaaaaa*, ou a^8 qui est la quatriéme puissance de *aa* ou de a^2.

157. Pour extraire la racine d'une puissance de la grandeur *a*, on divise l'exposant de la puissance par l'exposant de la racine, & le quotient est l'exposant de la racine cherchée.

Si l'on veut donc extraire la racine seconde de a^6, on divise 6 par 2 ce qui donne 3, & l'on a a^3 pour la racine cherchée; car si pour élever a^3 à la seconde puissance, il faut par la régle précédente multiplier l'exposant 3 par l'exposant 2 de la puissance à laquelle on veut élever a^3, ce qui donne l'exposant 6 de la seconde puissance a^6 de a^3, il est clair que pour tirer la racine quarrée il faudra diviser 6 par 2 pour avoir a^3 qui est la racine quarrée de a^6.

158. Ces régles nous font voir que lorsqu'on veut opérer par

les expoſans, ce que l'on devroit faire par la multiplication & la diviſion, on le fait par l'addition & la ſouſtraction, & ce que l'on devroit faire par l'élévation des puiſſances ou par l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion.

159. Il ſuit delà que ſi on diviſe a par a, c'eſt-à-dire a^1 par a^1, on aura a^{1-1}, ou a^0 (*N.* 155.), or a diviſé par a donne 1 au quotient, donc a^0 eſt égal à 1, ce qu'il faut bien remarquer.

160. Il ſuit encore que ſi l'on diviſe a^0 par a^1, on aura a^{0-1}, & ſi l'on diviſe a^0 par a^2, on aura a^{0-2}, c'eſt-à-dire a^{-2}, de même en diviſant a^0 par a^3, on auroit a^{0-3}, ou a^{-3}, & ainſi de ſuite, ce qui donneroit les puiſſances négatives de a qui ſeroient a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. de ſorte que a^0 ſeroit entre les puiſſances poſitives de a, & les négatives, comme on le voit ici.

$a^{-\infty}$, &c. $a^{-5}.a^{-4}.a^{-3}.a^{-2}.a^{-1}.\ a^0.\ a^1.a^2.a^3.a^4.a^5$, &c. a^{∞}.

La grandeur a^{∞}, que l'on voit ici ſignifie la grandeur a élevée à une puiſſance infinie, laquelle par conſéquent ſeroit une puiſſance infiniment grande, & la puiſſance $a^{-\infty}$ ſignifie a^0 diviſé par a^{∞}, ce qui donne la puiſſance négative $a^{0-\infty}$, laquelle ſeroit une puiſſance infiniment petite; car a^0 étant égal à 1, il eſt clair que 1 diviſé par une grandeur infinie a^{∞} donneroit un quotient infiniment petit.

161. Les puiſſances négatives peuvent s'exprimer de façon que leurs expoſans deviennent poſitifs; car a^0 étant la même choſe que 1, ſi l'on diviſe à l'ordinaire 1 par a^1, on aura $\frac{1}{a^1}$, qui ſera égal à a^{-1}. De même ſi l'on diviſe 1 par a^2, on aura $\frac{1}{a^2}$ égal à a^{-2}, & ainſi des autres, de ſorte que les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. ſe changeront en celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c. dont les expoſans ſont devenus poſitifs, ce qui ſe fait comme on voit en faiſant paſſer chaque puiſſance négative au dénominateur d'une fraction dont le numerateur eſt 1, & en mettant à ce dénominateur un expoſant poſitif au lieu du négatif qu'il avoit auparavant.

162. De même que les puiſſances négatives de a peuvent devenir poſitives en paſſant au dénominateur d'une fraction dont le numérateur ſoit 1; de même auſſi les puiſſances poſitives peuvent devenir négatives, en paſſant au dénominateur d'une fraction dont l'expoſant ſoit 1; ainſi les puiſſances a^1, a^2, a^3, a^4, &c.

peuvent se changer en celles-ci qui sont les mêmes $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-2}}$, $\frac{1}{a^{-3}}$, &c. ce que je prouve ainsi : si je divise a^0 par la puissance négative a^{-1}, en me servant du calcul des exposans, je dois retrancher l'exposant négatif de a^{-1} de l'exposant o de a^0 (*N.* 155.); mais retrancher -1, c'est donner 1, donc le reste de la soustraction doit être $0+1$, ou 1, & par conséquent le quotient de la division doit être a^1 ; or a^0 étant égal à 1, il est clair qu'en divisant 1 par a^{-1}, le quotient est $\frac{1}{a^{-1}}$, donc le quotient précédent a^1 est égal au quotient $\frac{1}{a^{-1}}$, & on prouvera de même que a^2 est égal à $\frac{1}{a^{-2}}$, &c.

163. Ce que je viens de dire suppose que les puissances positives ou négatives n'aient point d'autres coëfficiens que l'unité, mais si elles en avoient d'autres, ces coëfficiens devroient rester au numerateur, tandis que les puissances passeroient au dénominateur ; ainsi pour rendre positive $2a^{-1}$, on laisseroit le coëfficient au numerateur, & l'on écriroit $\frac{2}{a^1}$, car $2a^{-1}$ est la même chose que $2\times a^{-1}$; or a^{-1} est le même que $\frac{1}{a^1}$, donc $2\times a^{-1}$ est encore le même que $2\times\frac{1}{a^1}$, ou $\frac{2}{a^1}$. De même pour rendre négative la puissance $2a^2$, on écriroit $\frac{2}{a^{-2}}$ à cause que $2a^2$ est égal à $2\times a^2$, & a^2 égal à $\frac{1}{a^{-2}}$, & par conséquent $2\times a^2$ est égal à $\frac{2}{a^{-2}}$, &c.

164. Il suit encore des régles que nous avons données, que si l'on veut la racine quarrée de a ou sa racine cubique, ou sa racine quatriéme, &c. il faut écrire $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. & que par conséquent on peut se passer des signes radicaux $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. De même pour tirer la racine cinquiéme de a^4, on écrira $a^{\frac{4}{5}}$; pour marquer la racine septiéme de a^2, on écrira $a^{\frac{2}{7}}$, &c.

165. Ce calcul est commode non-seulement pour débarrasser des signes radicaux, mais encore parce qu'on peut multiplier des puissances de differente espece les unes par les autres ; car pour multiplier $a^{\frac{1}{2}}$ par $a^{\frac{1}{3}}$, on écrira $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, ou bien en réduisant les deux fractions en même dénomination & en les ajoutant ensemble on aura $a^{\frac{5}{6}}$ qui signifie que ces deux racines multipliées l'une par l'autre

l'autre donnent la racine sixiéme de la puissance 5 de la grandeur a, &c.

Du Calcul des exposans des puissances des multinomes.

166. Il arrive quelquefois qu'au lieu de faire les puissances d'un multinome, on se contente d'écrire ce multinome avec une ligne par dessus qui couvre tous les termes, & à droite de cette ligne on met un nombre qui marque à quelle puissance on veut faire entendre que le multinome doit être élevé: ainsi au lieu des puissances du binome $a+b$, on écrit $\overline{a+b}^1$ pour marquer la 1re. puissance ou le binome lui-même; $\overline{a+b}^2$ pour marquer qu'il faut l'élever au quarré; $\overline{a+b}^3$ pour marquer qu'il faut en faire le cube; $\overline{a+b}^4$ pour signifier qu'on doit l'élever à la quatriéme puissance, & de même des autres.

167. Si l'on exprime donc les puissances d'un multinome ainsi que nous venons de le dire, il est visible qu'on peut appliquer à ces puissances les regles du calcul des exposans; par exemple pour multiplier la puissance $\overline{a+b}^2$ du binome $a+b$ par la puissance $\overline{a+b}^3$ du même binome, on doit écrire $\overline{a+b}^5$, en ajoutant les deux exposans ensemble. Pour diviser la puissance $\overline{a+b}^6$ par la puissance $\overline{a+b}^3$, on écrira $\overline{a+b}^3$, en retranchant de l'exposant 6 l'exposant 3. Pour élever la puissance $\overline{a+b}^3$ à son quarré, on écrira $\overline{a+b}^6$, en multipliant l'exposant 3 de la puissance par l'exposant 2 de celle à laquelle on veut l'élever. Pour extraire la racine quarrée de la puissance $\overline{a+b}^6$, on écrira $\overline{a+b}^3$, en divisant l'exposant 6 par l'exposant 2 de la racine.

De même si on divise $\overline{a+b}^1$ par lui-même, on aura $\overline{a+b}^0 = 1$, & si on divise $\overline{a+b}^0$ par $\overline{a+b}^1$, on aura la puissance négative $\overline{a+b}^{-1}$, & si on divise $\overline{a+b}^0$ par $\overline{a+b}^2$, on aura la puissance négative $\overline{a+b}^{-2}$, &c.

Pour rendre positive la puissance négative $\overline{a+b}^{-2}$, on écrira

$\frac{1}{\overline{a+b}^{3}}$, & au lieu de $3\times\overline{a+b}^{-3}$, on écrira $\frac{3}{\overline{a+b}^{3}}$, mais il faut prendre garde que le coëfficient 3 doit être hors de la ligne écrite sur le multinome, car alors l'expression signifie 3 multiplié par la puissance négative $\overline{a+b}^{-3}$ de $a+b$, au lieu que si le chiffre étoit sous la ligne en cette sorte $\overline{3a+b}^{-3}$, cela signifieroit la puissance négative $\overline{3a+b}^{-3}$ du binome $3a+b$, & pour rendre cette puissance positive on écriroit $\frac{1}{\overline{3a+b}^{3}}$, & il faut bien observer ceci ; c'est pour cette raison que pour marquer que le coëfficient est hors du signe, on met toujours le signe $\times$ entre le coëfficient & la grandeur qui est sous le signe.

Pour rendre négative la puissance $\overline{a+b}^{2}$, on écrit $\frac{1}{\overline{a+b}^{-2}}$, & pour rendre négative $4\times\overline{a+b}^{3}$, on écrit $\frac{4}{\overline{a+b}^{-3}}$, &c.

Pour exprimer la racine troisiéme de $\overline{a+b}^{1}$, on écrit $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$. De même la racine quatriéme de $\overline{a+b}^{3}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$.

Si l'on veut comprendre aisément la raison de tout ceci, il n'y a qu'à prendre une grandeur x égale à $\overline{a+b}$, & alors les puissances de $a+b$ seront x, x^2, x^3, x^4, x^5, &c. sur lesquelles on pourra opérer par le calcul des exposans, mais après toutes ces opérations on pourra mettre $a+b$ au lieu de x, & on retrouvera ce qui vient d'être dit.

168. Voilà tout ce qu'il y a de plus essentiel à sçavoir touchant les opérations de l'Algébre. Voyons à present quel est l'usage que l'Analyse en fait pour la solution des problêmes numeriques. Nous verrons dans la suite comment on applique ce même calcul aux problêmes de la Geometrie.



CHAPITRE VI.

De l'Analyse.

169. ON parvient à la découverte de la vérité par deux sortes de voyes ou de Méthodes, dont l'une s'appelle *Synthèse*, & l'autre *Analyse*.

170. La *Synthèse*, autrement dite Méthode de *composition*, commence par les principes les plus simples, & s'éleve par dégrés jusqu'à ce qu'elle parvienne à la connoissance de ce qui fait l'objet de sa recherche.

171. L'*Analyse* au contraire suppose la chose faite, & descend peu à peu en examinant toutes les conséquences qui suivent de cette supposition, jusqu'à ce qu'elle ait trouvé d'une maniere claire & évidente la verité qu'elle cherchoit.

172. On voit par-là que la synthèse & l'analyse different entre elles, en ce que l'une commence par le détail, & finit par la composition, au lieu que l'autre descend de la composition au détail.

173. Les Anciens employoient la synthèse & l'analyse de même que nous, mais comme les expressions dont ils se servoient étoient particulieres & uniquement propres pour chaque question qu'ils vouloient résoudre, il étoit rare qu'ils tirassent de leur analyse les conséquences générales que nous découvrons aujourd'hui par le moyen des expressions & des caracteres dont M. Descartes nous a appris de faire usage.

174. Quoique la synthèse & l'analyse paroissent si différentes l'une de l'autre, cependant leurs principes sont les mêmes, & ces principes que je vais rapporter ici sont si simples, qu'on aura peine à croire en les lisant, qu'ils ayent pû conduire à la découverte de tant de belles vérités.

Principes ou Axiomes.

175. Le tout est plus grand que sa partie, & il est égal à ses parties prises ensemble.

176. Si une grandeur est parfaitement égale à une autre, on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre. Si $a = b$ on peut prendre a au lieu de b, & b au lieu de a.

177. Si deux grandeurs ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite & qu'on ne peut assigner, ces deux grandeurs peuvent être dites égales.

178. Il est impossible qu'une chose soit en même tems d'une façon & qu'elle ne le soit pas.

179. Si deux grandeurs sont égales chacune à une troisiéme, ces deux grandeurs sont égales. Si $a=b$, & $c=b$; donc $a=c$.

180. Si à deux grandeurs égales on ajoute ou on retranche des grandeurs égales les sommes ou les restes seront encore des grandeurs égales, & si on leur ajoute ou si on leur retranche des grandeurs inégales, les sommes ou les restes seront inégaux.

181. Si on multiplie ou si l'on divise deux grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotients seront égaux, & si on les multiplie, ou si on les divise par des grandeurs inégales, les produits ou les quotients seront inégaux.

182. Si deux grandeurs sont égales, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c. seront egaux, de même que leur double, leur triple, leur quadruple, &c. de même encore que leur quarrés, leur cubes, leur troisiémes puissances, &c. ou leurs racines seconde, troisiéme, quatriéme, &c.

De la Nature des Problêmes, & de la façon de les résoudre par l'Analyse.

183. Dans les Problêmes ou les questions qu'on propose à résoudre, il y a toujours des quantités connuës & des quantités inconnuës; si tout étoit connu, ce ne seroit plus une question, & si tout étoit inconnu, ce seroit de la magie qu'on proposeroit. Il n'y a que des Sorciers ou des Devins qui puissent parvenir à la découverte d'une verité, sans aucune connoissance préliminaire, & les Mathematiciens ne se piquent pas d'être Sorciers ou Devins; or ces Problêmes peuvent être de deux especes, les uns se nomment *déterminés*, parce qu'ils ne sont susceptibles que d'une solution, ou du moins d'un très-petit nombre, & les autres se nomment *indéterminés*, parce qu'on peut les résoudre d'une infinité de façons.

184. Pour résoudre les Problêmes déterminés, voici comme on fait 1°. On marque les grandeurs inconnuës par les dernieres lettres de l'Alphabet x, y, z, & les connuës par les premieres a, b, c, d, &c. 2°. On exprime toutes les conditions du Pro-

blême, c'est-à-dire, on fait autant d'équations particulieres que le Problême proposé renferme de conditions, car chaque condition d'un Problême est une équation comme on verra dans la suite. 3°. S'il y a plusieurs inconnuës, on prend la valeur de l'une de ces inconnuës par le moyen des équations qu'on a formées, & l'on substitue la valeur de cette inconnue dans une autre équation, ce qui fait disparoître cette inconnue ; on fait la même chose à l'égard d'une autre inconnue s'il en reste plus d'une. 4°. Quand il ne reste plus qu'une inconnue, supposé que cela se puisse, le Problême est déterminé, & en ce cas comme cette inconnue se trouve dans l'un des membres & souvent même dans tous les deux mêlée avec des quantités connues, on fait en sorte que cette quantité inconnue se trouve toute seule dans un membre de l'équation, & que dans l'autre membre il n'y ait que des quantités connues, & alors le Problême est résolu, puisque la quantité inconnue se trouvant égale à une ou plusieurs quantités connues, devient elle-même connue. Toute la difficulté consiste à faire en sorte que la quantité inconnue puisse rester seule dans un membre ce que l'on appelle *dégager l'inconnuë*, & nous dirons bientôt de qu'elle maniere cela se fait.

Que si on ne peut pas parvenir à faire qu'il ne reste qu'une seule inconnue, ou si au contraire il n'en reste plus du tout, le Problême est indéterminé, & l'on en trouvera la solution par les voyes que nous enseignerons dans la suite ; or pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire touchant les Problêmes déterminés & indéterminés, nous allons donner un exemple de chacun d'eux.

PROBLEME DETERMINÉ. *On veut couper le nombre 24 en deux parties dont l'une soit triple de l'autre, quelles sont ces parties?*

Je nomme a le nombre 24, la premiere partie x, & la seconde y, à cause que ces parties sont inconnues : or le Problême renferme deux conditions, la premiere est que l'un des nombres inconnus soit triple de l'autre, & par la seconde on veut que les deux nombres pris ensemble soient égaux à 24. Pour remplir la premiere condition, je dis $x = 3y$, & pour remplir la seconde, je dis $x + y = a$, mais x étant égal à $3y$, je puis mettre $3y$ au lieu de x dans l'équation $x + y = a$ (*N.* 176.) & par conséquent $3y + y = a$; je corrige l'expression, & j'ai $4y = a$; ainsi le Problême est déterminé, puisqu'il ne reste qu'une inconnue ; or cette inconnue n'étant pas seule dans le premier membre de l'équa-

tion, puisqu'elle est multipliée par 4, je la dégage en disant : $4y$ est égal à a, donc en divisant ces deux grandeurs par 4, les quotients seront égaux (*N.* 180.) & la grandeur y sera seule dans le premier membre, à cause que la division par 4 détruira ce qu'avoit fait la multiplication par 4 ; ainsi j'aurai $y = \frac{1}{4}a$, ou $y = \frac{a}{4}$, & le Problême sera résolu ; car mettant 24 au lieu de a, j'aurai $y = \frac{24}{4}$, ou $y = 6$, & $3y$ ou $x = 3 \times 6$, ou $x = 18$. Les deux nombres cherchés sont donc 6 & 18 dont la somme fait 24, & dont l'un des deux à sçavoir 18 est triple de l'autre 6.

PROBLEME INDETERMINE'. *Deux hommes ont partagé une somme d'écus, & la part de l'un est triple de la part de l'autre ; quelles sont ces deux parts ?*

Je nomme x la plus grande part, y la moindre, & z la somme des deux ; or par l'une des conditions du Problême, j'ai $x = 3y$, & par la seconde j'ai $x + y = z$, mettant donc $3y$ au lieu de x dans cette derniere équation, j'ai $3y + y = z$, ou $4y = z$, & comme toutes les conditions du Problême sont remplies, il ne m'est pas possible de faire qu'il ne reste qu'une seule inconnue, & par conséquent le Problême est indéterminé, c'est-à-dire susceptible d'une infinité de solutions, & en effet si je veux le résoudre je n'ai qu'à prendre pour y un nombre tel que je voudrai, par exemple 2, & multiplier ensuite ce nombre par 4, ce qui donnera $8 = 4y$, & par conséquent $8 = z$, c'est-à-dire la somme cherchée sera 8, & x étant égal à $3y$ sera 3×2 ou 6 ; ainsi les deux parts seront 6 & 2 dont la somme est 8, & dont la premiere est le triple de la seconde.

Ce qui fait que ce Problême est indéterminé, au lieu que le précédent on nous avoit donné une condition de plus, sçavoir que la somme des deux étoit égale à 24, ce qui fait que les deux portions étoient déterminées par elles-mêmes, & qu'il ne nous étoit pas permis d'en déterminer une à notre gré ; mais cette condition ne se trouvant pas dans le second Problême, il a fallu nécessairement déterminer l'une des grandeurs pour avoir une somme déterminée, parce qu'il n'y a point de nombre tel qu'il soit qui ajouté avec son triple ne fasse une somme totale ; d'où il suit qu'en prenant pour l'une des grandeurs tantôt 2, tantôt 3, tantôt 4, &c. on aura autant de différentes solutions du Problême.

Le peu de connoissance de ce que nous venons de dire touchant les Problêmes indéterminés est la cause de l'erreur de bien

des gens, qui en vous propoſant de ſemblales Problêmes, s'imaginent qu'on ne ſçait pas les réſoudre lorſqu'on ne leur donne pas préciſément la ſolution qu'ils ont penſé. Par exemple ſi après avoir répondu à quelqu'un qui m'auroit propoſé le Problême indéterminé dont je viens de parler, que la premiere part étoit 6, la ſeconde 2, & la ſomme des deux 8, ce quelqu'un s'aviſoit de me dire que ma ſolution ne vaut rien, parce qu'il auroit penſé 9 pour la premiere part & 3 pour la ſeconde, ce qui fait la ſomme 12, il ſe tromperoit en ce qu'il ne s'appercevroit pas que le Problême étant ſuſceptible de pluſieurs ſolutions, la mienne feroit auſſi bonne que la ſienne, & que parmi une infinité de nombres qui peuvent ſatisfaire à la queſtion, je ne puis trouver ceux qu'il a choiſi plutôt que d'autres que par un pur hazard.

Maniere de dégager une inconnuë qui ſe trouve ſeule dans une Equation.

186. On dégage une inconnuë, ou par l'addition ou par la ſouſtraction, ou par la multiplication, ou par la diviſion, ou par l'élévation à quelque puiſſance, ou par l'extraction de quelque racine, & quelquefois par deux ou pluſieurs de ces opérations; c'eſt ce que nous verrons dans les regles ſuivantes.

187. On dégage une inconnuë par *addition*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un ſeul membre d'une équation, y eſt jointe avec une grandeur connuë négative; car alors ajoutant à l'un & à l'autre membre la quantité connuë avec le ſigne +, on trouve que l'inconnuë reſte ſeule dans le membre où elle étoit. Pour dégager l'inconnuë x dans l'équation $x-a=b$, on ajoute a à l'un & à l'autre membre, ce qui n'altere pas l'égalité des deux membres (*N.* 180.) & l'on a $x-a+a=b+a$, & comme dans le premier membre les grandeurs $-a$, $+a$, ſe détruiſent par des ſignes contraires, l'équation ſe réduit à celle-ci $x=b+a$ dans laquelle la grandeur x ſe trouvant ſeule de ſon côté, eſt par conſéquent égale à la ſomme $b+a$ des grandeurs connuës b, a.

188. On dégage une inconnuë par *ſouſtraction*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un ſeul membre y eſt jointe à une grandeur connuë poſitive, l'inconnuë x ſe trouve ſeule de ſon côté. Pour dégager x dans l'équation $x+a=b$, on retranche a de part & d'autre, ce qui donne $x+a-a=b-a$; or dans le premier membre $+a-a$ ſe détruiſent, donc il reſte $x=b-a$.

189. REMARQUE. On voit par ces deux régles que ſi dans une

équation on fait paſſer une grandeur d'un membre à l'autre en changeant ſon ſigne, il y aura toujours égalité entre ſes deux membres, car dans l'équation $x-a=b$, en donnant a de part & d'autre, nous avons eu l'équation $x=b+a$, dans laquelle la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $+$, au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $-$; de même en retranchant de l'un & l'autre membre $x+a=b$ la grandeur a, noas avons eu $x=b-a$, & dans cette équation la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $-$, au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $+$.

190. On dégage l'inconnuë par *multiplication*, lorſque cette inconnuë ne ſe trouvant que dans un des membres de l'équation y eſt diviſée par une ou pluſieurs grandeurs connuës ; & alors on multiplie l'un & l'autre membre par le diviſeur, & la grandeur inconnue reſte ſeule de ſon côté. Pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a}=b$, on multiplie de part & d'autre par a, ce qui donne $\frac{ax}{a}=ab$, & en corrigeant l'expreſſion, on a $x=ab$. De même pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a+b}=c$, on multiplie l'un & l'autre membre par $a+b$, & l'on a $\frac{ax+bx}{a+b}=ac+bc$, & en corrigeant l'expreſſion on a $x=ac+bc$.

191. On dégage l'inconnuë par *diviſion*, lorſque cette inconnuë étant dans un ſeul membre, s'y trouve multipliée par une ou par pluſieurs grandeurs, car en ce cas on diviſe l'un & l'autre membre par le multiplicateur. Dans l'équation $ax=b$ on diviſe les deux membres par a, & l'on trouve $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$, ou $x=\frac{b}{a}$. De même dans l'équation $ax+bx=c$; on diviſe l'un & l'autre membre par $a+b$, parce que le premier terme ax du premier membre eſt x multiplié par a, & le ſecond eſt x multiplié par b, ce qui eſt la même choſe que x multiplié par $a+b$, & l'on trouve $\frac{ax+bx}{a+b}=\frac{c}{a+b}$, ou $x=\frac{c}{a+b}$.

192. *Remarque.* Il faut bien prendre garde à ces expreſſions complexes qui dans chacun de leurs termes contiennent une même grandeur ; car ces expreſſions marquent que cette grandeur a été multipliée par toutes les autres ; par exemple, l'expreſſion $ax+bx+cx+dx$ qui contient la grandeur x dans tous ſes termes, marque que cette grandeur x a été multipliée par $a+b+c+d$, & par conſéquent ſi on diviſoit cette expreſſion par

$a+b+c+d$, le quotient feroit la grandeur x toute feule. De même l'expreffion $aax+cdx-bbx$ marque que la grandeur x a été multipliée par $aa+cd-bb$, & que par conféquent fi on divifoit par $aa+cd-bb$, on auroit x au quotient. De même encore l'expreffion $ax+bx-cx+x$, marque que la grandeur x a été multiplié par $a+b-c+1$; car le coëfficient du dernier terme x eft 1, puifque x eft la même chofe que $1x$; fi l'on divifoit donc par $a+b-c+1$, on auroit pour quotient x.

193. On dégage l'inconnuë par l'élévation à quelque puiffance, lorfque cette inconnuë n'étant que dans un membre de l'équation s'y trouve fous un figne radical, car alors l'on éleve l'un & l'autre membre à la puiffance qui a le même expofant que la racine. Pour dégager x dans l'équation $\sqrt{x}=a$, on éleve l'un & l'autre membre au quarré, & l'on a $x=a^2$ (*N.* 182.) car $\sqrt{x}$ par $\sqrt{x}$ donne x, puifque la racine en fe multipliant elle-même produit le quarré. De même pour dégager x dans $\sqrt[3]{x}=b$, on éleve l'un & l'autre membre au cube, & l'on a $x=b^3$; car $\sqrt[3]{x}$ par $\sqrt[3]{x}$ donne $\sqrt[3]{xx}$, & $\sqrt[3]{xx}$ par $\sqrt[3]{x}$ donne $\sqrt[3]{x^3}$, ou x.

194. On dégage l'inconnuë par l'extraction d'une racine, lorfque cette inconnuë eft élevée à quelque puiffance dans le membre où elle fe trouve, & en ce cas on extrait de l'un & l'autre membre la racine du même dégré que la puiffance. Pour dégager x dans $x^3=a^3$, on tire la racine cubique de part & d'autre, & l'on trouve $x=a$; de même pour dégager x dans $x^4=abcc$, on tire la racine quatriéme de part & d'autre, & l'on a $x=\sqrt[4]{abcc}$, & ainfi des autres.

195. Enfin on dégage l'inconuë en employant deux ou plufieurs de ces regles, ainfi que nous l'allons montrer par quelques exemples.

Pour dégager l'inconnuë dans $ax=bx+cd$, on fait paffer la quantité bx du fecond membre dans le premier, en retranchant bx de part & d'autre, ou ce qui revient au même, en changeant le figne $+$ en $-$, & l'on trouve $ax-bx=cd$, enfuite on divife par $a-b$, & l'on trouve $x=\frac{cd}{a-b}$.

Pour dégager l'inconnuë dans $dx=x+ab$, on fait paffer la quantité x, ou $1x$ du fecond membre dans le premier, ce qui donne $dx-1x=ab$, & divifant de part & d'autre par $d-1$, on trouve $x=\frac{ab}{d-1}$.

Dans $ax + dx + cb = af$, on fait paſſer cb du premier dans le ſecond membre, ce qui donne $ax + dx = af - cb$, & diviſant enſuite de part & d'autre par $a + d$, on trouve $x = \frac{af - cb}{a + d}$.

Dans $\frac{a\sqrt{x} + d\sqrt{x}}{a + b} = c$, on multiplie de part & d'autre par $a + b$, ce qui donne $a\sqrt{x} + d\sqrt{x} = ac + bc$, enſuite on diviſe par $a + d$, & le quotient eſt $\sqrt{x} = \frac{ac + bc}{a + d}$, & enfin on éleve tout au quarré, ce qui donne $x = \frac{aacc + 2accb + bbcc}{aa + 2ad + dd}$.

Dans $\frac{a\sqrt{x}}{b} - \frac{d\sqrt{x}}{c} = f$, on réduit les deux fractions du premier membre au même dénominateur, & l'on a $\frac{ac\sqrt{x} - db\sqrt{x}}{bc} = f$, on multiplie de part & d'autre par bc, & le produit eſt $ac\sqrt{x} - db\sqrt{x} = fbc$, on diviſe tout par $ac - db$, & le quotient eſt $\sqrt{x} = \frac{fbc}{ac - db}$, enfin on éleve tout au quarré, & l'on trouve $x = \frac{ffbbcc}{aacc - 2acdb + ddbb}$, & ainſi des autres.

Exemples des Problêmes déterminés.

196. Ier. EXEMPLE. *Trois Officiers ont reçu chacun une gratification; celle du ſecond eſt double de celle du premier plus 6 livres, & celle du troiſiéme eſt triple de celle du premier moins 2 livres, & la ſomme totale eſt 304 livres.*

Je nomme a la ſomme totale, & x la gratification du premier, parce qu'elle m'eſt inconnuë ; or par la premiere condition du Problême, la gratification du ſecond eſt $2x + 6$, & celle du troiſiéme eſt $3x - 2$ par la ſeconde condition, mais par la troiſiéme les trois gratifications priſes enſemble ſont égales à la grandeur a, donc j'ai cette équation $x + 2x + 6 + 3x - 2 = a$, & corrigeant l'expreſſion j'ai $6x + 4 = a$, je fais paſſer 4 du premier membre dans le ſecond, ce qui donne $6x = a - 4$; enfin diviſant par 6, je trouve $x = \frac{a - 4}{6}$, & mettant la valeur de a, j'ai $x = \frac{304 - 4}{6} = \frac{300}{6} = 50$; ainſi la gratification du premier eſt 50, & mettant cette valeur dans les expreſſions $2x + 6$, & $3x - 2$ de la ſeconde & de la troiſiéme, je trouve $2x + 6 = 2 \times 50 + 6 = 100 + 6 = 106$ ſeconde gratification, & $3x - 2 = 3 \times 50 - 2 = 150 - 2 = 148$ troiſiéme gratification, & les trois nombres 50, 106 & 148 font en effet la ſomme 304.

II. EXEMPLE. *Deux Bombardiers revenant de leurs Batteries, l'un dit à l'autre, si tu avois tiré cinq coups de moins, & moi cinq coups de plus, j'aurois tiré deux fois plus de bombes que toi, & si tu avois tiré trois coups de plus, & moi trois de moins, j'aurois tiré autant que toi; on demande quel est le nombre de coups que chacun d'eux a tiré?*

Je nomme x le nombre de coups que le premier a tiré, & y celui du second; or par la premiere condition du Problême, le nombre du premier augmenté de cinq est double du second diminué de cinq; ainsi $x+5$ est double de $y-5$, & par conséquent multpliant $y-5$ par 2, ce qui fait $2y-10$, nous avons $x+5=2y-10$ premiere équation.

Par la seconde condition du Problême, le nombre du premier diminué de 3 est égal au nombre du second augmenté de trois; donc $x-3=y+3$, seconde équation.

$x+5=2y-10$ .... 1ere. Equation.
$x-3=y+3$ .... 2e. Equation.

$x=2y-15$ .... 1ere valeur de x.
$x=y+6$ ... 2e. valeur.

$2y-15=y+6$
$y-15=6$
$y=21$

$x=21+6=27$.

Je dégage x dans la premiere équation, ce qui donne $x=2y-15$. Je dégage de même x dans la seconde, & j'ai $x=y+6$; ainsi j'ai deux valeurs de x, & par conséquent ces deux valeurs sont égales entr'elles.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x, ce qui donne $2y-15=y+6$. Je fais passer y du second membre dans le premier, & j'ai $y-15=6$, & faisant passer 15 du premier membre dans le second, je trouve $y=21$.

Je mets cette valeur de y dans la valeur $y+6$ de x, & j'ai $x=21+6=27$; ainsi le premier a tiré 27 coups & l'autre 21, & en effet si j'ajoute 5 au premier, ce qui fait 32, & que je retranche 5 au second ce qui fait 16, on voit que 32 est double de 16, & si je retranche 3 du premier, ce qui fera 24, & que j'ajoute 3 au second, ce qui fait aussi 24; il est clair que les deux nombres seront égaux.

198. III. EXEMPLE. *Trois hommes ont dépensé une somme d'argent, le premier & le second ont dépensé à eux deux cinq livres plus que le troisiéme, le premier & le troisiéme en ont dépensé à eux deux 15 de plus que le second, & le second & le troisiéme en ont dépensé à eux deux 25 de plus que le premier ; quelle est la somme totale & la dépense de chacun en particulier ?*

Je nomme a l'excès des deux premiers sur le troisiéme, b l'excès 15 du premier & du troisiéme sur le second, c l'excès 25 des deux derniers sur le premier, x la dépense du premier, y celle du second, & z celle du troisiéme.

Par la premiere condition, si le troisiéme avoit dépensé 5 livres de plus, sa dépense auroit été égale à la dépense du premier, & à celle du second prises ensemble ; donc j'ai cette premiere équation $x+y=z+a$, & faisant le même raisonnement à l'égard des deux autres conditions du Problême, je trouve que la seconde donne l'équation $x+z=y+b$, & que la troisiéme donne celle-ci $z+y=x+c$.

J'ajoute ensemble ces trois équations en faisant d'une part la somme des trois premiers membres, & de l'autre la somme des trois seconds membres, ce qui donne $2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x$, & faisant passer $z+y+z$ du second membre dans le premier j'ai $x+y+z=a+b+c$, ce qui me fait voir que les trois dépenses ensemble, c'est-à-dire la dépense totale est égale à la somme des trois excès $a+b+c$.

$x+y=z+a$ .... 1ere. Equation.
$x+z=y+b$ .... 2e. Equation.
$z+y=x+c$ .... 3e. Equation.

$2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x.$
$x+y+z=a+b+c.$
$x+y+z=S.$ .... Dépense totale.

$x=S-y-z.$
$x=S-x-c.$
$2x=S-c.$
$x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c$.... Dépense du premier.

$y=S-x-z.$
$y=S-y-b.$
$2y=S-b$
$y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b$...... Dépense du second.

$z=S-x-y.$
$z=S-z-a.$
$2z=S-a.$
$z=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}a$... Dépense du troisiéme.

Pour abréger, je suppose $a+b+c=S$, & par consequent l'équation de la dépense totale est $x+y+z=S$; or pour trou-

ver la dépenſe du premier, je dégage x dans cette équation, en faiſant paſſer $y+z$ dans le ſecond membre, ce qui donne $x = S-y-z$; mais par la troiſiéme équation des trois premieres, j'ai $z+y=x+c$, donc $-z-y=-x-c$; mettant donc $-x-c$ au lieu de $-z-y$ dans l'équation $x=S-y-z$, j'ai $x=S-x-c$; & faiſant paſſer x du ſecond membre dans le premier, je trouve $2x=S-c$, & diviſant tout par 2, j'ai enfin $x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c$ qui eſt la dépenſe du premier.

Pour trouver celle du ſecond je prens encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale; j'en dégage l'inconnuë y, ce qui donne $y=S-x-z$; mais par la ſeconde équation des trois premieres, j'ai $x+z=y+b$, ou $-x-z=-y-b$, mettant donc $-y-b$ au lieu de $-x-z$ dans l'équation $y=S-x-z$, j'ai $y=S-y-b$; & faiſant paſſer y du ſecond membre dans le premier, je trouve $2y=S-b$, & diviſant tout par 2, j'ai $y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b$ dépenſe du ſecond.

Pour trouver celle du troiſiéme, je prens encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale, je dégage z, ce qui donne $z=S-x-y$; mais par la premiere équation des trois premieres j'ai $x+y=z+a$, ou $-x-y=-z-a$, mettant donc la veleur $-z-a$ de $-x-y$ dans l'équation $z=S-x-y$, j'ai $z=\frac{1}{2}S-z-a$; & faiſant paſſer z du ſecond membre dans le premier, je trouve $2z=S-a$; & le tout diviſé par 2, donne $z=S-\frac{1}{2}a$ dépenſe du troiſiéme.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans l'équation de la ſomme totale, & dans celles des dépenſes particulieres, & je trouve que la dépenſe totale eſt 45, que celle du premier eſt $22\frac{1}{2}-12\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 10; que celle du ſecond eſt $22\frac{1}{2}-7\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 15, & que celle du troiſiéme eſt $22\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 20, & il eſt aiſé de voir que ces trois nombres 10, 15, 20 rempliſſent les conditions du Problême, car la ſomme 25 des deux premiers ſurpaſſe le troiſiéme de 5, la ſomme 30 du premier & du troiſiéme ſurpaſſe le ſecond de 15, & la ſomme 35 des deux derniers ſurpaſſe le premier de 25, ce qui étoit propoſé.

199. IV. EXEMPLE. *Deux Soldats ont tué 80 hommes dans une Bataille, & l'un des deux en a tué 20 plus que l'autre; combien chacun en a-t'il tué?*

Je nomme a la ſomme 80, d la différence 20, x le nombre d'hommes que le premier a tué, que je ſuppoſe être le plus grand, & z le nombre d'hommes qui ont été tués par l'autre; donc x.

$+z=a$, & si du plus grand je retranche le moindre, ce qui fait $x-z$, ce reste sera égal à la différence d, & par conséquent $x-z=d$.

J'ai donc deux équations $x+z=a$, & $x-z=d$, je dégage x dans la premiere, ce qui donne $x=a-z$, premiere valeur de x.

$x+z=a$ .... 1[ere]. Equation.

$x=a-z$ ... 1[ere]. valeur de x.

$x-z=d$ .... 2[e]. Equation.

$x=d+z$ .... 2[e]. valeur de x.

$a-z=d+z.$

$a-d=2z.$

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=z.$

$x=d+z=d+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}d.$

Je dégage de même x dans la seconde équation, & j'ai $x=d+z$ seconde valeur de x.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x, ce qui donne $a-z=d+z$, & faisant passer z du premier membre dans le second, & d du second dans le premier, j'ai $a-d=2z$, & divisant tout par 2, je trouve $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=z$, c'est-à-dire le plus petit nombre est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.

Je mets cette valeur de z dans la seconde valeur de x, qui est $x=d+z$, & je trouve $x=d+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}d$, c'est-à-dire le plus grand nombre est égal à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence.

Mettant donc les valeurs de a & de b, je trouve $z=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ $=40-10=30$, & $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=40+10=50$, & ces deux nombres 30 & 50 font ensemble 80, & la différence du grand au petit est 20, ce qui étoit proposé.

Or comme les lettres a & b peuvent signifier tel autre nombre que l'on voudra, il est visible que la solution que l'on vient de trouver est générale, & que par conséquent on en peut tirer la régle ou le Théorême suivant.

200. THEOREME tiré de l'Exemple précédent. *La somme de deux grandeurs étant connuë, & leur différence aussi, la moitié de la somme plus la moitié de la différence est égale à la plus grande, & la moitié de la somme moins la moitié de la différence est égale à la moindre.*

201. Il est clair que si dans la solution des Problêmes on met toujours les lettres a, b, c, &c. au lieu des grandeurs connuës, les solutions que l'on trouvera seront toujours des Théorêmes généraux pour ces sortes de cas, comme on vient de le voir, &

voilà quel eſt l'avanrage de l'analyſe d'aujourd'hui ſur celle des Anciens, qui faute d'avoir des expreſſions générales pour marquer les grandeurs connuës & les inconnuës, ne trouvoient jamais que des ſolutions particulieres pour les cas particuliers qu'ils avoient à réſoudre, ce qui les obligeoit de recommencer de nouveau lorſque les grandeurs compriſes dans un Problême n'étoient pas précisément les mêmes qui ſe trouvoient compriſes dans un autre Problême de même eſpece. De plus, il arrive ſouvent qu'un Théorême découvert par notre méthode, nous conduit avec facilité à la découverte d'une infinité de Problêmes qui ne feroient pas aiſés à réſoudre ſans ce ſecours, c'eſt ce qu'on va voir dans l'exemple ſuivant où nous allons mettre en uſage le Théorême précédent.

202. **Exemple.** *Deux Joüeurs ont gagné une ſomme d'écus, le gain du premier multiplié par le gain du ſecond fait 96, & ſi l'on fait les quarrés des deux gains, ces deux quarrés ajoutés enſemble feront 208; quel eſt le gain de chacun d'eux?*

Comme je ne connois ni la ſomme gagnée, ni la différence des deux gains, je nomme la ſomme gagnée $2x$, & la différence des deux gains $2z$, & je me ſers de ces expreſſions afin de pouvoir prendre la moitié de la ſomme & la moitié de la différence ſans fraction. Je nomme auſſi le produit 96 des deux gains a, & la ſomme 208 des quarrés b.

Par le Théorême précédent le gain du premier eſt $x+z$, & celui du ſecond eſt $x-z$; or par la pre-

$x+z$. Gain du premier.
$x-z$. Gain du ſecond.

$xx+xz-zz$.
$\quad -xz$

$xx \quad -zz$. Produit des deux gains.
$xx-zz=a$ 1[ere]. Equation.
$xx+2xz+zz$. Quarré du premier gain.
$xx-2xz+zz$. Quarré du ſecond.

$2xx \quad +2zz=b$ 2[e]. Equation.
$xx=a+zz$ 1[re]. valeur de xx.
$xx=\frac{b}{2}-zz$. 2[e]. valeur de xx.

$a+zz=\frac{1}{2}b-zz$.
$2zz=\frac{1}{2}b-a$.
$zz=\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a$.
$z=\sqrt{\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a}$. Gain du premier.
$xx=a+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a=\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a$.
$x=\sqrt{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a}$. Gain du ſecond.

miere condition du Problême, le produit de ces deux gains multipliés l'un par l'autre est égal à $96=a$; faisant donc ce produit j'ai $xx-zz=a$.

Je fais les quarrés des deux gains, & les ajoutant ensemble, la somme est $2xx+2zz$, laquelle est égale à $208=b$ par la seconde condition du Problême.

Je prens dans la premiere équation la valeur de xx en faisant passer zz dans le second membre, & j'ai $xx=a+zz$. Je prens de même la valeur de xx dans la seconde équation, en faisant d'abord passer $2zz$ dans le second membre, ce qui donne $2xx=b-2zz$, & divisant ensuite le tout par 2, ce qui donne $xx=\frac{b}{2}-zz$.

Je fais une équation de ces deux valeurs de xx, & j'ai $a+zz=\frac{1}{2}b-zz$; je fais passer zz du second membre dans le premier, & a du premier dans le second, & je trouve $2zz=\frac{1}{2}b-a$, & divisant tout par 2, j'ai $zz=\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a$; enfin tirant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve $z=\sqrt{\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a}$.

Je mets la valeur $\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a$ de zz dans la premiere valeur de xx qui est $xx=a+zz$, & j'ai $xx=a+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a$, & corrigeant l'expression, je trouve $xx=\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x=\sqrt{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a}$.

Je mets les valeurs de a & b dans les valeurs trouvées de x & z, & je trouve $z=\sqrt{\frac{208}{4}-\frac{96}{2}}=\sqrt{52-48}=\sqrt{4}=2$, & $x=\sqrt{\frac{208}{4}+\frac{96}{2}}=\sqrt{52+48}=\sqrt{100}=10$; donc le premier gain $x+z=10+2=12$, & le second $x-z=10-2=8$, & il est clair que ces deux gains 12 & 8 multipliés l'un par l'autre font 96, & que leurs quarrés 144 & 64 ajoutés ensemble font 108, ce qui étoit proposé.

203. On trouvera grand nombre d'autres exemples de Problêmes déterminés dans les Chapitres suivans; c'est pourquoi je n'en dirai pas davantage pour le present de peur d'être trop long. Ceux qui voudront s'instruire plus à fond de tout ceci peuvent consulter les Elemens de Mathematique du Pere Lami, ceux du Pere Prestet, notre *Arithmétique des Géomètres*, & l'Analyse démontrée du Pere Reynaud.

Des

Des Equations composées qui ne contiennent qu'une inconnuë.

204. On nomme Equations *composées* toutes les équations où l'inconnuë se trouve élevée à différens dégrés dans deux ou plusieurs termes. $xx+ax=bc$ est une équation composée, parce que l'inconnuë est au second dégré dans un terme & au premier dans une autre. De même $x^3+ax+bx=abb$ est une équation composée, & ainsi des autres.

205. Toute équation composée prend le nom du plus haut dégré où l'inconnuë se trouve dans quelqu'un de ses termes. L'équation $xx+ax=bc$ est du second dégré, parce que le plus haut dégré où l'inconnuë x se trouve est le second; l'équation $x^3+ax^2+bx=abb$ est du troisiéme dégré, &c.

206. Il n'est pas possible dans les Equations composées de faire que l'inconnuë se trouve seule dans un membre de l'Equation & au premier dégré, en n'employant que les moyens dont nous nous sommes servis pour les Equations simples. Qu'on fasse passer d'un membre à l'autre, qu'on multiplie, qu'on divise, qu'on éleve à des puissances plus élevées, ou qu'on tire des racines tant qu'on voudra, on n'y parviendra jamais ainsi qu'on pourra voir si on veut en faire l'expérience; c'est pourquoi il a fallu nécessairement chercher d'autres Méthodes pour résoudre ces Equations.

207. Une Equation composée est dite *ordonnée* quand elle commence par le plus haut dégré de l'inconnuë, & que les autres dégrés vont par ordre dans les termes suivans. $x^4+bx^3+ccx^2$ $d^3x=fgg$ est une équation ordonnée, & elle cesseroit de l'être si l'on dérangeoit quelqu'un de ses termes; mais si quelqu'un de ses termes manquoit comme dans $x^4+aax^2+bccx=fgg$, où le second terme qui devroit contenir x^3 manque, elle ne cesseroit pas d'être ordonnée pourvû que les autres termes fussent écrits selon leurs rangs.

208. Il arrive souvent qu'après avoir ordonné une équation, on fait passer dans le premier membre toutes les grandeurs qui sont dans le second, & alors le second membre devient égal à zero, ce que l'on fait pour pouvoir résoudre plus aisément l'équation; ainsi au lieu de $z^3+azz+bbz=ccd$, on écrit $z^3+azz+bbz-ccd=0$.

209. La précaution commune dont on se sert dans les différentes Méthodes que l'on employe pour résoudre les équations composées est de faire en sorte que la plus haute puissance de

l'inconnuë ne soit ni multipliée ni divisée par quelqu'autre grandeur; c'est pourquoi si l'équation est $axx + 2bx = dd$, on divise tout par a afin d'avoir l'équation $xx + \frac{2bx}{a} = \frac{dd}{a}$ dans laquelle la puissance xx n'est ni multipliée ni divisée par aucune autre grandeur; de même si l'équation est $\frac{xx}{a} + 2bx = dd$, on multiplie tout par a pour avoir l'équation $xx + 2abx = add$, & ainsi des autres.

210. On nomme grandeur *imaginaire*, une grandeur qui est impossible, par exemple la grandeur $\sqrt{-a}$ est imaginaire, parce qu'il n'est pas possible de trouver une grandeur réelle commensurable ou incommansurable qui puisse produire le quarré $-a$; car la racine de ce quarré auroit ou le signe $+$, ou le signe $-$; or si elle avoit le signe $+$, elle produiroit $+a$ au lieu de $-a$, en se multipliant elle-même, puisque $+$ par $+$ donne $+$, & si elle avoit le signe $-$ elle produiroit aussi $+a$ au lieu de $-a$, puisque $-$ par $-$ donne $+$; ainsi toutes les fois que sous le signe radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt[3]{}$, il se trouve une grandeur négative, cette racine est imaginaire. On doit dire la même chose de tous les signes radicaux dont l'exposant est un nombre pair, & dont la grandeur qui est sous le signe est une grandeur négative. Par exemple $\sqrt[4]{-a}$ est une grandeur imaginaire; car si $-a$ étoit une quatriéme puissance possible, sa racine auroit sans doute ou le signe $+$, ou le signe $-$: si elle avoit le signe $+$, il est sûr qu'en se multipliant trois fois successivement, elle donneroit $+a$ au lieu de $-a$ pour sa quatriéme puissance, & si elle avoit le signe $-$, elle donneroit d'abord pour le produit de sa premiere multiplication le signe $+$, à cause que $-$ par $-$ donne $+$; ainsi son quarré auroit le signe $+$, or ce quarré multiplié par sa racine donneroit $-$ au produit, puisque $+$ par $-$ donne $-$, & par conséquent le cube de la racine auroit le signe $-$; enfin ce cube multiplié par la racine donneroit $+$ au produit; ainsi la quatriéme puissance de la racine seroit $+a$ au lieu de $-a$: mais si le signe radical avoit un exposant impair, & que la grandeur qui est sous le signe eut le signe $-$, cette racine seroit fausse mais ne seroit pas impossible; car nous venons de voir qu'une racine négative élevée au cube donne un cube négatif, & il est aisé de prouver que si on l'élevoit à la cinquiéme puissance, à la septiéme, &c. ces puissances seroient des grandeurs négatives, mais non pas imaginaires.

211. Dans toutes les Equations composées l'inconnuë a autant de valeurs que l'équation a de dégrés, ce que nous expliquerons bientôt en examinant les formations de ces équations, & ces valeurs sont ou toutes positives, ou toutes négatives, ou les unes réelles & les autres négatives, commensurables ou incommensurables, ou enfin les unes négatives ou positives, & les autres imaginaires, & dans tous ces cas le Problême peut toujours être bien proposé, puisqu'il y a toujours quelque valeur de x qui est une grandeur possible, mais si x n'avoit que des valeurs imaginaires, le Problême renfermeroit une manifeste contradiction. Il arrive souvent que parmi les différentes valeurs de x, il s'en trouve ou quelques unes d'égales ou que quelquefois toutes le sont.

De la Formation des Equations composées.

212. Je suppose d'une part $x = a$, & de l'autre $x = b$, & dans ces deux égalités je fais passer dans le premier membre la grandeur qui est dans le second, ce qui me donne $x - a = 0$, & $x - b = 0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre, c'est-à-dire le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le second par le second ce qui me donne l'équation A qu'on voit ici, dont les deux produisans sont $x - a = 0$, & $x - b = 0$; ainsi pour décomposer cette équation il est visible qu'il faut retrouver les deux produisans $x - a = 0$, & $x - b = 0$, par le moyen desquels on trouvera aisément que les valeurs de x étant a & b, cette inconnuë a par conséquent autant de valeurs que l'équation a de dégrés.

$$\begin{array}{ll} & x - a = 0 \\ & x - b = 0 \\ \hline \text{A.} & xx - ax + ab = 0. \\ & \quad\;\, - bx \end{array}$$

213. Les produisans d'une équation composée se nomment *racines* de l'équation, soit qu'ils soient égaux ou qu'ils ne le soient pas; ainsi quand on dit *tirer* les racines d'une équation, c'est trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

214. Il faut observer que si dans une équation composée il se trouve plusieurs termes dans lesquels l'inconnuë soit à un même dégré, ces termes n'en sont qu'un, & on les écrit les uns sous les autres; dans l'équation A, les termes $-ax - bx$ ne font qu'un seul terme.

215. Si j'avois supposé $x = a$, & $x = -b$, & qu'après avoir fait passer les termes des seconds membres dans les premiers, ce

qui auroit donné $x - a = 0$, & $x + b = 0$, j'eusse ensuite multiplié ces deux équations l'une par l'autre, il est visible que l'équation composée qui en seroit provenuë, auroit eu pour produisans $x - a = 0$ qui est une grandeur positive, puisqu'elle donne $x = a$, & $x + b = 0$ qui est une grandeur négative. De même si j'avois fait $x = -a$, & $x = -b$, l'équation composée qui en seroit provenuë auroit eu deux racines négatives ; enfin si j'avois supposé $x = \sqrt{-b}$, & $x = a$, l'équation composée auroit eu une racine imaginaire & une positive, ce qui peut se combiner de plusieurs autres façons.

216. Maintenant je suppose $x = a$, $x = b$, $x = c$, & en transposant j'ai $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & multipliant ces équations les unes par les autres, le produit est l'équation B du troisiéme dégré, dont les racines sont $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & par conséquent cette équation a autant de racines qu'elle a de dégrés ; & il est évident que ces racines peuvent varier selon que je supposerai x égal à des grandeurs les unes négatives, les autres positives, & les autres imaginaires.

$$\begin{array}{rl}
& x - a = 0 \\
& x - b = 0 \\
\hline
& xx - ax + ab = 0 \\
& \quad - bx \\
\hline
& x - c = 0 \\
\hline
\text{B.} & x^3 - ax^2 + abx - abc = 0. \\
& \quad - bx^2 + acx \\
& \quad - cx^2 + cbx
\end{array}$$

Supposons encore $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & $x - d = 0$, je multiplie ces 4 équations les unes par les autres, le produit est l'équation D du quatriéme dégré dont les racines sont $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, & $x - d = 0$.

$$\begin{array}{rl}
& x - a = 0 \\
& x - b = 0 \\
\hline
& xx - ax + ab \\
& \quad - bx \\
\hline
& x - c = 0 \\
\hline
& x^3 - ax^2 + abx - abc = 0. \\
& \quad - bx^2 + acx \\
& \quad - cx^2 + cbx \\
\hline
& x - d = 0 \\
\hline
\text{D.} & x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0. \\
& \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\
& \quad - cx^3 + cbx^2 - acdx \\
& \quad - dx^3 + adx^2 - cbdx \\
& \qquad + bdx^2 \\
& \qquad + cdx^2
\end{array}$$

217. Ce qu'il faut observer dans la formation de ces équa-

tions, c'est 1°. Que le coëfficient du second terme est toujours égal à la somme des racines de l'équation ; ainsi dans l'équation A, le coëfficient du second terme $-ax-bx$ est la somme $a+b$ des racines a, b de l'équation. De même dans l'équation B le coëfficient du second terme $-ax^2-bx^2+cx^2$ est la somme $a+b+c$ des trois racines a, b, c, & on peut observer la même chose dans l'équation D & dans les équations des dégrés plus élevés. 2°. Que dans les équations qui ont plus de trois termes comme l'équation B & l'équation D, le coëfficient du troisiéme terme comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent se multiplier. Par exemple dans l'équation B dont les trois racines sont a, b, c, le coëfficient $ab+ac+cb$ du troisiéme terme comprend les produits des trois racines multipliées deux à deux, & la même chose peut s'observer dans l'équation D. 3°. Que dans les équations qui ont plus de quatre termes comme l'équation D, le coëfficient du quatriéme terme contient les produits abc, abd, acd, cbd, des quatre racines multipliées trois à trois, & on trouveroit de même que si l'équation avoit plus de cinq termes, le coëfficient du cinquiéme terme contiendroit les produits des racines multipliées quatre à quatre, & ainsi de suite. 4°. Enfin, que dans toutes les équations, le dernier terme est une quantité toute connuë, qui est le produit de toutes les racines, ainsi dans l'équation A, le dernier terme ab est le produit des deux racines a, b ; dans l'équation B, le dernier terme abc est le produit des trois racines a, b, c, & de même des autres.

218. Or delà il suit que si le second terme manque dans une équation, il faut nécessairement qu'il y ait des racines positives & des négatives qui s'entredétruisent, & qui par conséquent rendent le second terme égal à zero. De même, si le troisiéme terme manque dans celles qui ont plus de trois termes, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs, & d'autres positifs qui s'entredétruisent, & la même chose doit se dire des autres équations plus élevées où il manqueroit quelques termes.

219. M. Descartes a observé 1°. que si toutes les racines d'une équation sont positives les termes de l'équation ont alternativement le signe $+$ & le signe $-$, comme on voit aux trois équations ci-dessus A, B, D. 2°. Que si elles sont toutes négatives tous les termes auront le signe $+$, ce qui est évident, puisque tous les produisans auront le signe $+$. 3°. Enfin, que s'il s'en trouve

de négatives & de poſitives, tous les termes de l'équation n'auront pas alternativement le ſigné $+$ & le ſigne $-$, mais que cette alternative ſera interrompuë autant de fois qu'il y a de racines négatives, & delà on peut connoître aiſément combien il y a de racines poſitives & de négatives dans une équation.

Ce que M. Deſcartes aſſure ici peut ſe démontrer aiſément ſi l'on veut ſe donner la peine de mettre dans les produiſans des chiffres au lieu des grandeurs connuës. Suppoſons, par exemple $x-2=0$, $x-3=0$, $x+4=0$, le produit de ces trois équations ſera une équation du troiſiéme dégré dans laquelle l'expreſſion étant corrigée, on aura $x^3-1xx-14x+24=0$; or l'ordre alternatif des ſignes eſt ici interrompu une fois; donc il y a une racine négative & les deux autres ſont poſitives, & en effet $x+4=0$ eſt négative, puiſqu'elle donne $x=-4$, & les deux autres $x-2=0$, $x-3=0$, ſont poſitives, à cauſe qu'elles donnent $x=2$, & $x=3$, & on trouvera la même choſe dans tous les autres cas.

$$\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-3=0 \\ \hline xx-2x+6=0. \\ \quad -3x \\ \hline x+4=0 \\ \hline x^3-2xx+6x+24=0. \\ \quad -3xx-8x \\ \quad +4xx-12x \\ \hline x^3-1xx-14x-24=0. \end{array}$$

De la Réſolution des Equations du ſecond dégré.

220. Quand le ſecond terme d'une équation du ſecond dégré manque, la réſolution en eſt facile, puiſqu'il n'y a qu'à faire paſſer la grandeur connuë dans le ſecond membre, ſuppoſé qu'elle n'y ſoit pas, & enſuite extraire la racine quarrée de part & d'autre; ainſi pour réſoudre l'équation $xx-bb=0$, on fait paſſer bb dans le ſecond membre, ce qui donne $xx=bb$, & tirant la racine quarrée on a $x=b$; que ſi l'équation étoit $xx+bb=0$, ou $xx=-bb$, les deux racines ſeroient imaginaires, parce qu'il n'y a point de grandeur poſitive ou négative qui puiſſe être la racine du quarré $-bb$.

221. Quand l'équation a tous ſes termes on la réſout en ſe rappellant que le quarré de tout binome $x+b$ contient dans ſon premier terme, le quarré du premier terme x du binome, deux fois le premier terme x multiplié par le ſecond, ou ce qui revient au même, deux fois le ſecond, ou le double du ſecond multiplié par le premier, & enfin le quarré du ſecond (*N.* 97.)

d'où il suit que si l'on a les deux premiers termes d'un tel quarré on pourra aisément trouver le troisiéme. Par exemple, si on a les deux premiers termes $xx+2ax$ d'un quarré, on verra sans peine que le second terme $2ax$ est le produit du premier terme x de la racine multiplié par le double du second terme, & par conséquent prenant la moitié du coëfficient $2a$, laquelle est a, on fera son quarré aa, & ce quarré étant ajouté aux deux termes $xx+2ax+aa$ qui fera un quarré parfait, cela posé

Soit l'équation $xx-2ax+bb=0$, je fais passer bb dans le second membre, & j'ai $xx-2ax=-bb$, je vois que le premier membre seroit un quarré parfait si j'y ajoutois le quarré de la moitié de son coëfficient; or cette moitié est a, & son quarré est aa, c'est pourquoi j'ajoute aa à l'un & l'autre membre pour conserver l'égalité, & je trouve $xx-2ax+aa=aa-bb$. Je tire la racine quarrée de part & d'autre, mais comme la racine quarrée du premier membre est ou $x-a$, ou $a-x$; car l'une & l'autre de ces racines multipliée par elle-même donne le premier membre $xx-2ax+aa$; j'ai donc $x-a=\sqrt{aa-bb}$, ou $a-x=\sqrt{aa-bb}$; c'est pourquoi si dans la premiere de ces deux équations je fais passer a du premier membre dans le second, j'aurai $x=a+\sqrt{aa-bb}$ qui sera l'une des racines de l'équation proposée $xx-2ax=-bb$, & si dans l'autre équation $a-x=\sqrt{aa-bb}$, je fais passer x du premier membre dans le second, & $\sqrt{aa-bb}$ du second dans le premier, j'aurai $a-\sqrt{aa-bb}=x$, qui sera la seconde racine de l'équation proposée.

222. Ier. Exemple. *Deux hommes ont un certain nombre d'écus, le premier en a 10, & si l'on multiplie la part du premier par celle du second, & qu'on retranche le produit de la somme des quarrés des deux parts, le reste est 84; quelle est la part de chacun d'eux?*

Je nomme a la part 10 du premier, b le reste 84, & x la part du second; donc la somme des quarrés des deux parts est $xx+aa$, & le produit de la premiere par la seconde est ax; retranchant donc ax de $xx+aa$, le reste est $xx-ax+aa$, lequel est égal à b; ainsi j'ai l'équation $xx-ax+aa=b$; je fais passer aa dans le second membre, ce qui donne $xx-ax=b-aa$; j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}aa$ de la moitié du coëfficient a, afin de rendre le premier membre un quarré parfait, enfin extrayant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve

$x - \frac{1}{2}a$, ou $\frac{1}{2}a - x = \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & dégageant x dans l'un & l'autre de ces deux expressions, je trouve pour la premiere racine $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & pour la seconde $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$, & mettant les valeurs des lettres connues, les deux racines sont $x = 8$, & $x = 2$, ces deux racines sont positives, ainsi l'équation a deux solutions réelles & positives. En effet si je suppose que le second ait 8 écus, cette part multipliée par celle du premier qui est 10 donnera le produit 80 lequel étant retranché de la somme 164 des quarrés des deux parts, le reste est 84 ainsi qu'il étoit proposé, & si je suppose que la part du premier soit égale à 2, le produit de 2 par 10 sera 20, lequel retranché de la somme 104 des quarrés donnera 84 de même qu'auparavant.

$$xx - ax + aa = b$$
$$xx - ax = b - aa$$
$$xx - ax + \frac{1}{4}aa = b - \frac{1}{4}aa$$
$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{b - \frac{1}{4}aa}$$
$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{1}{4}aa} \\ \frac{1}{2}a - \sqrt{b - \frac{1}{4}aa} \end{cases}$$
$$x = 5 + \sqrt{84 - 75} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$
$$x = 5 - \sqrt{84 - 75} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

Si dans l'équation $xx - ax + aa = b$ nous avions fait passer b dans le premier membre, nous aurions eu $xx - ax + aa - b = 0$, & comme b est moindre que aa, le dernier terme auroit eu le signe $+$, ainsi l'ordre alternatif des signes se trouvant dans cette équation, cela nous auroit fait juger que les deux racines étoient positives, ce que nous venons de vérifier.

223. II. Exemple. *On a envoyé trois petits Détachemens, le premier est de 10 hommes, le second en a 2 plus que le troisiéme, & si l'on fait les quarrés des nombres d'hommes de chaque Détachement, le quarré du premier sera égale à la somme des quarrés des deux autres ; combien y a-t'il d'hommes dans le second & le troisiéme Détachement ?*

Je nomme a le nombre d'hommes du premier Détachement, b la différence 2 du second au troisiéme, & x le troisiéme ; donc par la premiere condition j'ai $x + b$ pour le nombre du second Détachement ; je fais les quarrés aa, xx, $xx + 2bx + bb$ de ces trois nombres, & par la seconde condition la somme des deux derniers

derniers est égale au premier, ce qui donne $2xx+2bx+bb=aa$.

$$2xx+2bx+bb=aa$$
$$xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$$
$$xx+bx=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{2}$$
$$xx+bx+\frac{bb}{4}=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} x+\frac{b}{2} \\ \frac{b}{2}+x \end{array}\right\}=\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$$
$$x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}, \text{ premiere racine.}$$
$$x=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}, \text{ seconde racine.}$$
$$x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$$
$$x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$$
$$\begin{array}{ll} xx+\frac{bx}{2}-x\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}} & \\ +\frac{bx}{2} & +\frac{bb}{4}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}} \\ +x\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}} & +\frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}-\frac{aa}{2}+\frac{bb}{4} \\ \hline \end{array}$$
$$xx+bx+\frac{2bb}{4}-\frac{aa}{2}=0$$
$$\text{ou } xx+bx+\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}=0$$

Je divise tout par 2 pour dégager le premier terme de l'inconnuë de son coëfficient, puis je fais passer $\frac{bb}{2}$ dans le second membre; enfin j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{bb}{4}$ de la moitié du coëfficient b du second terme, ce qui fait que dans le second membre il se trouve $-\frac{bb}{4}$ au lieu de $\frac{b}{2}$, car $\frac{bb}{4}$ qu'il faut ajouter avec $-\frac{bb}{2}$ qu'il y avoit déja, étant réduits au même dénominateur, en multipliant par 2 le numérateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{bb}{2}$, on a $\frac{bb}{4}-\frac{2bb}{4}$, ce qui fait $-\frac{bb}{4}$.

J'ai donc $xx+bx+\frac{bb}{4}=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x+\frac{1}{2}b$, ou $\frac{1}{2}b+x=\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$, & de quelque façon que je dégage x, je trouve $x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$, ce qui semble faire voir que l'équation n'a qu'une racine, cependant elle en a deux ; car la seconde est $x=-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$.

Et pour s'en convaincre on n'a qu'à tout faire passer dans le premier membre dans l'une & dans l'autre de ces expressions, & l'on aura $x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$ pour la premiere, & $x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$ pour la seconde, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, le produit sera $xx+bx+\frac{bb}{4}-\frac{aa}{2}=0$ qui est précisément l'équation $xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$ de notre Problême, puisqu'il n'y a qu'à faire passer $\frac{aa}{2}$ dans le premier membre de celle-ci pour la rendre parfaitement égale au produit des deux racines.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans les deux racines, & j'ai $x=-1+\sqrt{50-1}=-1+\sqrt{49}=-1+7=6$ valeur positive de x, & $x=-1-7=-8$ valeur négative de x ; ainsi quoique l'équation ait deux racines, il n'y en a qu'une qui puisse résoudre le Problême, sçavoir la positive 6 ; le troisiéme Détachement a donc 6 hommes, & par conséquent le second en a 8, & il est aisé de vérifier si les trois nombres 10, 8, & 6 remplissent toutes les conditions du Problême.

Si dans l'équation $xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$ on avoit fait passer la grandeur $\frac{aa}{2}$ du second membre dans le premier, on auroit eu $xx+bx+\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}=0$, & à cause de la grandeur a plus grande que la grandeur b, le dernier terme auroit eu le signe $-$; c'est pourquoi l'ordre alternatif des signes $+$ & $-$ auroit été interrompu une fois, & cela nous fait juger selon la regle de M.

Descartes, qu'il y auroit eu une racine négative dans l'équation, ce que nous avons trouvé être véritable.

Je ne donne pas un plus grand nombre d'exemples de peur d'être trop long, mais je suis bien aise de faire observer que si dans les racines des deux exemples précédens, la grandeur qui est sous le signe radical avoit été une grandeur négative, les deux expressions des racines auroient été imaginaires, & que par conséquent les Problêmes proposés auroient renfermé une contradiction manifeste.

De la Résolution des Equations du 3e, 4e, 5e, dégré, &c.

224. On donne différentes Méthodes pour résoudre ces sortes d'équations, mais comme la plûpart de ces Méthodes sont extrémément compliquées, & qu'elles demandent grand nombre de préparations longues, ennuyeuses & embarrassantes, j'ai cru devoir m'en tenir ici à la plus simple de routes, qui consiste à faire en sorte que le plus haut dégré de l'inconnuë se trouve sans aucun coëfficient, ainsi que nous l'avons enseigné ci-dessus, (*N.* 209.), & ensuite à diviser l'équation par l'inconnuë x, moins ou plus quelqu'un des diviseurs du dernier terme de l'équation, lequel est toujours une grandeur entierement connuë qui contient le produit de toutes les racines (*N.* 217.) car puisque l'équation se forme par la multiplication de plusieurs différentes grandeurs de x, lesquelles en passant dans le premier membre donnent les produisans $x - a = 0$, ou $x + a = 0$, &c. (*N.* 212. 213.) il est clair qu'en divisant par quelqu'une des équations produisantes, le diviseur doit être exact, & si cela n'est pas, ce sera une marque, ou que l'équation aura été produite par des incommensurables, ou par des incommensurables & des imaginaires, &c.

225. Il suit delà que pour pouvoir résoudre une équation composée du troisiéme, quatriéme, cinquiéme dégré, &c. il faut nécessairement sçavoir trouver tous les diviseurs de son dernier terme tout connu, & c'est ce que nous allons enseigner dans le Problême suivant.

226. PROBLEME. *Trouver tous les diviseurs d'un nombre proposé.*
Soit le nombre proposé 4320, je prens les nombres simples 2, 3, 5, 7, &c. entendant par le nom de nombres simples ceux qui ne peuvent se diviser que par eux-mêmes ou par l'unité, & je divise d'abord le nombre proposé par 2; ce qui me donne le quotient 2160, & il ne reste rien; ainsi 2 est un diviseur exact

du nombre propoſé. Je diviſe le quotient 2160 encore par 2, & le quotient 1080 eſt encore exact; c'eſt pourquoi je le diviſe encore

2	2	2	2	2	3	3	3	5	
4320 (	2160 (	1080 (	540 (	270 (	135 (	45 (	15 (	5 (	1

par 2, & je trouve encore un nouveau quotient exact 540, lequel diviſé de nouveau par 2 donne un autre quotient exact 270, que je puis encore diviſer par 2, & j'ai un quotient exact 135, mais celui-ci ne peut plus ſe diviſer par 2, c'eſt pourquoi je le diviſe par 3, & le quotient 45 eſt exact; je diviſe ce quotient par 3, & je trouve un nouveau quotient 15, lequel diviſé par 3 donne exactement 5; or 5 ne pouvant plus ſe diviſer par 3, je le diviſe par 5, & j'ai pour quotient 1 qui ne peut plus ſe diviſer.

Les diviſeurs ſimples ſont donc 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3; 5 & 1; or comme tous ces diviſeurs ſont ſucceſſifs, & que c'eſt la même choſe de diviſer un nombre ſucceſſivement par pluſieurs nombres, ou de le diviſer tout d'un coup par le produit de ces nombres (*N.* 35.) il eſt clair que les deux diviſions ſucceſſives par 2 & 2 donnent le même quotient que ſi j'avois diviſé tout d'un coup par le produit 4 des deux diviſeurs; donc 4 eſt encore un diviſeur exact du nombre propoſé. Par la même raiſon les trois diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, multipliés les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur exact 8; les quatre diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, 2, en ſe multipliant les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur 16, & le produit des cinq diviſeurs 2, 2, 2, 2, 2, donnera encore un diviſeur 32; ainſi nous aurons quatre autres diviſeurs 4, 8, 16, 32, multiples de 2.

Je fais la même choſe à l'égard des trois diviſeurs ſimples 3, 3, 3, & je trouve deux nouveaux diviſeurs 9 & 27 multiples de 3.

Maintenant je multiplie le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples, par le diviſeur ſimple 3 & ſes multiples, & j'ai 15 nouveaux diviſeurs 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864.

Je multiplie le diviſeur ſimple 5 par le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples, par le diviſeur 3 & ſes multiples, & par les quinze diviſeurs précédens; ce qui me donne les vingt-trois nouveaux diviſeurs 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320.

Ainſi en ne prenant qu'une fois chaque diviſeur ſimple, & mettant avec eux l'unité qui eſt auſſi un diviſeur, nous avons quatre diviſeurs ſimples qui ajoutés à tous les autres donnent en

en tout les quarante-huit diviſeurs ſuivans 1. 2. 3. 4. 5. 8. 16. 32. 9. 27. 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864. 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 50. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320. & il eſt clair que l'on ne peut pas en trouver d'autres, ce qui ſe démontre par l'opération même ; car le nombre propoſé étant diviſé exactement par les quatre diviſeurs ſimples 1. 2. 3. 5. qui en ſe multipliant pluſieurs fois les uns par les autres l'ont produit, il faut néceſſairement que tout diviſeur de ce nombre ſoit ou quelqu'un de ces quatre nombres ſimples, ou quelqu'un de leurs multiples : or nous avons pris tous les multiples de ces quatre diviſeurs qui peuvent diviſer exactement ; donc en ajoutant à tous ces multiples les quatre diviſeurs ſimples, nous avons pris tous les diviſeurs poſſibles, & on n'en ſçauroit trouver d'autres. Cela poſé

227. Soit l'équation du troiſiéme dégré $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ dont on demande les racines ; je cherche tous les diviſeurs du dernier terme 24, qui ſont 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. & 24, & prenant l'inconnuë x, je fais $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, ce qui donne en tranſpoſant d'un membre à l'autre $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, &c. & ce ſont des valeurs poſitives. Je fais de même $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, &c. & en tranſpoſant j'ai $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. & ce ſont des valeurs négatives.

Je diviſe l'équation propoſée par chacune des valeurs poſitives juſqu'à ce que j'en trouve une qui diviſe exactement, & je vois que $x - 2 = 0$ eſt un diviſeur exact, ainſi $x = 2$ eſt une racine de l'équation.

$$\begin{array}{l} x^3 - 9x^3 + 26x - 24 \;(x^2 - 7x + 12 \\ \underline{x - 2} \\ \quad - 7x^2 + 26x \\ \qquad \underline{x - 2} \\ \qquad + 12x - 24 \\ \qquad\quad \underline{x - 2} \\ \qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Pour trouver les deux autres, je diviſe le quotient $x^2 - 7x + 12 = 0$ de la même façon, c'eſt-à-dire, je cherche les diviſeurs de ſon dernier terme qui ſont 1. 2. 3. 4.

$$\begin{array}{l} x^2 - 7x + 12 \;(x - 4 \\ \underline{x - 3} \\ \quad - 4x + 12 \\ \qquad \underline{x - 3} \\ \qquad 0 \quad 0 \end{array}$$

6, & 12, & je fais les équations positives $x-1=0$, $x-2=0$, &c. & les négatives $x+1=0$, $x+2=0$, & je divise l'équation d'abord par chacune des équations positives jusqu'à ce que j'en trouve une qui divise exactement; or en opérant ainsi je trouve que $x-3=0$ est un diviseur parfait, & que le quotient est $x-4=0$; ainsi les deux autres racines sont $x=3$, & $x=4$, & les trois racines sont positives, ce que l'on pouvoit voir d'abord par l'ordre alternatif des signes $+$ & $-$.

Que si en divisant par les équations positives on n'en trouvoit point qui divisât exactement, ce seroit marque qu'il n'y auroit point de racine positive commensurable, & en ce cas l'on diviseroit par les équations négatives jusqu'à ce qu'on en trouvât une qui divisât exactement, & si en achevant le reste comme ci-dessus, on trouvoit deux autres racines, les trois racines seroient négatives; que si on ne trouvoit point d'équations négatives qui divisât exactement, ce seroit une marque que l'équation n'auroit point non plus de racines négatives commensurables.

On voit aisément qu'il pourroit se trouver des racines positives, des racines négatives commensurables & incommensurables, & enfin des racines imaginaires, ainsi sans entrer dans un plus grand détail, je me contenterai de faire voir l'usage que l'on peut faire de ces équations dans l'exemple suivant.

EXEMPLE. *Deux personnes ont partagé la somme de six livres, de façon qu'en faisant le cube de leur parts, la différence est 56, on demande quelle est la part de chacun d'eux.*

Je nomme $2a$ la somme 6, $2z$ la différence de l'une à l'autre part, & $2b$ la différence 56 des deux cubes; donc la part du premier est $a+z$ (*N.* 200.), & celle du second est $a-z$; je fais les cubes, & retranchant le plus petit du plus grand, le reste est $2z^3+6aaz$.

$$a^3+3aaz+3azz+z^3. \text{ Cube du } 1^{er}.$$
$$a^3-3aaz+3azz-z^3. \text{ Cube du } 2^{e}.$$
$$6aaz \quad 2z^3. \text{ Différence.}$$

Or par la condition du Problême, cette différence est égale à $56=2b$,

$$2z^3+6aaz=2b$$
$$z^3+3aaz=b$$
$$z^3+3aaz-b=0$$

donc j'ai $2z^3+6aaz=2b$, & divisant tout par 2, & faisant passer b du second membre dans le premier, j'ai $z^3+3aaz-b=0$ qui est une équation du troisiéme dégré qui contient nécef-

sairement des racines négatives, puisque le second terme manque.

Je mets dans cette équation les valeurs des lettres a, b, ce qui donne $z^3 + 27z - 28 = 0$; or les diviseurs de 28 sont 1. 2. 4. 7. 14. & 28 ; faisant donc mes équations positives $z - 1 = 0$, $z - 4 = 0$, &c. & les négatives $z + 1 = 0$, $z + 4 = 0$, &c. je trouve que $z - 1 = 0$ divise exactement l'équation ; ainsi $z - 1 = 0$, ou $z = 1$ est une racine positive de l'équation.

$$\begin{array}{l} z^3 + 27z - 28 \; (z^2 + z + 28 \\ \underline{z - 1} \\ \quad + z^2 + 27z \\ \quad \underline{\quad z - 1} \\ \qquad 28z - 28 \\ \qquad \underline{\quad z - 1} \\ \qquad \;\; 0 \quad 0 \end{array}$$

Pour trouver les deux autres, je résous l'équation $z^2 + z + 28 = 0$ qui est du second dégré, par la Méthode du second dégré, & je trouve que les deux racines sont $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, & $z = -\frac{1}{2} - \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, & ces deux racines sont imaginaires, ainsi le Problême n'a qu'une solution ; or puisque $z = 1$, la différence sera $2z = 2$, & par conséquent la part du premier qui est $a + z$ doit être $3 + 1$, ou 4, & la part du second qui est $a - z$ doit être $3 - 1$ ou 2, & la somme de ces deux nombres est 6, & la différence de leur cubes 64 & 8 est 56, ce qui étoit proposé.

Et on résoudra de même les autres équations de quelque dégré qu'elles soient, que si elles ne peuvent pas se réduire par cette voye, ou qu'on n'en puisse pas du moins trouver quelque racine, ce sera une marque que cette équation ne contiendra que des racines incommensurables.

228. Ce seroit ici le lieu de parler de la maniere d'extraire ces racines incommensurables, mais comme on ne s'avise pas de proposer des problêmes numériques qui ne contiennent que des grandeurs incommensurables, & qu'à l'égard des problêmes géométriques on a d'autres Méthodes dont nous parlerons dans la suite, je passerai ici cette matiere sous silence pour ne pas amuser les Lecteurs à des choses qui ne sont pas d'une grande utilité.

De la Résolution des Problêmes indéterminés.

229. Ier. EXEMPLE. *Quatre Marchands ont fait une Societé, la somme des mises des deux premiers est* 14 *livres, celle des mises du second & du troisiéme est* 16, *celle des mises du troisiéme & du quatriéme est* 22, *& celle des mises du premier & du quatriéme est* 20 ; *quelle est la mise totale, & la mise de chacun en particulier ?*

Je nomme a la somme 14; b la somme 16, c la somme 22; & d la somme 20, x la mise du premier; y celle du second, z celle du troisiéme, & u celle du quatriéme, les conditions du Problême me donnent les 4 équations qu'on voit ici, lesquelles ajoutées, font

$x+y=a$, premiere condition.
$y+z=b$, seconde condition.
$z+u=c$, troisiéme condition.
$u+x=d$, quatriéme condition.

$$2x+2y+2z+2u=a+b+c+d$$
$$x+y+z+u=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}d. \text{ Mise totale}$$

une équation qui divisée par 2 donne l'équation ou la valeur de la mise totale; mais de cette valeur je ne puis tirer les mises particulieres, ainsi que j'ai fait dans le troisiéme exemple des Problêmes determinés (*N.* 198.) car si je veux dégager quelqu'une des inconnuës, par exemple x, les trois autres inconnuës passeront dans le second membre, & j'aurai beau substituer les valeurs de ces inconnuës prises dans les conditions du Problême, je ne découvrirai rien.

Pour trouver donc ces mises je dégage y dans la premiere & la seconde condition, ce qui donne deux valeurs de y, je fais une équation de ces deux valeurs, & je dégage z, ce qui donne $z=b-a+x$. Je dégage z dans la troisiéme condition, & j'ai $z=c-u$.

$y=a-x$, 1[re] valeur de y.
$y=b-z$, 2[e]. valeur de y.

$a-x=b-z$

$z=b-a+x$, 1[re] valeur de z.
$z=c-u$ 2[e]. valeur de z.

$b-a+x=c-u$

$u=-b+a-x+c$, 1[re] valeur de u.
$u=d-x$ 2[e]. valeur de u.

$-b+a-x+c=d-x$
$-b+a+c=d$

Je fais une équation des deux valeurs de z, & j'en dégage l'inconnuë u, ce qui me donne $u=-b+a-x+c$, je dégage de même u dans la quatriéme, & j'ai $u=d-x$.

Je fais une équation des deux valeurs de u, & corrigeant l'expression, c'est-à-dire, effaçant x de part & d'autre, je trouve l'équation $-b+a+c=d$, dont l'un & l'autre membre contiennent des grandeurs entierement connuës, ce qui ne détermine

mine rien, c'est pourquoi le Problême est indéterminé ; mais si je détermine l'une des inconnuës toutes les autres le deviendront aisément. Je choisis l'inconnuë x pour la déterminer, & pour ne pas supposer x égal à quelque nombre qui ne seroit pas propre pour la résolution, je vois que dans la premiere valeur de y, l'inconnuë x doit être moindre que a si je veux que y ait une valeur positive. De même dans la seconde valeur de u, je vois que x doit être moindre que d, si je veux que u soit une grandeur positive ; & dans la premiere valeur de z je ne trouve rien qui détermine x ; ainsi je prens au lieu de x une grandeur moindre que a & que d, & mettant cette valeur au lieu de x dans les valeurs de y, z, u, dont nous venonr de parler, toutes les inconnuës se trouvent déterminées.

Or $a=14$, & $d=20$, prenant donc un nombre au-dessous de 14 pour le faire égal à x, je résoudrai le Problême.

Ainsi je suppose $x=10$, & par conséquent j'ai $y=a-x=a-10=14-10=4$; $z=b-a+x=16-14+10=12$, & $u=d-x=20-10=10$, & ces quatre nombres $x=10$, $y=4$, $z=12$, & $u=10$ remplissent les conditions du Problême, ce qu'il est facile d'éprouver ; on trouvera d'autres solutions, en supposant x égal à quelqu'autre nombre au-dessous de 14.

230. II. Exemple. *Un homme tient dans ses deux mains deux différens nombres de jettons, & si l'on multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, & qu'au produit on ajoute la somme des deux nombres, la somme totale sera 34 ; combien y a-t'il de jettons dans chaque main?*

Je nomme a la somme 34, z le premier nombre de jettons, & y le second, ainsi par la premiere condition du Problême, j'ai $zy+z+y=a$. Je fais passer y du premier membre dans le second, & divisant ensuite par $y+1$, j'ai $z=\frac{a-y}{y+1}$, & toutes les conditions du Problême étant remplies, il me reste deux inconnues, & par conséquent il m'est libre de déterminer l'une des deux par exemple y, mais à cause du numerateur $a-y$, je vois que y doit être moindre que a si je veux que z soit une grandeur positive, ainsi je puis prendre pour y telle grandeur que je voudrai au-dessous de $a=34$.

$$zy+z+y=a$$
$$zy+z=a-y$$
$$z=\frac{a-y}{y+1}$$

Supposons $y=4$, je mets cette valeur dans l'équation $z=\frac{a-y}{y+1}$, & je trouve $z=\frac{34-4}{4+1}=\frac{30}{5}=6$, & les deux nombres 4 & 6 remplissent les conditions du Problême ; mais il faut prendre

garde que quoiqu'il me soit libre de prendre pour y tel nombre que je voudrai au-dessous de 34, cependant je ne dois prendre que ceux qui peuvent donner une valeur de z en nombre entier, car le nombre de jettons de l'une & de l'autre main est un nombre entier ; ainsi il faut rejetter toutes les suppositions de y qui ne donneroient pas un nombre entier pour z.

231. Il n'arrive pas toujours qu'on puisse résoudre un problême indéterminé, en supposant que l'une des inconnuës est égale à un nombre quelconque ; & dans ces cas il faut avoir recours à d'autres voyes, ainsi qu'on va voir dans les deux exemples suivans.

232. III. EXEMPLE. *On demande de partager le quarré 100 en deux autres quarrés parfaits, c'est-à-dire en deux quarrés dont on puisse extraire la racine.*

Je nomme aa le quarré 100, & xx, zz, les deux quarrés demandés, ainsi par la condition du Problême, j'ai $xx + zz = aa$, & le Problême est indéterminé ; mais il ne m'est pas permis de supposer pour xx, ou pour zz tel nombre que je voudrai, & si par ce moyen j'arrivois à trouver une solution, ce ne seroit que par hazard. Que je suppose par exemple $xx = 9$, donc $zz = 91$, puisque $9 + 91 = 100$, mais 91 n'est pas un quarré parfait, donc le Problême n'est pas résolu ; de même que je suppose $xx = 16$, $zz = 84$, à cause que $16 + 84 = 100$, mais 84 n'est pas un quarré parfait, & par conséquent le Problême n'est pas plus résolu par cette supposition que par la précédente. Il est vrai que je puis supposer $xx = 36$, & par conséquent $zz = 64$, & la somme des deux étant 100, le Problême sera résolu, à cause que 36 & 64 sont des quarrés parfaits, mais cette solution ne sera trouvée que par hazard, que faut-il donc faire ? le voici.

Je nomme x la racine du premier quarré, celle du second sera certainement moindre que la racine a ou 10 du quarré aa ou 100, puisque le second quarré sera moindre que 100. Je prens une grandeur indéterminée y, & je suppose que la racine du second quarré inconnu est $yx - a$. Je puis faire cette supposition, parce que la lettre y pouvant signifier tel nombre entier, ou rompu, ou composé d'entier & de fraction, il est sûr qu'il y a quelque nombre quel qu'il soit qui multiplant la racine x du premier quarré inconnu, donne un produit yx, duquel retranchant a, le reste soit égal à la racine du second quarré cherché ; or je fais cette supposition 1°. afin de n'avoir qu'une seule inconnuë. 2°. parce qu'en

faisant les quarrés xx, & $yyxx - 2ayx + aa$, & ensuite leur somme, cette somme se trouvera égale à aa, & par conséquent retranchant aa de part & d'autre, il me restera une équation où je pourrai réduire l'inconnuë x au premier dégré, ainsi qu'on va voir.

Nous avons donc en faisant la somme des deux quarrés inconnus l'équation qu'on voit ici, & retranchant aa de part & d'autre, puis faisant passer $2ayx$ du premier membre dans le second, j'ai $xx + yyxx = 2ayx$, & divisant par x, & ensuite par $1 + yy$ ou par $yy + 1$, ce qui est la même chose, j'ai $x = \frac{2ay}{yy+1}$. Je mets cette valeur de x dans la valeur de la racine z, ou $yx - a$ du second quarré, & je trouve $z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$, & réduisant a en une fraction dont le dénominateur soit $yy + 1$, puis corrigeant l'expression, j'ai $z = \frac{ayy - a}{yy + 1}$; ainsi les valeurs des racines x & z des quarrés cherchés sont $\frac{2ay}{yy+1}$, & $\frac{ayy - a}{yy + 1}$, & si je détermine la valeur de y, ces deux racines me deviendront connuës, mais pour la déterminer je m'apperçois que dans la valeur de z, si je faisois $y = 1$, j'aurois $z = \frac{1a - a}{yy + 1} = 0$, & dans la valeur de x je ne vois rien qui détermine y; donc pourvû que je ne suppose pas $y = 1$, je puis prendre tel autre nombre que je voudrai au-dessus de l'unité, ou même au-dessous.

$$xx + yyxx - 2ayx + aa = aa$$
$$xx + yyxx = 2ayx$$
$$x + yyx = 2ay$$
$$x = \frac{2ay}{yy + 1}$$
$$z = \frac{2ayy}{yy + 1} - a$$
$$z = \frac{2ayy - ayy - a}{yy + 1}$$
$$z = \frac{ayy - a}{yy + 1}$$

Il est vrai qu'en supposant y égal à un nombre moindre que l'unité par exemple à $\frac{1}{2}$, j'aurai $z = \frac{\frac{1}{4}a - a}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-\frac{3}{4}a}{\frac{1}{4} + 1}$, & que par conséquent z sera une grandeur négative, mais cela n'empêchera pas que son quarré ne soit positif, parce que $-$ par $-$ donne $+$; ainsi la restriction que j'ai mise à ce Problême dans mon *Arithmétique des Géometres* n'est pas juste, & je suis bien aise de réparer ici cette faute qui se trouvera corrigée dans une seconde édition.

Je suppose donc $y = 2$, & par conséquent j'ai $x = \frac{2 \times 10 \times 2}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$, & $z = \frac{10 \times 4 - 10}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$, & les quarrés de ces deux nombres sont 64 & 36 dont la somme est égale à 100, & on trouvera d'autres quarrés dont la somme sera encore égale à 100, en supposant pour y tel autre nombre que l'on voudra moindre ou plus grand que l'unité.

233. IV. EXEMPLE. *On demande deux quarrés dont la somme soit égale à la somme des deux quarrés 64 & 100.*

Je nomme aa le quarré 64, & bb le quarré 100, il est évident que si l'un des deux quarrés demandés est plus grand que aa, l'autre doit être moindre que bb, & au contraire si le premier est moindre que aa, l'autre sera plus grand que bb, & par conséquent la racine du premier quarré demandé doit être ou moindre ou plus grande que la racine a du quarré aa. Pour trouver une expression convenable à l'un & l'autre de ces cas, je suppose que la racine du premier quarré demandé est $a + z$, parce que z pouvant être ou une grandeur positive, ou une grandeur négative, on voit bien qu'il faudra l'ajouter à la racine a si elle est positive, & la retrancher de la racine a si elle est négative; & pour la racine du second quarré cherché, je suppose $yz - b$, & la raison pourquoi je fais cette supposition, c'est 1°. que les deux quarrés des racines $z + a$, & $yz - b$ contiendront les quarrés donnés aa, bb, & que par conséquent faisant leur somme pour en faire une équation dont le second membre sera $aa + bb$, les termes aa, bb, s'effaceront de part & d'autre, & ensuite je pourrai réduire l'inconnuë z au premier dégré. 2°. parce qu'il est sûr qu'on peut trouver un nombre y qui soit tel qu'après l'avoir multiplié par z, il faille retrancher b du produit pour avoir la racine du second quarré demandé.

Je fais donc les quarrés de $a + z$ & de $yz - b$, & les ajoutant ensemble, leur somme est égale à la somme $aa + bb$; ainsi j'ai l'équation qu'on voit ici.

$$aa + 2az + zz, \text{ premier Quarré.}$$
$$yyzz - 2byz + bb, \text{ second Quarré.}$$
$$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb, \text{ Somme.}$$
$$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb = aa + bb$$
$$zz + yyzz = 2byz - 2az$$
$$z + yyz = 2by - 2a$$
$$z = \frac{2by - 2a}{yy + 1}$$

Je retranche $aa+bb$ de part & d'autre, & faisant passer $2az-2byz$ du premier membre dans le second, je trouve $zz+yyzz=2byz-2az$; je divise tout par z, & ensuite par $1+yy$, ce qui donne $z=\frac{2by-2a}{yy+1}$, & je vois qu'en déterminant y, l'inconnuë z sera connuë, & qu'en mettant sa valeur dans les racines $a+z$, & $yz-b$ des deux quarrés demandés, ces quarrés deviendront aussi connus.

Or pour déterminer y, je m'apperçois 1°. que si je faisois $y=1$ & que je misse cette valeur de y dans $z=\frac{2by-2a}{yy+1}$, j'aurois $z=2$, & par conséquent la racine $a+z$ seroit 10, & la racine $yz-b$ seroit $2-10$, ou -8, ainsi les quarrés de ces deux racines me donneroient les quarrés 100 & 64 qui sont les mêmes que les quarrés proposés; je ne dois donc point supposer $y=1$. 2°. Que si je veux que z ne soit pas égal à zero, il faut que je suppose y égal à un nombre qui soit tel que le numerateur $2by-2a$ de la valeur de z ne soit pas égal à zero, ainsi pourvû que j'observe ces deux conditions, je puis prendre pour y tel nombre entier ou rompu que je voudrai au-dessus ou au-dessous de l'unité.

Je suppose $y=2$, & mettant cette valeur dans $z=\frac{2by-2a}{yy+1}$ & aussi les valeurs des grandeurs connuës a, b, je trouve $z=\frac{40-16}{4+1}=\frac{24}{5}$, donc $a+z=8+\frac{24}{5}=\frac{40+24}{5}=\frac{64}{5}$, & $yz-b=\frac{48}{5}-10=\frac{48}{5}-\frac{50}{5}=-\frac{2}{5}$; faisant donc les quarrés de $\frac{64}{5}$ & de $-\frac{2}{5}$, j'ai $\frac{4096}{25}$, & $\frac{4}{25}$, dont la somme est $\frac{4100}{25}$, & réduisant la fraction en entiers je trouve 164 égal à la somme des quarrés proposés 100 & 64, & en supposant y égal à quelqu'autre nombre au-dessus ou au-dessous de l'unité, & qui ne donnât pas $2by=2a$, je trouverois d'autres quarrés dont la somme seroit 164; d'où l'on voit qu'on peut trouver une infinité de quarrés, lesquels pris deux à deux seroient égaux à la somme des quarrés proposés.

234. V. Exemple. *La Différence de deux quarrés est 60, on demande quels sont ces quarrés?*

Je nomme a la différence 60, & xx le plus grand quarré, donc le second sera $xx-a$, & comme ceci ne me fait rien connoître, je suppose que le côté ou la racine de ce second quarré est $x-y$, parce qu'il doit être moindre que la racine du quarré xx,

ainsi j'ai $xx - 2yx + yy$, & ce quarré est égal à $xx - a$, ce qui me donne une équation.

J'efface dans cette équation xx de part & d'autre, & faisant passer $-2yx$ du premier membre dans le second, & $-a$ du second dans le premier, je trouve une valeur de x dans laquelle rien ne m'empêche de donner à y telle valeur que je voudrai.

$$xx - 2yx + yy = xx - a$$
$$-2yx + yy = -a$$
$$a + yy = 2yx$$
$$\frac{a+yy}{2y} = x$$

Je suppose $y = 2$, & mettant cette valeur de y dans celle de x que je viens de trouver, j'ai $\frac{60+4}{4} = 16 = x$; faisant donc le quarré de 16, j'ai $256 = xx$, & retranchant 60 de 256, je trouve 196 dont la racine est 14; ainsi les deux quarrés demandés sont 256 & 196 dont la différence est 60, ce qui étoit requis, & on trouveroit d'autres quarrés dont la différence seroit 60, en supposant pour y telle autre valeur que l'on voudroit.

235. Ces sortes de Problêmes demandent une certaine adresse à trouver des expressions convenables pour faire en sorte que l'inconnuë puisse se trouver au premier dégré, & c'est là où gît toute la difficulté, mais avec un peu d'usage on en vient aisément à bout.

CHAPITRE VII.

Des Raisons, Proportions & Progressions Arithmétiques.

236. Lorsqu'on compare ensemble deux grandeurs, ce que l'on trouve que l'une est à l'égard de l'autre, est ce qu'on nomme en général *Raison*, ou *Rapport*, & en latin *habitudo.*

237. On peut comparer deux grandeurs de deux façons différentes; l'une en examinant l'excès dont la plus grande des deux grandeurs surpasse la moindre, & alors la raison se nomme *Raison arithmétique*, & l'autre en considérant combien de fois la plus grande des deux grandeurs contient la moindre, & en ce cas la raison se nomme *Raison géométrique.*

238. La Raison arithmétique se trouve en retranchant la moindre des deux grandeurs, de la plus grande, & le reste ou la *différence* fait voir le rapport des deux grandeurs, c'est pourquoi la Raison arithmétique est nommée quelquefois *différence.* Au contraire la Raison géométrique se trouve en divisant la plus grande

quantité par la moindre, & le quotient marque le rapport cherché. Ce quotient se nomme *exposant*, parce qu'il *expose*, ou fait voir combien la premiere des deux grandeurs contient l'autre, ou y est contenuë.

239. Il y a donc nécessairement deux termes dans toute Raison, le premier se nomme *antécédent*, & le second *conséquent*.

240. Lorsqu'après avoir comparé deux grandeurs ensemble; on vient à en comparer deux autres, & que l'on trouve que la Raison des deux premieres est égale à la Raison des deux secondes, cela se nomme *Proportion*, & cette proportion est *arithmétrique*, ou *géométrique*, selon que les raisons qui la composent sont arithmétiques ou geométriques.

241. Toute proportion a par conséquent quatre termes; le premier se nomme *premier antécédent*, le second *premier conséquent*, le troisiéme *second antécédent*, & le quatriéme *second conséquent*.

242. Le premier & le dernier terme d'une proportion se nomment les *extrêmes*, & le second & le troisiéme se nomment les *moyens*.

243. Lorsque le second & le troisiéme terme d'une proportion sont égaux, c'est-à-dire, lorsqu'une même grandeur sert de premier conséquent & de second antécédent, cette grandeur se nomme *moyenne proportionnelle*, & la proportion se nomme proportion *continuë* arithmétique ou géométrique.

244. Si les quatre différens termes d'une proportion sont a, b, c, d, & que la proportion soit arithmétique, on l'exprime ainsi: $a.\,b \because c.\,d.$ ou $a, b \because c, d$; mais si la proportion est géométrique, on l'écrit de cette façon $a.\,b :: c.\,d.$ ou $a, b :: c, d$, & dans l'un & l'autre cas on l'énonce en disant: a est à b comme c est à d, c'est-à-dire dans la proportion arithmétique a surpasse ou est surpassé par b autant que c surpasse ou est surpassé par d, & dans la proportion géométrique a contient b, ou est contenu dans b de la même façon que c contient ou est contenu dans d.

245. Si l'on a plusieurs grandeurs de suite en proportion continuë, de sorte que la premiere soit à la seconde, comme la seconde est à la troisiéme, comme la troisiéme à la quatriéme, comme la quatriéme à la cinquiéme, ainsi de suite, cela se nomme *progression*, & si la progression est arithmétique, on l'écrit ainsi $\because a.\,b.\,c.\,d.\,e.\,f.$ ou $\because a, b, c, d, e, f$, mais si elle est géométrique, on écrit $:: a.\,b.\,c.\,d.\,e.\,f$, ou $:: a, b, c, d, e, f$, & on énonce l'une & l'autre en disant a est à b comme b est à c, comme c est à d, comme d est à f, &c.

Nous examinerons dans le Chapitre suivant les proprietés des Raisons, Proportions & Progressions géometriques.

246. THEOREME. *Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens; & si la proportion est continuë, la somme des extrêmes est égale au double de la moyenne.*

Soit la proportion arithmétique $a, b \therefore c, f$, il est clair que la différence de la premiere raison a, b, sera égale à la différence de la seconde c, f, puisqu'il y a proportion; nommons donc cette différence d, & supposons en premier lieu que le premier antécédent a soit moindre que son conséquent b, & que par conséquent le second antécédent c soit moindre que le second conséquent f, il est visible que nous aurons $a+d=b$, & $c+d=f$, puisque d est la quantité qui manque à chaque antécédent pour être égaux à leurs conséquens; mettant donc dans la proportion $a+d$ au lieu de b, & $c+d$ au lieu de f, nous aurons $a, a+d \therefore c, c+d$, & cette proportion sera la même que la proposée; ainsi la somme des extrêmes sera $a+c+d$, & celle des moyens $a+d+c$, mais ces deux sommes sont composées des mêmes quantités; donc elles sont égales, & par conséquent nous avons $a+c+d=a+d+c$.

Supposons en second lieu que a soit plus grand que b, c sera aussi plus grand que f, & nous aurons $b+d=a$, & $f+d=c$; ainsi mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $b+d. b \therefore f+d. f$, & faisant la somme des extrêmes & celle des moyens, nous aurons $b+d+f=b+f+d$.

Enfin supposons la proportion continuë $\therefore a, b, c$, cette proportion peut s'écrire ainsi $a, b \therefore b, c$; ainsi supposant que la différence soit d, & que a soit moindre que b, nous aurons dans la premiere raison $a+d=b$, & dans la seconde $b+d=c$, mettant donc ces valeurs de b & c dans la proportion $a, b \therefore b, c$, nous aurons $a, a+d \therefore b, b+d$, & la somme $a+b+d$ des extrêmes sera égale à la somme $a+d+b$ des moyens; donc j'ai $a+c=2b$, en substituant les valeurs de $b+d$ & de $a+d$.

Que si a est plus grand que b, nous aurons dans la premiere raison $b+d=a$, & dans la seconde $c+d=b$; c'est pourquoi en mettant ces valeurs de a & b dans la proportion $a, b \therefore b, c$, nous aurons $b+d. b \therefore c+d. c$, & la somme des extrêmes $b+d+c$ sera égale à la somme des moyens $b+c+d$, donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

247. PROBLEME. *Trois termes d'une Proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrième.*

Supposons que a, b, c, soient les trois premiers termes d'une Proportion arithmétique, je nomme x le quatriéme, & j'ai $a.\ b \therefore c.\ x$, & faisant la somme des extrêmes & celle des moyens, je trouve $a+x=b+c$ (*N.* 246.) & faisant passer a du premier membre dans le second, j'ai $x=b+c-a$, ce qui me fait voir que si de la somme des moyens je retranche le premier terme, le reste sera le dernier terme demandé.

Soit $a=2$, $b=5$, $c=7$, la somme des moyens est 12 de laquelle retranchant le premier terme 2, le reste 10 sera le dernier terme cherché, & nous aurons la proportion arithmétique $2, 5 \therefore 7, 10$.

Il est aisé de voir que si c'étoit le premier terme qui manquât dans la proportion, ou le second, ou le troisiéme, on n'auroit qu'à mettre x à sa place, & achever le reste comme nous venons de faire.

248. *REMARQUE.* S'il manquoit deux termes à la proportion, le Problême seroit indéterminé; par exemple, soient a, b, les deux extrêmes d'une Proportion, je nomme la premiere moyenne x, & la seconde y, & j'ai $a, x \therefore y, b$, & par conséquent $a+b=y+x$ (*N.* 246.); ainsi il faut nécessairement déterminer l'une des inconnuës, je détermine x, qui est la premiere moyenne en lui donnant une valeur c moindre ou plus grande que a, & j'ai $a, c :: y, b$; d'où je tire $a+b=c+y$, & faisant passer c dans le premier membre, je trouve $a+b-c=y$.

Soit $a=2$, & $b=7$, je suppose $x=4$, ainsi j'ai $2, 4 \therefore y.\ 7$, d'où je tire $2+7=4+y$, ou $9=4+y$, & par conséquent $y=9-4=5$, & la proportion est $2, 3 \therefore 5, 7$.

249. THEOREME. *Dans toute Progression arithmétique ascendante, c'est-à-dire, dont les termes vont en augmentant, la somme de deux termes également éloignés du premier & du dernier, c'est-à-dire également éloignés des extrêmes est égale à la somme des extrêmes.*

Soit la Progression arithmétique ascendante $\therefore a, b, c, e, f, g$, dont je suppose que la différence est d, le second terme b sera donc égal à $a+d$, le troisiéme c sera égal à $b+d$, ou $a+d+d$, ou $a+2d$, la quatriéme sera $a+3d$, & ainsi de suite, puisque ces termes vont toujours en augmentant d'une égale différence; ainsi la progression $\therefore a, b, c, e, f$, sera la même que $a, a+d, a+2d$,

$a+3d$, $a+4d$, $a+5d$; or si dans cette progression je prens les termes $a+d$, & $a+4d$ qui sont également éloignés des extrêmes, leur somme $a+d+a+4d$, ou $2a+5d$ sera égale à la somme $a+a+5d$, ou $2a+5d$ des extrêmes. Que si je prens les termes $a+2d$, & $a+3d$ qui sont également éloignés des extrêmes, je trouverai de même que leur somme est égale à la somme $2a+5d$ des extrêmes, donc, &c.

250. *Remarque*. Que si la Progression étoit descendante, c'est-à-dire si ses termes alloient en diminuant, il est clair qu'en la prenant à rebours, elle seroit ascendante, & par conséquent on prouveroit de la même façon que nous venons de faire, que la somme de deux termes également éloignés des extrêmes, seroit égale à la somme des extrêmes; or comme il est toujours facile de prendre une progression à rebours, en écrivant ∴ g, f, e, c, b, a, au lieu de ∴ a, b, c, e, f, g, nous supposerons toujours que la progression est ascendante dans tout ce que nous allons dire pour n'être pas obligé de donner des regles différentes pour les deux cas.

251. Theoreme. *Dans toute Progression arithmétique ascendante; la somme de tous les termes est égale à la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire du nombre qui exprime combien il y a de termes.*

Soit la progression ascendante a, b, c, e, f, g, qui a six termes je fais la somme $b+f$ des termes b, f, également éloignés des extrêmes, la somme $c+e$ des termes c, e, également éloignés des extrêmes, & enfin la somme $a+g$ des extrêmes, & ces trois sommes sont égales entr'elles (*N*. 249.), & elles sont aussi égales à la somme de la progression, ou de tous les termes; or ces trois sommes égales sont la même chose que la somme des extrêmes multipliée par 3, mais 3 est la moitié du nombre des termes 6, donc la somme des termes, ou la somme de la progression, est égale à la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Il est aisé de voir que s'il y avoit un plus grand nombre de termes, & que ce nombre fut pair, les termes pris deux à deux donneroient toujours un nombre de sommes égales qui seroit exprimé par la moitié du nombre des termes, & par conséquent on auroit toujours la somme de la progression égale à la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Mais si le nombre des termes étoit impair comme dans la

progreſſion ∴ a, b, c, e, f, g, h, nous aurions d'abord les trois ſommes $b+g$, $c+f$, & $a+h$ égales, & il reſteroit le terme e, or à cauſe que les trois termes c, e, f, ſont en proportion continuë, la ſomme $c+f$ ſeroit égale au double du terme e (*N.* 246.); donc le terme e ne ſeroit que la moitié de l'une des trois ſommes égales; ainſi nous aurions trois ſommes égales & une demi ſomme, mais trois ſommes égales & une demi ſomme ſont la même choſe que l'une des ſommes multipliées par 3 & demi; donc la ſomme de la progreſſion ſeroit égale à la ſomme des extrêmes multipliée par $3\frac{1}{2}$ qui eſt la moitié du nombre des termes 7, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

252. THEOREME. *Dans toute progreſſion arithmétique aſcendante, le dernier terme contient le premier plus la difference multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.*

Soit la progreſſion arithmétique aſcendante ∴ a, b, c, e, f, dont je ſuppoſe que la différence eſt d, cette progreſſion ſera la même que celle-ci ∴ $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$; or le le dernier terme $a+4d$ contient le premier terme a, plus $4d$, c'eſt-à-dire, plus la différence d multipliée par 4, c'eſt-à-dire par le nombre des termes moins un; donc le dernier terme $a+4d$ contient le ptemier terme, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.

253. COROLLAIRE. Il ſuit de ce Théorême & des précédens 1°. Que pour trouver la ſomme d'une progreſſion dont le premier terme, le dernier, & le nombre des termes ſont connus, il faut ajouter les deux extrêmes enſemble & les multiplier par la moitié du nombre des termes. 2°. Que ſi on connoît le premier terme, le dernier, & le nombre des termes, on connoîtra la différence en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite le reſte par le nombre des termes diminué de l'unité; car ce reſte eſt égal au produit de la différence multiplié par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) 3°. Que ſi l'on connoît le premier terme, le dernier & la différence, on trouvera le nombre des termes, en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant le reſte par la différence, puis ajoutant 1 au quotient, puiſque ce reſte eſt égal à la différence multipliée par le nombre des termes -1 (*N.* 252.) 4°. Que ſi l'on connoît le premier terme, la différence & le nombre des termes, on connoîtra le dernier, en faiſant le produit de la différence par le nombre des termes diminué de l'unité, & en ajoutant ce produit

Je multiplie la différence 3 par le nombre des termes diminué de l'unité, c'est-à-dire par 7, ce qui fait 21, & ajoutant le premier terme 1 à ce produit, la somme 22 est ce qu'il a donné le dernier jour (*N.* 252.) après quoi je trouve la somme totale comme auparavant.

En troisiéme lieu, *On dit que cet homme augmentant chaque jour de 3, a donné le huitiéme jour 22 sols, & l'on demande combien il a donné le premier jour.*

Je multiplie la différence 3 par 7, ce qui fait 21, & retranchant 21 du dernier terme 22, le reste est le premier terme 1 (*N.* 251. 252.)

En quatriéme lieu, *On dit que cet homme a donné 1 sol le premier jour, 22 le dernier jour, & qu'il a toujours augmenté de 3, & l'on demande pendant combien de jours il a donné.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reste 21 est la différence 3 multiplié par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) donc divisant 21 par 3, le quotient 7 est le nombre de termes diminué de l'unité, & par conséquent 8 est le nombre de jours pendant lesquels cet homme a donné de l'argent.

En cinquiéme lieu, *On dit que cet homme a donné pendant huit jours, le premier jour 1, & le dernier 22, & l'on demande quelle est la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reste 21 est la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité (*N.* 252.) je divise donc ce reste par 8 — 1, ou 7, & le quotient 3 est la différence cherchée.

En sixiéme lieu, *On dit que cet homme a donné en tout 92 sols, & que le premier jour il a donné 1 & le dernier 22, & l'on demande pendant combien de jours il a donné, & quelle est la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

J'ajoute le premier terme au dernier, ce qui fait 23, & divisant 92 par 23, je trouve 4 qui est la moitié du nombre des termes; car la somme 92 est le produit de 23 par la moitié du nombre des termes (*N.* 251.) ainsi le nombre de jours est 8; après quoi retranchant le premier terme 1 du dernier 22, ce qui fait 21, je divise 21 par 8 — 1, ou par 7, & le quotient 3 est la différence cherchée (*N.* 252.)

En septiéme lieu, *On dit que cet homme ayant donné pendant 8 jours, en augmentant toujours de 3, a donné en tout 92 sols, & l'on demande combien il a donné le premier jour & le dernier.*

Je divise la somme 92 par 4 qui est la moitié du nombre des termes, & le quotient 23 est la somme des extrêmes (*N.* 251.); je fais le produit de la différence 3 par $8-1$, ou 7, ce qui fait 21, & le reste 2 est le double du premier terme; car la somme du premier & du dernier contient deux fois le premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité; ainsi cet homme a donné le premier jour 1 & le dernier 22.

255. *Remarque.* Si dans ces sortes de questions on donnoit à connoître moins de quantités qu'il ne faut pour pouvoir les résoudre comme nous venons de faire, on nommeroit les quantités inconnuës par les lettres x, y, &c. & on résoudroit le problême en suivant le principe précédent ainsi qu'on va voir.

256. Probleme. *On a détaché d'une Garnison le premier jour 5 hommes, le second 7, & ainsi de suite, en augmentant toujours de deux, & à la fin il s'est trouvé qu'on avoit détaché en tout 96 hommes; on demande pendant combien de jours ces Détachemens ont duré.*

Je connois bien ici trois choses, sçavoir le premier terme 5, la différence 2, & la somme de la progression 96, mais comme l'une de ces trois choses, c'est-à-dire la somme de la progression n'est pas au nombre des quatre premieres dont nous avons parlé (*N.* 253.) je ne puis pas résoudre le problême par les regles ordinaires, ainsi je nomme le nombre des termes y, & par conséquent $y-1$ est le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie la différence 2 par $y-1$, ce qui donne $2y-2$, & ajoutant à ce produit le premier terme 5, j'ai $2y+3$ pour le dernier terme (*N.* 252.), j'ajoute à ce terme le premier terme 5, & la somme $2y+8$ est la somme des extrêmes. Je multiplie cette somme par $\frac{1}{2}y$ qui est la moitié du nombre des termes, & le produit $yy+4y$ est la somme de la progression; or cette somme est égale à 96 par la condition du Problême; donc j'ai $yy+4y=96$ qui est une équation du second dégré.

$$\begin{array}{l} 2 \\ \underline{y-1} \\ 2y-2 \\ \underline{\quad 5} \\ 2y+3 \text{ dernier terme.} \\ \underline{\quad 5} \\ 2y+8 \text{ Somme des extrêmes.} \\ \underline{\frac{1}{2}y} \\ yy+4y \text{ Somme de la Progression.} \\ yy+4y=96 \\ yy+4y+4=100 \\ y+2=10 \\ y=-2+10=8 \end{array}$$

J'ajoute de part & d'autre le quarré 4 de la moitié du coëfficient 4 du second terme, & par ce moyen le premier membre est un quarré parfait (*N.* 221.), je tire la racine quartée de part & d'autre, & j'ai $y+2=10$, donc $y=-2+10=8$, est la premiere racine, & la seconde est $y=-2-10=-12$ qui est une racine négative; car si l'on multiplie $y-8=0$ par $y+12=0$, le produit sera $yy+4y-96=0$ qui est l'équation que nous avions à résoudre; or cette équation n'ayant qu'une racine positive, le Problême n'a qu'une solution, & par conséquent le nombre des jours pendant lesquels les Détachemens se sont faits est 8, ce que l'on connoîtra aisément si l'on continue la progression 5, 7, &c. jusqu'au huitiéme terme qui sera 19, lequel ajouté au premier sera 24, & cette somme multiplié par la moitié 4 du nombre des termes 8 donnera 96, ce qui étoit proposé.

257. **Probleme.** *Un Voleur fuit, & fait 10 lieuës par jour, un Archer le poursuit, & fait le premier jour 3 lieuës, le second 5 & ainsi de suite en augmentant toujours de deux, en combien de jours le voleur sera-t'il atteint, & combien de lieuës l'un & l'autre auront-ils fait?*

Je ne connois ici que le premier terme 3 & la différence 2 de la progression, mais comme le voleur fait tous les jours 10 lieuës, je vois que la somme de la progression de l'Archer sera égale à 10 multiplié par le nombres de jours qu'il aura employé pour l'atteindre; car on suppose que l'un & l'autre sont partis le même jour.

Je nomme donc y le nombre des termes ou des jours, ainsi $y-1$ sera le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie $y-1$ par la différence 2, & le produit est $2y-2$, auquel ajoutant le premier terme 3, la somme $2y+1$ est le dernier terme (*N.* 252), j'ajoute le premier terme 3 au dernier, & j'ai la somme des extrêmes $2y+4$. Je multiplie cette somme par $\frac{1}{2}y$, & le produit est la somme de la progression; or cette somme est égale

$$\begin{array}{ll} y-1 & \\ 2 & \\ \hline 2y-2 & \\ 3 & \\ \hline 2y+1 & \text{dernier terme.} \\ 3 & \\ \hline 2y+4 & \text{Somme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}y & \\ \hline yy+2y & \text{Somme de la Progression.} \\ yy+2y=10y & \\ y+2=10 & \\ y=10-2=8 & \end{array}$$

à 10 multiplié par y, comme nous venons de dire, donc j'ai l'équation $yy + 2y = 10y$, & divisant tout par y, puis faisant passer 2 dans le second membre, je trouve $y = 8$; ainsi l'archer a atteint le voleur dans 8 jours, ce que l'on prouvera en continuant la progression 3, 5, &c. jusqu'au huitiéme terme que l'on trouvera être 17, & ajoutant ce terme au premier, ce qui fera 20, puis multipliant par la moitié 4 du nombre des termes, on trouvera 80 pour la somme de la progression, & cette somme sera égale à 10 multiplié par le nombre des termes 8, ainsi le Voleur & l'Archer auront fait 80 lieuës chacun au bout de 8 jours.

258. PROBLEME. *Un homme a gagné au jeu pendant quelques jours une progression de loüis dont la somme totale est 48 loüis, & la somme des extrêmes est 16 loüis ; on demande combien de jours il a joué, ce qu'il a gagné le premier jour, & de combien le gain de chaque jour s'augmentoit au-dessus du précédent.*

Je divise la somme de la progression par la somme 16 des extrêmes, & le quotient 3 est la moitié du nombre des termes (*N.* 251.) ainsi cet homme a joué pendant 6 jours.

Maintenant pour répondre à ce qu'on me demande encore, je nomme x le premier terme, & y la différence. Je multiplie la différence par $6 - 1$, ou par 5, & ajoutant au produit $5y$ le premier terme x, la somme $5y + x$ est le dernier terme (*N.* 252.), j'ajoute à ce dernier terme le premier terme, je multiplie la somme $5y + 2x$ par 3 qui est la moitié du nombre des termes, & le produit est la somme de la progression (*N.* 251.); ainsi j'ai $15y + 6x = 48$, & faisant passer $6x$ dans le second membre, puis divisant tout par 15, j'ai $y = \frac{48 - 6x}{15}$, & le Problême est indéterminé.

$$\begin{array}{l} y \\ 5 \\ \hline 5y \\ x \\ \hline 5y + x \text{ dernier terme.} \\ 5y + 2x \text{ Somme des extrêmes.} \\ 3 \\ \hline 15y + 6x = 48 \\ 15y = 48 - 6x \\ y = \frac{48 - 6x}{15} \end{array}$$

Or je vois que pour déterminer x, il faut qu'en retranchant $6x$ de 48, le reste puisse être divisé exactement par 15, si je veux que la valeur $\frac{48 - 6x}{15}$ de la différence y soit une grandeur sans fraction,

je

Je suppose donc $x = 3$, & par conséquent $6x = 18$, & de 48 ôtant 18, le reste 30 divisé par 15 donne au quotient $2 = y$; ainsi cet homme a gagné le premier jour 3 loüis, le second 5, &c. en sorte que la progression est 3, 5, 7, 9, 11, 13, & il est aisé de voir que ces nombres remplissent les conditions du Problême.

Et cette solution est la seule que l'on puisse trouver si l'on veut que le premier terme & la différence soient des nombres entiers, mais si cette condition n'est pas requise, on peut supposer pour x, tel autre nombre qu'on voudra, pourvû que $6x$ soit moindre que 48, & autant de suppositions qu'on fera pour x, autant on trouvera de différentes solutions.

De la Maniere de compter les Piles de Boulets.

259. Les Piles de boulets qu'on voit dans les Arcenaux sont, ou des pyramides quarrées, telles que celle de la figure 12 de la Planche qu'on trouvera à la fin de ce premier Livre, ou des pyramides triangulaires (*Fig.* 6.) ou des pyramides oblongues (*Fig.* 13.) ou des pyramides oblongues qui ont à leurs extrêmités deux pyramides quarrées (*Fig.* 14.) & qui quelquefois sont aussi entrecoupées de pyramides quarrées (*Fig.* 15.) & il s'agit, en voyant ces pyramides, de sçavoir le nombre de boulets qu'elles contiennent; c'est ce que nous allons faire en examinant les formations de ces piles.

260. Si l'on écrit la suite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. & qu'on prenne le premier, puis la somme des deux premiers, puis celle des trois premiers, & ainsi de suite; on formera une autre suite de nombres 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. que l'on nomme *triangulaires*, parce que ce sont les seuls qui puissent s'arranger en triangles, comme on voit dans les figures 1. 2. 3. 4. 5.

261. Chaque nombre triangulaire est donc la somme d'une progression de nombres naturels, & son côté est toujours égal au dernier terme de la progression qui l'a formé, & aussi au nombre des termes de cette progression. Par exemple, le côté du nombre triangulaire 10 (*Fig.* 4.) qui est la somme de la progression 1, 2, 3, 4, est égal au dernier terme 4 de cette progression, & au nombre des termes de cette progression; car le nombre des termes d'une progression de nombres naturels, est toujours égal au dernier terme. Il est aisé de voir que le nombre de rangs que chaque nombre triangulaire contient, est aussi égal

à son dernier terme, & que par conséquent on peut prendre ce nombre de rangs pour le nombre de termes de la progression qui a formé le nombre triangulaire, ou le nombre de rangs pour le dernier terme.

262. Connoissant donc le côté d'un nombre triangulaire, si on ajoute le premier terme à ce côté, & qu'on multiplie la somme par la moitié du nombre des rangs, ou ce qui est la même chose par la moitié du côté, le produit sera la valeur du nombre triangulaire (*N.* 251.) ainsi nommant x le dernier terme, ou le côté, & ajoutant 1, la somme sera $x+1$, laquelle multipliée par $\frac{1}{2}x$ donnera le produit $\frac{xx+x}{2}$ qui est l'expression générale de tout nombre triangulaire, dans laquelle il n'y a qu'à mettre la valeur de x pour avoir le nombre demandé.

Soit par exemple $x=7$, donc $xx=49$, & par conséquent $\frac{xx+x}{2}=\frac{49+7}{2}=\frac{56}{2}=28$, & en effet 28 est le nombre triangulaire dont le côté est 7, & ainsi des autres.

263. Si l'on prend une suite de nombres triangulaires, par exemple les cinq qui sont exprimés par les figures 1. 2. 3. 4. 5; & qu'on les couche les uns sur les autres par ordre, en mettant toujours le moindre sur le plus grand, on formera une pyramide triangulaire (*Fig. 6.*) d'où il suit qu'une pyramide triangulaire est une somme de nombres triangulaires.

264. On pourroit donc aisément former une Table par le moyen de laquelle on trouveroit d'un coup d'œil quel est le nombre de boulets d'une pyramide triangulaire dont on connoîtroit le côté de la base. La premiere colonne contiendroit les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. La seconde contiendroit les sommes successives de ces nombres, c'est-à-dire les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, &c. & pour former la troisiéme on prendroit d'abord le premier triangulaire 1, ensuite la somme 4 des deux premiers 1, 3, puis la somme 10 des trois premiers 1, 3, 6, & ainsi de suite; ce qui donneroit les nombres 1, 4, 10, 20, 35, nommés *pyramidaux triangulaires*, parce que ce sont les seuls qui puissent s'arranger en pyramides triangulaires.

1re.	2e.	3e.
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
&c.	&c.	&c.

Pour connoître donc par le moyen de cette Table quel est le nombre triangulaire dont le côté est 4, on chercheroit dans la

premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce 4 on trouveroit dans la colonne des nombres triangulaires le nombre 10 qui feroit voir que le nombre triangulaire demandé est 10, & ainsi des autres.

De même si on vouloit connoître combien de boulets contient une pyramide triangulaire dont le côté de la base est 5, on chercheroit dans la premiere colonne le nombre 5, & à côté de ce nombre on trouveroit dans la troisiéme colonne le nombre 35 qui feroit voir que la pyramide demandée contient 35 boulets.

Nons donnerons bientôt une Méthode plus courte, & qui n'obligera pas de porter toujours avec soi une longue Table.

265. Les pyramides quarrées sont composées de plusieurs couches qui sont en descendant 1. 4. 9. 16. 25, &c. c'est-à-dire les quarrés des nombres naturels. Par exemple la pyramide de la figure 12 est composée des cinq quarrés des figures 7, 8, 9, 10, 11, ainsi pour trouver combien une telle pyramide contient de boulets, il n'y a qu'à sçavoir ce que vaut une suite finie de quarrés 1. 4. 9. 16, &c. & cela peut encore se trouver en construisant une Table ainsi qu'on va voir.

266. J'écris dans une colonne les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5, &c. qui marquent les côtés des quarrés; à côté de cette colonne, j'en forme une seconde qui contient la progression des nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9, &c. je forme une troisiéme colonne dans laquelle j'écris d'abord 1, puis la somme 4 des deux premiers nombres impairs 1. 3, puis la somme 9 des trois premiers 1. 3. 5, & ainsi de suite, & cette colonne contient les quarrés des nombres naturels 1. 2. 3 de la premiere; enfin je fais une quatriéme colonne dans laquelle j'écris d'abord 1, puis la somme 5 des deux premiers quarrés, puis la somme 14 des trois premiers 1. 4. 9, & ainsi de suite.

1re.	2e.	3e.	4e.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	5	9	14
4	7	16	30
5	9	25	55
&c.	&c.	&c.	&c.

Si l'on veut donc sçavoir quel est le quarré dont le côté est 5, on cherchera dans la premiere colonne le nombre 5, & à côté de ce nombre on trouvera dans la troisiéme colonne le nombre 25, qui fait voir que le quarré de 5 est 25.

De même, si on veut sçavoir combien de boulets contient une pyramide dont le côté de la base est 4, on cherchera dans la premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce nombre on

trouvera dans la quatriéme colonne le nombre 30 qui fait voir que cette pyramide contient 30 boulets, & ainsi des autres.

Comme on n'a pas toujours des Tables, & que celles qu'on trouve quelquefois par hazard se trouvent souvent peu exactes par l'erreur ou la négligence des Copistes, je vais donner deux formules assez simples pour les pyramides quarrées & triangulaires, & je ferai voir ensuite comment on peut compter les autres. Ces formules dépendent du Théorême suivant.

267. THEOREME. *Si l'on prend la suite des nombres naturels, 0. 1. 2. 3. 4, &c. qui commencent par zero, & qu'on en fasse les quarrés 0. 1. 4. 9. 16. 25. 36, &c. je dis que si l'on fait la somme des deux premiers quarrés; des trois premiers, &c. chacune de ces sommes sera à son dernier terme ou au plus grand quarré qu'elle contient multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire par le nombre qui exprime combien il y a de quarrés dans cette somme, comme 1 à 3, plus comme 1 à six fois la racine du plus grand quarré.*

Je pourrois démontrer cette proposition en employant l'Algebre, mais comme le calcul est un peu long & compliqué, je me contenterai de le démontrer par une simple induction en cette sorte.

Je prens d'abord les deux premiers quarrés 0, 1, leur somme est 1, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes; ou pris autant de fois qu'il y a de termes est 2; ainsi la somme est au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à 2, & par conséquent elle en est la moitié;

$$\frac{0+1=1}{1+1=2} = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}$$

or la moitié d'une grandeur est égale au tiers, plus au sixiéme de cette grandeur; donc la somme des quarrés 0, 1 est au dernier multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6, mais 6 ou 6×1 est la même chose que la racine 1 du plus grand quarré 1 multiplié par 6; donc la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine du plus grand quarré.

Je prens les trois premiers quarrés $0+1+4$, leur somme est 5, & le plus grand 4 multiplié par le nombre des termes, ou pris trois fois est 12;

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \tfrac{5}{12} = \tfrac{4}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}$$

donc la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 5 est à 12, & par conséquent elle en est les cinq douziéme, mais $\tfrac{5}{12} = \tfrac{4}{12} + \tfrac{1}{12}$, & $\tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$; donc

$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$; ainſi la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 eſt à 3, plus comme 1 eſt à 12, ou 2×6 ; mais 2×6 eſt égal à la racine 2 du plus grand quarré multiplié par 6 ; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine 2 du plus grand quarré.

Je prens les quatre premiers quarrés o. 1. 4. 9, la ſomme eſt 14 & le dernier 9 pris 4 fois eſt 36 ; donc la ſomme $\frac{0.\ 1.\ 4.\ 9.}{9.\ 9.\ 9.\ 9.} = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 14 à 36, ainſi elle en eſt les $\frac{14}{36}$; or $\frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$, & $\frac{1}{18} = \frac{1}{3 \times 6}$; donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 eſt à 6 fois la racine 3 du plus grand quarré.

Je prens les cinq premiers quarrés o. 1. 4. 9. 16. leur ſomme eſt 30, & le dernier 16 $\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ pris cinq fois fait 80 ; ainſi la ſomme eſt $\frac{30}{80}$, ou $\frac{3}{8}$ du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; or $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, en multipliant tout par 3, & $\frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \times 6}$, donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 à 4×6, ou comme 1 à la racine du plus grand quarré multiplié par 6.

Et comme en continuant de prendre un plus grand nombre de quarrés, je trouve toujours la même choſe, il s'enſuit que le Théorême eſt démontré. On trouvera une Démonſtration plus géométrique de ceci dans l'Arithmétique des Infinis dont nous traiterons plus bas.

268. PROBLEME. *Trouver combien il y a de boulets dans une pyramide quarrée ?*

Je ſuppoſe que la ſuite des quarrés qui compoſent la pyramide commence par zero & ſoit o, 1, 4, 9, 16, &c. juſqu'au quarré de la baſe que je nommerai xx, ainſi le nombre des termes de cette ſuite ſurpaſſera d'une unité le nombre des couches de la pyramide, & n'augmentera pourtant pas ſa valeur, à cauſe que zero ajouté à une ſomme ne rend pas cette ſomme plus grande. J'aurai donc $x+1$ pour le nombre des termes, & multipliant le der-

nier terme par $x+1$, j'aurai x^3+x^2 qui sera le produit du dernier terme multiplié par le nombre des termes; or la suite o. 1. 4. 9. 16, &c. xx, est égale au tiers de ce produit, plus à une fraction de ce même produit exprimée par $\frac{1}{6x}$, & le tiers de $x^3 + x^2$ est $\frac{x^3+x^2}{3}$, & le $\frac{1}{6x}$ est $\frac{x^3+x^2}{6x}$, donc la suite o. 1. 4. 9. 16, & xx est égale à $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x}$, & par conséquent la pyramide donnée sera $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x}$, ce qui donne la regle suivante.

REGLE. *Faites la somme du cube & du quarré du dernier terme; divisez cette somme par 3, ensuite divisez la même somme par 6 fois la racine du dernier terme, ou par 6 fois le côté de la base de la pyramide, & les deux quotiens ajoutés ensemble vous donneront la somme des boulets.*

Soit $x=9$, c'est-à-dire supposons que le côté de la base de la pyramide contienne 9 boulets, nous aurons $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x} = \frac{729+81}{3} + \frac{729+81}{6\times9} = \frac{810}{3} + \frac{810}{54}$; or $\frac{810}{3} = 270$, & $\frac{810}{54} = 15$; donc $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x} = 270 + 15 = 285$; ainsi la pyramide contiendra 285 boulets, & en effet si l'on fait la suite des quarrés 1. 4. 9. 16, &c jusqu'au dernier qui sera 81, puisque le côté de la base est 9, & qu'on additionne ces quarrés, on trouvera que la somme est 285.

269. PROBLEME. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pyramide triangulaire.*

Nous avons déja dit que toute pyramide triangulaire est une suite ou une somme de nombres triangulaires (*N.* 263.), & que tout nombre triangulaire est la somme d'une progression de nombres naturels, (*N.* 260.). Cela posé.

Supposons que la suite des nombres triangulaires qui composent la pyramide commence par zero, & que la progression des nombres naturels ait aussi zero pour son premier terme, ce qui sera que le nombre des termes surpassera d'une unité le nombre des rangs de la pyramide, & le nombre des termes de la progression 1. 2. 3, &c. sans augmenter pourtant la valeur ni de la pyramide, ni de la progression naturelle 1. 2. 3, &c.

Or delà il arrivera qu'en nommant x le dernier terme de la progression o. 1. 2. 3, &c. qui formera un nombre triangulaire, le nombre des termes sera $x+1$, & par conséquent la somme de la progression sera $x+0$ multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (*N.* 251.); or $x+0$, ou x multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ donne $\frac{xx+x}{2}$, donc le nombre triangulaire formé par cette progression sera encore $\frac{xx+x}{2}$ de même que nous l'avons trouvée ci-dessus (*N.* 262.) ce qui doit être effectivement, à cause que zero ajouté à une valeur ne l'augmente point.

Maintenant exprimons la progression o. 1. 2. 3. 4, &c. par les caracteres o. a. b. c. d, &c. jusqu'au dernier que nous nommerons x, & qui par conséquent sera le côté de la base de la pyramide; le nombre triangulaire o sera donc $\frac{o^2+o}{2}$, le nombre triangulaire formé par les deux premiers termes o. a. sera $\frac{aa+a}{2}$; celui qui sera formé par les trois premiers termes o. a. b. sera $\frac{bb+b}{2}$, & ainsi de suite jusqu'au dernier nombre triangulaire qui sera $\frac{xx+x}{2}$, & il ne s'agit plus que de trouver la somme de tous ces nombres.

Pour cela négligeons d'abord le diviseur 2, & faisons la somme de tous les numérateurs laquelle nous diviserons ensuite par le diviseur 2 que nous aurons négligé. Cette somme sera composée de deux suites dont l'une sera la suite des quarrés des nombres naturels o. 1. 2. 3, &c. x, & l'autre sera la suite de ces mêmes nombres; or la suite des quarrés est $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ (*N.* 268.) & la suite de la progression o. 1. 2. 3, &c. x, est $\frac{xx+x}{2}$ comme nous venons de voir; ajoutant donc ensemble ces deux suites, la somme des nombres triangulaires sera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}+\frac{xx+x}{2}$. Je réduis ces trois fractions au même dénominateur, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la premiere par 2, & ceux de la derniere par 3, & en divisant le numérateur & le dénomi-

o^2+o
a^2+a
b^2+b
c^2+c
&c.
x^2+x

nateur de la feconde par x, ce qui donne $\frac{2x^3+3x^2}{6} + \frac{x^2+x}{6} + \frac{3xx+3x}{6}$, & corrigeant l'expreffion, j'ai $\frac{2x^3+6x^2+4x}{6}$ qui fe réduit à $\frac{x^3+3x^2+2x}{3}$, en divifant le numerateur & le dénominateur par 2 ; enfin je divife cette fraction par le divifeur 2 que j'ai négligé, & le quotient $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ eft la pyramide cherchée, d'où l'on tire la regle fuivante.

REGLE. *Prenez le cube du côté de la bafe, trois fois le quarré de ce côté, & deux fois ce côté ; faites-en la fomme, & divifez-la par 6, ce qui donnera le nombre de boulets contenus dans la pyramide triangulaire.*

Soit 8 le côté de la bafe, ainfi $x = 8$, & par conféquent $\frac{x^3+3x^2+2x}{6} = \frac{512+192+16}{6} = \frac{720}{6} = 120$; ainfi 120 fera la nombre de boulets, & en effet fi l'on prend les huit premiers nombres triangulaires dont le dernier aura 8 au côté, on trouvera que leur fomme eft égale à 120.

270. PROBLEME. *Trouver quel eft le nombre de boulets contenus dans une pyramide oblongue, ou dans une pyramide oblongue terminée par des pyramides quarrées, ou dans une pyramide oblongue terminée & entrecoupée par des pyramides quarrées.*

Soit la pyramide oblongue (*Fig.* 13.) ; cette pyramide eft compofée de la pyramide quarrée ABC, & de la figure oblongue DEHGF, ainfi le nombre de boulets contenus dans ces deux figures eft le même que celui qui eft contenu dans la figure entiere.

Or la pyramide ayant 6 boulets au côté de fa bafe, je fais le cube de 6 qui eft 216, & le quarré de 6 qui eft 36, j'ajoute ces deux quantités enfemble, ce qui donne la fomme 252 ; je divife cette fomme par 3, & le quotient eft 84, je divife la même fomme par 6×6, ou par 36, & le quotient eft 7, j'ajoute les deux quotiens 84 & 7, & la fomme 91 eft le nombre de boulets contenus dans la pyramide ABC.

Maintenant la figure DEHGF n'eft autre chofe que le triangle FHG pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang DF; mais le triangle FHG a fix boulets à fa bafe HG ; donc ce triangle eft $\frac{36+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$ (*N.* 262.), multipliant donc 21 par le nombre

nombre 18 des boulets du rang DF, le produit 378 eſt le nombre de boulets contenus dans la figure DEHGF; donc en ajoutant 378 au nombre 91 de la pyramide quarrée ABC, la ſomme 469 ſera la ſomme totale des boulets de la figure 13.

Soit la pyramide oblongue terminée par deux pyramides quarrées (*Fig.* 14.) les deux pyramides étant égales, je meſure la pyramide ABC, en faiſant la ſomme 576 du cube 512 & du quarré 64 du côté BC = 8; je diviſe cette ſomme par 3, & le quotient eſt 192; je diviſe la même ſomme par 6×8, ou par 48, & le quotient eſt 12; j'ajoute les deux quotients enſemble, ce qui donne 204 pour le nombre des boulets de la pyramide ABC; ainſi doublant ce nombre, ce qui fait 408, j'ai le nombre des boulets des deux pyramides ABC, DEF.

Je coupe la figure qni eſt entre les deux pyramides en deux parties dont l'une HRNM eſt une figure oblongue. & l'autre SPV eſt une pyramide triangulaire; or la figure HRNM n'eſt autre choſe que le triangle dont le côté eſt NM = 4 pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang HM = 17; c'eſt pourquoi faiſant le triangle du côté NM qui eſt $\frac{16+4}{2} = \frac{20}{2} = 10$, & multipliant 10 par 17, le produit 170 eſt la ſomme des boulets contenus dans HRNM. La pyramide triangulaire SPV ayant trois boulets au côté de ſa baſe PV eſt $\frac{27+27+6}{6} = \frac{60}{6} = 10$. (*N.* 269.) ajoutant donc 10 au nombre 170 de la figure HRNM, la ſomme 180 eſt le nombre de boulets contenus entre les deux pyramides; donc en ajoutant 180 à la ſomme 408 des deux pyramides, la ſomme 588 eſt le nombre de tous les boulets de la figure 14. & il eſt aiſé de calculer de la même façon la figure 15.

271. REMARQUE. Si l'on trouve que la formule $\frac{x^3+x^2}{3}$ + $\frac{x^3+x^2}{6x}$ eſt un peu embarraſſante, on la ſimplifiera en cette ſorte. Je diviſe le numerateur & le dénominateur de la ſeconde fraction par x, & j'ai $\frac{x^2+x}{6}$ qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{6x}$ (*N.* 33.) Je multiplie le numerateur & le dénominateur de la premiere fraction par 2, & j'ai $\frac{2x^3+2x^2}{6}$ qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{3}$ (*N.* 32.) ainſi la formule ſe change en celle-ci $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$

laquelle en corrigeant l'expression est $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, formule des pyramides quarrées, & cette formule ne differe de celle des pyramides triangulaires qui est $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ qu'en ce que dans l'une le terme x^3 est multiplié par 2, & le terme x n'est multiplié que par l'unité, au lieu que dans l'autre le terme x^3 est multiplié par l'unité, & le terme x est multiplié par 2. Les trois formules pour les piles de boulets sont donc en mettant x pour le côté de sa base.

$\frac{xx+x}{2}$, Formule des triangles.

$\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, Formule des pyramides quarrées.

$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$, Formule des pyramides triangulaires.

CHAPITRE VIII.

Des Raisons, Proportions & Progressions Géométriques.

272. Si le premier terme d'une Raison géometrique est égal au second, la raison s'appelle *Raison d'égalité*; s'il est plus grand la raison se nomme *Raison de plus grande inégalité*, & s'il est moindre c'est une *Raison de moindre inégalité*.

273. Il ne faut pas confondre la raison d'égalité avec ce qu'on nomme *égalité de raisons*; car la raison d'égalité est entre deux grandeurs égales, & l'égalité de raisons est entre deux raisons égales. Quand on dit $a=b$, voilà une raison d'*égalité*, & quand on dit $a.b::c.d$, voilà une *égalité* de raisons; ainsi l'un est bien différent de l'autre.

274. Quand l'antécédent contient un certain nombre de fois exactement son conséquent comme deux fois, trois fois, &c. la raison se nomme double, triple, quadruple, &c. & en general *multiple*. Mais si l'antécédent ne contient pas exactement son conséquent, comme par exemple 3 qui contient 2 une fois & demi, on se contente d'exprimer la raison par ses termes en disant : que la raison est de 3 à 2, & on en agit ainsi pour éviter les noms barbares de *sesquialtere*, *sesquitierce*, *surparticuliere*, *surpatiente*, *surbipatiente*, *&c.* dont les Anciens se servoient.

275. Quand le conséquent contient un certain nombre de fois

exactement son antécédent, la raison est sousdouble, soustriple, sousquadruple, &c. & en général *sousmultiple*, parce que dans toute raison c'est toujours le premier terme qu'on rapporte au second, & qu'alors le premier est la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. du second ; mais dans les cas ou l'antécédent n'est pas contenu exactement dans le conséquent, on exprime la raison par ses termes mêmes, comme la raison de 2 à 3, de 4 à 5, &c.

276. L'exposant d'une raison étant le quotient de la division du plus grand terme par le moindre, il est clair que le moindre terme multiplié par l'exposant doit être égal au plus grand, puisque dans toute division le produit du diviseur par le quotient est égal au dividende (*N.* 29.) ainsi dans la raison a, b, si a est plus grand que b, & que le quotient de a divisé par b, ou l'exposant soit nommé p, on aura $a=bp$, & si au contraire b est plus grand que a, & que le quotient de b divisé par a, ou l'exposant soit encore nommé p, on aura $b=ap$. Nous supposerons toujours que le premier terme est plus grand que le second, à moins que nous ne disions autrement.

277. THEOREME. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, & si la proportion est continue, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne.*

Soit la proportion géométrique $a. b :: c. d$; je nomme p l'exposant de la raison a, b, lequel est le même que l'exposant de la raison c, d, puisque ces deux raisons étant égales, le premier antécédent a contient son conséquent b de la même façon que l'antécédent c contient son conséquent d ; ainsi nous aurons $a=bp$, & $c=dp$ (*N.* 276.) & mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $bp. b :: dp. d$, & faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous aurons bpd, & dpb, or ces deux produits sont égaux, puisqu'ils sont formés par les mêmes grandeurs ; donc $bpd=dpb$, & remettant dans cette équation a au lieu de bp, & c au lieu de dp, nous aurons $ad=bc$, & par conséquent le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Si la proportion étoit continue comme $:: a, b, c$, on l'écriroir ainsi $a, b :: b, c$, & nommant l'exposant p, la première raison a, b, seroit la même que bp, b, & la seconde raison b, c, seroit la même que $cp. c$; ainsi la proportion se changeroit en celle-ci $bp. b :: cp. c$, qui seroit encore la même, & faisant le produit des extrêmes, & celui des moyens on auroit $bpc=cbp$, mais $bp=a$,

& $cp = b$; mettant donc a au lieu de bp dans le premier produit; & b au lieu de cp dans le second, on auroit $ac = bb$, c'est à-dire le produit des extrêmes égal au quarré de la moyenne.

278. COROLLAIRE. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont disposées de telle façon que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre grandeurs seront en proportion.* Si cela n'étoit pas l'exposant de la raison a, b, seroit donc différent de l'exposant de la raison c, d. Nommons le premier p, & le second q, donc nous aurons $a = bp$, & $c = dq$; ainsi les quatre grandeurs seront bp, b, dq, d, & le produit des extrêmes bpd, ne sera pas égal à celui des moyens bdq, ce qui est contre la supposition.

279. COROLLAIRE II. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont proportionnelles, on trouvera toujours qu'elles sont en proportion de quelque façon qu'on les dispose, pourvû que l'on observe que les extrêmes restent tous deux extrêmes, ou qu'ils deviennent tous deux moyens, & que les moyens restent tous deux moyens ou qu'ils deviennent tous deux extrêmes.*

On pourra donc faire les sept changemens suivans dans lesquels il est aisé de voir que la proportion subsiste toujours, puisque le produit des extrêmes & celui des moyens sont toujours les mêmes que le produit des extrêmes & celui des moyens des quatre grandeurs a, b, c, d, sçavoir $ad = bc$, & $bc = ad$.

	$a.\ b :: c.\ d.$	$ad = bc$
1er.	$a.\ c :: b.\ d.$	$ad = bc$
2e.	$b.\ a :: d.\ c.$	$cb = ad$
3e.	$b.\ d :: a.\ c.$	$cb = ad$
4e.	$d.\ c :: b.\ a.$	$ad = cb$
5e.	$c.\ a :: d.\ b.$	$cb = ad$
6e.	$d.\ b :: c.\ a.$	$ad = cb$
7e.	$c.\ d :: a.\ b.$	$cb = ad$

Le premier changement se nomme *alternando*, parce qu'on compare les grandeurs alternativement, la premiere à la troisiéme, & la seconde à la quatriéme.

Le second se nomme *invertendo*, ou *permutando*, parce qu'on met les conséquens à la place des antécédens. Les autres n'ont d'autres noms que ceux qu'ils tirent de l'arrangement de leurs termes, ainsi dans le troisiéme on compare le premier conséquent au second, & le premier antécédent au second antécédent; dans le quatriéme on compare le second conséquent à son antécédent, & le premier conséquent à son antécédent, &c.

280. COROLLAIRE. III. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont proportionnelles, & qu'on ajoute ou qu'on retranche chaque conséquent de son antécédent, ou chaque antécédent de son conséquent, il y aura toujours proportion.* Ainsi l'on pourra faire les changemens suivans

dans lesquels je vais démontrer que la proportion subsiste toujours.

	$a . b :: c . d$	$ad = bc$
1er.	$a + b . b :: c + d . d$	$ad + bd = bc + bd$
2e.	$a - b . b :: c - d . d$	$ad - bd = bc - bd$
3e.	$a . a + b :: c . c + d$	$ac + ad = ac + bc$
	$a . a - b :: c . c - d$	$ac - ad = ac - bc$

Le produit des extrêmes du premier changement est $ad + db$, & celui des moyens est $bc + bd$, or les termes bd, db sont égaux, & les termes ad, bc, le sont aussi puisque les quatre grandeurs proportionnelles a, b, c, d, donnent $ad = bc$; donc les produits $ad + db$, & $bc + bd$ étant composés de quantités égales sont parfaitement égaux, & ainsi des autres. Le premier & le troisiéme de ces changemens se nomment *componendo*, & le second & le quatriéme se nomment *dividendo*.

281. *Remarque*. Il est clair qu'on peut faire la même chose dans les sept dispositions du second Corollaire ; or quand on dit $b + a . a :: d + c . c$ ou $b - a . a :: d - c . c$, c'est-à-dire le premier conséquent plus ou moins son antécédent, cela se nomme *convertendo*, ou conversion de raison.

282. Corollaire IV. *Si quatre grandeurs sont en proportion, & qu'on ajoute ou qu'on retranche des deux premiers termes, ou des deux derniers, ou des antécédens, ou des deux conséquens, ou enfin des quatre termes des grandeurs qui soient en même raison que ces termes, il y aura toujours proportion.*

	$a . b :: c . d$
1er.	$a + m . b + n :: c . d$
2e.	$a - m . b - n :: c . d$
3e.	$a + m . b :: c + n . d$
4e.	$a - m . b :: c - n . d$
5e.	$a . b + m :: c . d + n$
6e.	$a . b - m :: c . d - n$
7e.	$a + m . b + r :: c + n . d + r$
8e.	$a - m . b - r :: c - n . d - r$

Soit la proportion $a . b :: c . d$, je prens les deux grandeurs m, n, qui sont en même raison que a & b, & je dis que $a + m . b + n :: c . d$. Supposons que l'exposant de la raison a, b, soit p, & nous aurons $a = pb$, ainsi l'exposant de la raison m, n, étant aussi p, nous aurons $m = np$, mettant donc les valeurs de a & de m dans $a + m$ & $b + n$, nous aurons $pb + np$, $b + n$; or si je divise le premier terme de cette raison par le second, le quotient ou l'exposant sera p, c'est-à-dire le même que celui de la raison a, b, ou de la raison c, d, & par conséquent les trois raisons $pb + np$, $b + n$; a, b; c, d seront égales ; mais la raison $pb + np$, $b + n$, est égale à la raison $a + m$, $b + n$; donc celle-

ci est aussi égale à chacune des deux raisons a, b; c, d, & partant $a+m, b+n :: c. d$. Il est aisé de démontrer la même chose dans le troisiéme, quatriéme, cinquiéme & sixiéme cas, en supposant que les grandeurs m, n, sont en même raison que les antécédens a, b, ou que les conséquens b, d, & dans le septiéme & huitiéme cas, les grandeurs m, r, de même que les grandeurs n, t, doivent être dans la même raison que les termes $a. b$, ou c, d.

283. Corollaire V. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont en proportion, & qu'on les multiplie par quatre autres grandeurs* e, f, g, h, *qui soient aussi en proportion, c'est-à-dire chaque terme par chaque terme, les produits seront encore en proportion, & ce seroit la même chose si on divisoit chaque terme par chaque terme.*

Il s'agit de prouver que $ae. bf :: cg. dh$. Je nomme p l'exposant de la premiere proportion, donc $a = bp$, & $c = dp$, & mettant ces valeurs de a & de c dans la premiere proportion, j'ai $bp. b :: dp. c$.

$$\frac{\begin{array}{l} a.\ b :: c.\ d. \\ e.\ f :: g.\ h. \end{array}}{ae.\ bf :: cg.\ dh}$$

Je nomme q l'exposant de la seconde proportion, & partant $e = fq$, & $g = hq$, & mettant les valeurs de e & de g dans la seconde proportion, j'ai $fq. f :: hq. h$. Je multiplie les termes de la proportion $bp. b :: dp. c$ par les termes de la seconde $fq. f :: hq. h$, & je trouve $bpfq. bf :: dphq. dh$. Je divise le premier terme de la premiere raison par le second, & le quotient ou l'exposant est pq. Je divise de même le premier terme de la seconde raison par le second terme, & le quotient ou l'exposant est encore pq; donc ces deux raisons sont égales; mais la premiere raison $bpfq, bf$ est la même que la raison ae, bf, & la seconde raison $dphq, dh$, est la même que cg, dh, donc les raisons ae, bf, & cg, dh sont égales, & partant $ae. bf :: cg. dh$.

$$\frac{\begin{array}{l} bp.\ b :: dp.\ d. \\ fq.\ f :: hq.\ h. \end{array}}{bpfq.\ bf :: dphq.\ dh.}$$

Maintenant supposons que les termes de la premiere proportion soient divisés par ceux de la seconde, ce qui donne $\frac{a}{e}. \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}. \frac{d}{h}$; je mets les valeurs de a, c, e, g, trouvées ci-dessus, & j'ai $\frac{bp}{fq}. \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}. \frac{d}{h}$, & divi-

$$\frac{\begin{array}{l} a.\ b :: c.\ d \\ e.\ f :: g.\ h \end{array}}{\frac{a}{e}. \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}. \frac{d}{h}}$$

$$\frac{bp}{fq}. \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}. \frac{d}{h}$$

sant l'antécédent de chaque raison par son conséquent, le quotient ou l'exposant est de part & d'autre $\frac{p}{q}$, donc les deux raisons sont égales, & par conséquent $\frac{bp}{fq} . \frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq} . \frac{d}{h}$, mais $\frac{bp}{fq} = \frac{a}{e}$, & $\frac{dp}{hd} = \frac{c}{g}$, donc $\frac{a}{e} . \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} . \frac{d}{h}$.

284. COROLLAIRE VI. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *sont en proportion, leurs quarrés, leurs cubes, leurs quatriéme puissances, &c. ou leurs racines secondes, troisiémes, &c. sont aussi en proportion.*

Quand on éleve les quatre grandeurs a, b, c, d, au quarré, on fait la même chose que si l'on multiplioit les termes de la proportion $a . b :: c . d$ par les termes d'une autre proportion $a . b :: c . d$; or or en ce cas les produits sont en proportion (*N.* 283.) donc les quarrés qui ne sont autre chose que les produits, sont aussi en proportion; donc la proportion des quarrés multipliée par celle des premieres puissances donnera une autre proportion qui sera celle des cubes, & celle des cubes multipliée par celle des premieres puissances donnera celle des quatriémes puissances, &c.

Maintenant puisque les quarrés étant en proportion, les racines le sont aussi, si nous regardons les termes de la proportion $a . b :: c . d$, comme des grandeurs quarrées, leurs racines quarrées donneront par conséquent la proportion $\sqrt{a} . \sqrt{b} :: \sqrt{c} . \sqrt{d}$, & si nous les regardons comme des cubes, leurs racines cubiques donneront la proportion $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{d}$, & ainsi des autres.

285. *REMARQUE.* Il est aisé de voir que *si quatre grandeurs sont en proportion, leurs doubles, ou leurs triples, & en général leurs équimultiples c'est-à-dire les grandeurs qui les contiennent un même nombre de fois, ou leurs tiers, leurs quarts, &c. & en général leurs sous-équimultiples, c'est-à-dire les grandeurs qu'elles contiennent un même nombre de fois, sont encore en proportion.* Car en prenant leurs doubles, ou leurs triples, &c. on les multiplie toutes ou par 2, ou par 3, &c. & en prenant leurs moitiés ou leurs tiers, &c. on les divise toutes ou par 2 ou par 3, &c. & par conséquent les deux premiers termes sont encore en même raison après la multiplicatiplication ou la division qu'ils l'étoient auparavant (*N.* 32. 33.) & la même chose arrive aux deux derniers. Donc les quatre produits ou les quatre quotiens étant encore en même raison, la proportion subsiste, & elle subsisteroit aussi, si on multiplioit ou divisoit les quatre grandeurs, ou les deux premieres, ou les deux

dernieres, ou les antecedents ou les conséquents par tel nombre que l'on voudroit, entier, ou rompu, ou composé d'entier & de fraction.

286. COROLLAIRE VII. *Si deux produits sont égaux, on pourra toujours en tirer une proportion en mettant le deux grandeurs qui composent le premier à la place des deux extrêmes, ou des deux moyens, & celles qui composent le second à la place des moyens, ou à la place des extrêmes.*

Soient les produits $ad=cb$, je dis qu'on aura $a.b::c.d$, ou $a.c::b.d$, ce qui est évident, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

287. Les deux grandeurs du premier produit sont dites *réciproques* aux grandeurs du second produit égal au premier, parce qu'ayant pris le premier antecedent dans le premier produit, & son conséquent dans le second, on prend réciproquement le second antecedent dans le second produit, & son conséquent dans le premier.

288. COROLLAIRE VIII. *Si la raison de deux grandeurs* a, b, *est plus grande que celle de deux autres grandeurs* c, d, *le produit des extrêmes sera plus grand que celui des moyens; & au contraire, si la raison* a, b *est moindre que la raison* c, d, *le produit des extrêmes est moindre que celui des moyens.*

Si la raison a, b étoit égale à la raison c, d, on auroit $ad=bc$; or par la supposition le premier antecedent est plus grand qu'il ne faut, puisque la raison a, b est plus grande que la raison b, c; donc ad doit être plus grand que bc: mais si la raison a, b est moindre que la raison b, c, le premier antecedent a est plus petit qu'il ne faut; donc ad est moindre que cd.

289. REMARQUE. Si la raison a, b est plus grande ou moindre que la raison $c, d.$, on trouvera toujours en alternant, en permutant, en un mot en faisant tous les changemens marqués ci-dessus, (N. 279. 280. &c.) que le produit des extrêmes sera plus grand ou moindre que celui des moyens; car si on alterne en disant a, c, & b, d, les produits ad, bc seront eucore les mêmes, & par conséquent ad sera plus grand ou moindre que bc., de même si on compose en disant $a+b.\ b$ & $c+d.\ b$, les produits seront $ad+bd$, & $bc+bd$, & retranchant bd de part & d'autre, il restera ad plus grand ou moindre que bc, & on prouvera aisément la même chose de tous les autres cas.

290.

290. PROBLEME. *Trois termes d'une proportion géometrique étant connus trouver celui que l'on ne connoît pas.*

Je nomme x le terme inconnu, & ce terme eſt ou le premier de la proportion, ou le ſecond, ou le troiſiéme, ou enfin le quatriéme. Suppoſons qu'il ſoit le dernier, je nomme a la grandeur qui doit être le premier terme, b celle qui doit être le ſecond, & c celle qui doit être le troiſiéme. J'ai donc cette proportion $a.b :: c.x$, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, je trouve $ax = bc$, & diviſant tout par a j'ai $x = \frac{bc}{a}$, c'eſt-à-dire, le quatriéme terme eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

Si la proportion devoit être $b.\ a :: x.\ c$, c'eſt-à-dire que la grandeur inconnuë fût la troiſiéme, je ferois *invertendo*, $a.\ b :: c.\ x$, & le produit des extrêmes & celui des moyens, donneroient $ax = bc$, d'où je tirerois $x = \frac{bc}{a}$ de même qu'auparavant.

Si la proportion étoit $c.\ x :: a.\ b$, je ferois $a.\ b :: c.\ x$ (*N.* 279.) ce qui donneroit encore $ax = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$.

Enfin ſi la proportion étoit $x.\ c :: b.\ a.$, je ferois $a\,b :: c.\ x$, (*N.* 279.) ce qui donneroit encore $ax = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$

D'où l'on voit qu'en arrangeant les termes de façon que x devienne le dernier, & qu'il y ait toujours proportion, on aura toujours l'inconnuë x égale au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

291. Au reſte il n'eſt pas abſolument néceſſaire de faire les changemens que j'ai fait dans les trois derniers cas; car on voit aiſément que le produit des extrêmes & celui des moyens, auroit toujours donné $bc = ax$, ou $ax = bc$, ce qui revient au même, & que par conſéquent $x = \frac{bc}{a}$; mais il auroit fallu établir des regles différentes pour chaque cas, au lieu que par les changemens de diſpoſitions dans les termes, nous n'avons qu'une ſeule regle, comme on vient de voir. D'ailleurs ceci a encore une autre utilité dont nous parlerons bientôt.

292. PROBLEME. *Deux termes d'une proportion continuë étant connus, trouver celui qui eſt inconnu.*

Si le terme x qui manque eſt le dernier, la proportion ſera $a.\ b :: b.\ x$; d'où l'on tire $ax = bb$ & $x = \frac{bb}{a}$, & ſi x eſt le premier

terme, la proportion sera $x. b :: b. a$, ou $a. b :: b. x$; d'où l'on tire encore $ax = bb$, & $x = \frac{bb}{a}$, ce qui fait voir que dans ces deux cas l'inconnuë sera égale au quarré de la moyenne, divisé par l'autre grandeur connuë.

Mais si la proportion est $a. x :: x. b$, on aura $xx = ab$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, on aura $x = \sqrt{ab}$; c'est-à-dire l'inconnuë est égale à la racine quarrée du produit des extrêmes.

De la proportion inverse.

293. Les proportions dont nous venons de parler, se nomment proportions droites, à cause que le premier terme est au second, comme le troisiéme est au quatriéme; mais si le premier étoit au second, comme le quatriéme au troisiéme, la proportion se nommeroit *inverse*. Or cette proportion peut se changer aisément en proportion droite, en mettant le quatriéme terme au lieu du troisiéme, & le troisiéme au lieu du quatriéme. Par exemple soient les quatre grandeurs a, b, c, d, disposées de façon que la premiere soit à la seconde comme la quatriéme est à la troisiéme, j'écris $a. b :: d. c$, & la proportion devient droite, & ainsi des autres.

De la Regle de Trois directe.

294. La Regle de *Trois* directe n'est autre chose qu'une proportion directe dont le quatriéme terme est inconnu.

EXEMPLE. *Deux hommes gagnent* 10 *écus par jour, combien* 12 *hommes en gagneront-ils?*

Je vois que le nombre de 12 hommes étant plus grand que celui de deux hommes, le gain de 12 hommes doit être à proportion plus grand que le gain de deux hommes; c'est pourquoi j'ai la proportion directe le nombre 2 hommes est au nombre 12 hommes comme le gain 10 de 2 hommes est au gain que 12 hommes doivent faire, & ce quatriéme terme est l'inconnuë que je cherche; or l'inconnuë est égal au produit des moyens divisé par la premiere extrême (*N.* 290.) multipliant donc 12 par 10, & divisant le produit par 2, le quotient 60 est le gain de 12 hommes.

$$2.\ 12.\ 10. \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \hline 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 120\,(60 \\ \hline 00 \end{array}$$

De la Regle de Trois indirecte.

295. La Régle de *Trois* indirecte est une proportion inverse dont le quatriéme terme est inconnu.

Exemple. *300 hommes peuvent se nourrir 15 jours des munitions de bouche qui sont dans une Place, 400 hommes pendant combien de jours pourront-ils se nourrir de ces mêmes munitions.*

Comme 300 hommes mangent moins que 400, il est clair qu'ils subsisteront pendant plus long-tems, ainsi nous avons une proportion inverse dont le premier terme 300 est au second 400 comme le quatriéme terme ou le nombre inconnu que je cherche & que je nomme x est au troisiéme terme 15 jours; mettant donc le quatriéme terme au lieu du troisiéme, & le troisiéme au lieu du quatriéme, j'ai 300. 400 :: x. 15 qui est une proportion directe (*N.* 293.) dans laquelle l'inconnuë est le troisiéme terme, je fais *invertendo* 400. 300 :: 15. x, & l'inconnuë est à present le quatriéme terme; or ce quatriéme terme est égal au produit des extrêmes divisé par le premier; multipliant donc 300 par 15, & divisant le produit par 400, le quotient $11\frac{1}{4}$ est le nombre de jours pendant lesquels 400 hommes pourroient subsister.

$400.\ 300 :: 15.\ x = 11\frac{1}{4}$

15	
1500	400.
300	4500 ($11\frac{100}{400}$ ou $\frac{1}{4}$
4500	500
	100

296. Si on n'avoit rien voulu déranger dans la façon dont les termes se trouvent disposés dans la question, on voit que pour trouver l'inconnuë il auroit fallu multiplier les deux premiers 300 & 15 l'un par l'autre, & diviser le produit par le troisiéme terme 400; c'est pourquoi les Arithméticiens donnent ordinairement pour regle de la Regle de Trois inverse, *qu'il faut faire le produit des deux premiers termes, & le diviser par le second, au lieu que dans la Regle de Trois directe, il faut multiplier le second par le troisiéme, & diviser le produit par le premier.*

De la Regle de Compagnie ou de Societé.

297. La Regle de *Compagnie* est ainsi nommée, parce que deux ou plusieurs personnes ayant fait une Societé, laquelle a gagné ou perdu une certaine somme, on demande quelle est la part du

gain qui revient à chacun, ou la part de la perte que chacun doit supporter à proportion de ce qu'il a mis dans la bourse commune. Cette Regle se fait par autant de regles de Trois qu'il y a de personnes.

EXEMPLE. *Trois personnes ont fait une Societé de 600 livres. Le premier a mis 100 livres, le second en a mis 200, & le troisiéme 300, & au bout de quelque tems la Societé a gagné 300 livres, combien revient-il à chacun ?*

Pour trouver le gain du premier, je dis : le fonds 600 livres de la Societé est à la mise 100 du premier comme le gain total est au gain que ce premier doit avoir, car il ne doit gagner qu'à proportion de ce qu'il a mis ; par la même raison le fonds 600 est à la mise 200 du second comme le gain total est au gain du second ; & enfin le fond 600 est à la mise 300 du troisiéme comme le gain total est au gain du troisiéme.

600. 100 :: 300. 50. *Gain du* 1er.
600. 200 :: 300. 100. *Gain du* 2e.
600. 300 :: 300. 150. *Gain du* 3e.
300. *Gain total.*

Faisant donc les trois regles de Trois, la part du premier est 50 ; celle du second 100, & celle du troisiéme 150, & ces trois parts ajoutées ensemble font le gain total.

298. On se sert aussi de cette regle pour diviser une grandeur en parties proportionnelles aux parties connuës d'une autre grandeur.

Soit par exemple la quantité a dont les parties sont b, c, d ; & l'on demande de partager la quantité f en trois parties proportionnelles aux parties b, c, d. Pour résoudre ce Problême je nomme x, y, z, les trois parties de f, & je dis la grandeur a est à sa partie b comme la grandeur f est à sa partie x, & faisant la même chose pour trouver les parties y, z, j'ai trois regles de Trois à faire, lesquels me donnent $x = \frac{bf}{a}$, $y = \frac{cf}{a}$, & $z = \frac{df}{a}$.

$a . b :: f . x = \frac{bf}{a}$
$a . c :: f . y = \frac{cf}{a}$
$a . d :: f . z = \frac{df}{a}$

De la Regle d'Alliage.

299. La Regle d'Alliage est ainsi nommée, parce qu'elle sert à résoudre toutes les questions où il s'agit de faire des mêlanges de certaines marchandises, ou des alliages de certains métaux à certaines conditions.

I. EXEMPLE *Un Marchand de vin a deux sortes de vin, le prix de l'un est à 20 sols la pinte, le prix de l'autre à 12, & il veut en faire un mélange de 1888 pintes qu'il puisse vendre à 15 sols, en sorte que ce qu'il gagnera sur celui de 12 sols soit compensé par la perte qu'il fera sur celui de 20; comment doit-il faire?*

J'écris les deux prix 20 & 12 l'un sous l'autre, & entre deux un peu vers la droite j'écris le prix moyen 15, je prens la différence 5 de 20 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 12; je prens aussi la différence 3 de 12 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 20; je fais la somme 8 des différences 3 & 5, & je dis que si ce Marchand faisoit un mêlange de 5 pintes à 12 sols, & de 3 pintes à 20 sols, ce qui feroit le mêlange 8, l'argent qu'il retireroit en le vendant à 15 sols, seroit le même que s'il avoit vendu chaque vin à son prix.

20.		3.
	15.	
12.		5.
		8.

Pour en concevoir la raison, il n'y a qu'à observer que sur chacune des cinq pintes à 12 qui entrent dans le mêlange, le Marchand gagne 3 sols en le vendant à 15 sols, & par conséquent il gagne 3×5, ou 15 sols, & qu'au contraire sur chacune des trois pintes de 20 sols qui entrent dans le mèlange, & qu'il vend 15 sols, il perd 5 sols, ce qui fait 3×5, ou 15 sols; ainsi puisque ce qu'il gagne d'un côté est égal à ce qu'il perd de l'autre, il est visible qu'il lui revient le même argent que s'il avoit vendu chaque vin à son prix.

Maintenant le mêlange qu'on demande étant de 1888 pintes, je fais deux regles de Trois, en disant pour la premiere: Si 8 pintes de mêlange demandent 3 pintes à 20 sols, combien le mêlange 1888 en demandera-t'il? & pour la seconde si 8 pintes de mêlange demandent 5 pintes à 12 sols, combien le mêlange en demandera-t'il? & les deux regles étant faites me donnent 708 pintes à 20 sols, & 1180 à 12 sols, & en effet ces deux sommes ajoutées ensemble font le mêlange demandé 1888.

8. 3 :: 1888.	708 *Pintes à 20 sols*
8. 5 :: 1888.	1180 *Pintes à 15 sols*
	1888 Mêlange.

II. EXEMPLE. *Hieron Roy de Syracuse donna à son Orfévre une quantité d'or pour lui faire une couronne; l'ouvrage étant fini, le Roy fut bien aise de sçavoir s'il n'y avoit point de mêlange, & proposa la question à Archimede; ce sçavant Mathématicien découvrit la quantité d'or & d'argent que l'Orfévre y avoit employée, & l'on demande comment il parvint à cette connoissance?*

Nous démontrerons dans l'Hydroſtatique que ſi pluſieurs corps de même poids, mais de différente nature, ſont plongés dans l'eau, ils perdent des parties de leur poids, les unes plus grandes, & les autres moindres, ce que l'on connoît en mettant au lieu de l'un des baſſins d'une balance un crochet qui peſe autant que l'autre baſſin, après quoi on attache au crochet un long fil auquel eſt ſuſpendu le corps qu'on veut peſer; on le peſe d'abord dans l'air, & enſuite on le plonge dans l'eau, enſorte que la balance & l'autre baſſin n'y entrent pas, & le peſant de nouveau, on trouve qu'il peſe moins; d'où il eſt aiſé de connoître la différence des poids, & par conſéquent la perte de poids que le corps fait dans l'eau : Cela poſé.

Archimede prit deux lingots, l'un d'or & l'autre d'argent, qui peſoient chacun autant que la couronne, & ayant trouvé que la couronne plongée dans l'eau, perdoit plus de ſon poids que le lingot d'or, & moins que le lingot d'argent, il réſolut la queſtion par une regle d'alliage, ainſi que nous allons voir.

Suppoſons que la couronne peſât 96 onces, que la perte de ſon poids qu'elle faiſoit dans l'eau fût de 8 onces, que celle du lingot d'or fût de 7 onces $\frac{3}{4}$, & celle du lingot d'argent 9 onces & $\frac{1}{4}$. Il eſt clair qu'il y avoit de l'alliage dans la couronne; car ſi elle avoit été d'or pur comme le lingot d'or, leurs pertes de poids dans l'eau auroient été égales, puiſque les poids du lingot & de la couronne étoient égaux. Et par la même raiſon, ſi elle avoit été d'argent, ſa perte & celle du lingot d'argent auroient été égales. Je réduits les trois pertes, & le poids 96 de chacune des maſſes en fractions, dont le dénominateur ſoit 4, ce qui donne $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$ & $\frac{384}{4}$; ainſi les trois pertes & le poids 96 ſont entr'eux comme 32, 31, 37 & 384, c'eſt-à-dire ſi le poids 96 avoit été diviſé en 384 parties, la couronne auroit perdu dans l'eau 32 parties, le lingot d'or 31, & le lingot d'argent 37. Je fais un alliage des pertes 31 & 37 des lingots d'or & d'argent pour avoir la perte moyenne 32, & échangeant les différences, c'eſt-à-dire mettant la différence 1 de 31 à 32 vis-à-vis 37, & la différence 5 de 37 à 32 vis-à-vis 31, la ſomme 6 des différences me fait voir que pour faire un alliage de 6 onces qui perdit autant dans l'eau que 6 onces du mélange de la couronne, il faudroit cinq onces d'or & une d'argent; car chacune des cinq onces d'or perdroit une once de moins que chaque once du mélange, ce

31.		5.
	32.	
37.		1.
		6.

qui feroit cinq onces de moins, mais l'once d'argent perdroit cinq onces de plus qu'une once de mêlange; donc ce qu'il auroit de moins étant compensé par le plus, les cinq onces d'or jointes à l'once d'argent ne perdroient ni plus ni moins que *6* onces de mêlange.

Maintenant puisque la couronne pesoit *96* onces, je fais deux regles de Trois en disant pour la premiere : si pour un alliage de *6* onces il faut cinq onces d'or, combien un alliage de *96* en demandera-t'il ? & pour la seconde : si pour un alliage de *6* onces il faut une once d'argent, combien un alliage de *96* en exigera-t'il ? & ces deux regles donnent 80 onces d'or & 16 onces d'argent.

6. 5 :: *96*. 80	*Or.*
6. 1 :: *96*. 16	*Argent.*
96	*Alliage de la couronne.*

Exemple III. *Pour fondre une piece de canon qui soit bonne, il faut mettre 3 livres d'étain sur 25 livres de rosette ou cuivre rouge, & cela posé on demande de connoître si cet alliage a été observé dans une vieille piece qu'on veut refondre, & supposé que cela ne soit pas, on demande ce qu'il faut ajouter de l'un ou de l'autte métail pour faire l'alliage bon.*

Par les fréquentes expériences qu'on a faites, on a trouvé que si deux masses l'une de cuivre rouge ou rosette, & l'autre d'étain, sont d'égale pesanteur, la premiere perd la neuviéme partie de son poids, & la seconde n'en perd que la septiéme partie, cela posé.

Supposons que la piece qu'on veut refondre pese 5200 livres; & qu'après l'avoir mise en pieces l'un de ses tronçons du poids de 28 livres ait perdu dans l'eau $\frac{206}{63}$ de son poids, je dis : si ce tronçon étoit tout de rosette, il perdroit $\frac{28}{9}$ de son poids, & s'il étoit tout d'étain il perdroit $\frac{28}{7}$; je réduis ces fractions en même dénomination, ce qui donne $\frac{196}{63}$, & $\frac{252}{63}$; je réduis aussi le poids 28 en une fraction dont le dénominateur soit 63, & j'ai $\frac{1764}{63}$, ainsi la perte du mêlange 28, celle de 28 de rosette, celle de 28 d'étain, & le poids 28 sont entr'eux comme les nombres 206, 196, 252 & 1764; j'allie les pertes 196 & 252 de 28 de rosette & de 28 d'étain avec la perte moyenne 206, & échangeant les différences, je trouve que pour faire un alliage de 56 livres dont chacune perdit dans l'eau 206 parties de son poids divisé en 1764 parties, il faudroit 46 livres de rosette & 10 d'étain.

196.		46.
	206.	
252.		10.
		56.

Je dis donc si un alliage de 56 livres demande 46 de rosette; combien un alliage de 5200 en demandera-t'il ? & si un alliage de 56 demande 10 d'étain, combien l'alliage 5200 en demandera-t'il ? & ces deux regles donnent 4271 $\frac{24}{56}$ de rosette, & 928 $\frac{32}{56}$ d'étain.

$$56 . 46 :: 5200 . 4271 \tfrac{24}{56}$$
$$56 . 10 :: 5200 . 928 \tfrac{32}{56}$$

Pour trouver combien il a mis de rosette sur 28 livres de mêlange, je dis le mêlange 56 est à 46 de rosette comme le mêlange 28 est à un quatriéme terme, lequel après avoir fait la regle se trouve 23 ; ainsi il a mis 23 livres de rosette au lieu de 25, & par conséquent il a mis 2 livres d'étain de plus.

Et pour trouver combien il faut ajouter de rosette pour rendre l'alliage bon, je dis si 3 d'étain demandent 25 de rosette, combien 928 $\frac{32}{56}$ d'étain demandent-elles ? & faisant la regle je trouve 7771 $\frac{24}{56}$; or il y en a déja 4271 $\frac{24}{56}$, ainsi il faut y ajouter 3500 de rosette; car 3500 & 4271 $\frac{24}{56}$ font 7772 $\frac{24}{36}$.

300. Lorsque le mêlange ou l'alliage que l'on veut faire est composé de trois quantités, le problême peut se résoudre de la même façon.

Supposons qu'on veut faire un alliage de trois sortes de métaux dont le premier vaut 20 sols la livre, le second 12 sols & le troisiéme 6, & qu'on demande que la livre d'alliage ne coute que 10 sols, on mettra la différence 10 de 20 à 10, vis-à-vis 6, & la différence 2 de 12 à 10 aussi vis-à-vis 6, parce qu'il n'y a qu'un seul prix 6 qui soit inférieur au prix moyen; après quoi on mettra la différence 4 de 6 à 10 vis-à-vis 20 & vis-à-vis 12, parce que ces deux quantités 20 & 12 ont donné leur différence à la quantité ; & faisant la somme 20 des quatre grandeurs 4, 4, 10 & 2, on connoîtra que pour faire un mêlange de 20 livres à 10 sols la livre il en faut 4 du metail de 20 sols, 4 du métail de 12 sols, & 10 + 2, ou 12 du métail de 6 sols, ce qu'on démontrera de même qu'auparavant.

20.		4.
12.		4.
	10.	
6.		10.
		2.
		20

301. Mais si le mêlange ou l'alliage demandé contient plus de trois quantités, le problême est susceptible de plusieurs solutions, en supposant néanmoins qu'il se trouve plus d'une quantité au-dessus ou au-dessous de la quantité moyenne ; car s'il ne s'en trouvoit qu'une au-dessus ou au-dessous, le problême n'auroit qu'une solution & se résoudroit comme on vient de voir, en donnant à la quantité qui seroit seule ou au-dessous, ou au-dessus toutes

toutes les différences des autres, & à chacune des autres la différence qui feroit feule.

Soient les prix de quatre quantités 25, 20, 12 & 6, & le prix moyen 15, j'arrange ces prix & le prix moyen à la façon ordinaire, & prenant la différence 10 de 25 à 15, je la mets vis-à-vis 6; je prens auffi la différence 9 de 6 à 15, & je la mets vis-à-vis 25; car il faut toujours obferver que la différence d'une grandeur ayant été mife vis-à-vis d'une autre, réciproquement la différence de cette autre foit mife vis-à-vis de la premiere. Je prens de même la différence 5 de 20 à 15, & je l'écris vis-à-vis de 12, & la différence 3 de 12 à 15 que j'écris vis-à-vis de 20; ainfi la fomme 27 des différences 9, 3, 5 & 10, me fait voir que pour un alliage de 27 livres il en faudroit 9 à 25 fols la livre, 3 à 20 fols, 5 à 12 fols, & 6 à 20 fols.

25.		9.
20.		3.
	15.	
12.		5.
6.		10.
		27.

Si je veux une autre folution, je mets la différence 10 de 25 à 15, non plus vis-à-vis de 6, mais vis-à-vis de 12, & la différence 3 de 12 à 15 vis-à-vis de 20; de même je mets la différence 5 de 20 à 15 vis-à-vis de 6, & la différence 9 de 6 à 15 vis-à-vis de 20, & la fomme 27 des différences me fait voir que pour un alliage de 27 livres dont le prix feroit 15 fols, il faudroit 3 livres à 25 fols, 9 livres à 20 fols, 10 à 12 fols, & 5 à 6 fols, & cet alliage eft différent de l'autre, & je ne fçaurois en faire d'autre par cette méthode, parce que je ne puis échanger les différences que de ces deux façons, & il eft aifé de voir que fi j'avois un plus grand nombre de chofes à allier, j'aurois auffi un plus grand nombre de différentes folutions.

25.		3.
20.		9.
	15.	
12.		10.
6.		5.
		27.

J'ai donné dans l'*Arithmétique des Géométres* d'autres Méthodes par lefquelles on peut trouver un plus grand nombre de folutions de ces fortes de problêmes; mais comme ce que nous venons de dire fuffit, je n'en parlerai pas ici de peur d'être trop long.

Des Progreffions Géométriques.

302. **Theoreme.** *Si l'on a une fuite de Raifons égales qui foient en progreffion géométrique, ou qui ne le foient pas, la fomme de tous les antécedens eft à la fomme de tous les conféquens, comme l'un des antécedens eft à fon conféquent.*

Soient les Raifons égales $a . b :: c . d . :: e . f$ qui ne font pas en

progreſſion. Puiſque chaque antécedent contient ſon conſéquent, ou eſt contenu dans lui de la même façon, il eſt clair que tous les antécedens contiendront, ou ſeront contenus de la même façon dans leurs conſéquents; & que par conſéquent tous les antécedents ſeront à tous les conſéquents comme l'un des antécedens eſt à ſon conſéquent, ainſi l'on aura $a+c+e.\ b+d+f :: a.\ b.$ Si a eſt double de b, c ſera double de d, & e double de f, & il eſt viſible que tous les doubles $a+c+e$ contiendront leurs ſimples $b+d+f$, comme l'un des doubles a contient ſon ſimple b, &c.

Soit la progreſſion $:: a, b, c, d$, cette progreſſion peut s'écrire ainſi, $a.\ b :: b.\ c :: c.\ d$, ce qui fait une ſuite de raiſons égales. Donc l'on prouvera, de même que nous venons de faire, que $a+b+c.\ b+c+d :: a.\ b.$

303. Corollaire. Il ſuit de-là que dans toute progreſſion la ſomme de tous les termes moins le dernier, eſt à la ſomme de tous les termes moins le premier, comme le premier eſt au ſecond, ou comme le ſecond au troiſiéme, &c.

304. Theoreme. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante, le ſecond terme moins le premier eſt au premier, comme le dernier moins le premier eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier.*

Soit la progreſſion aſcendante $:: a, b, c, d, e$, par le Theorême précedent, nous avons $a+b+c+d.\ b+c+d+e :: a.\ b.$ Donc *invertendo* nous avons $b+c+d+e.\ a+b+c+d :: b.\ a$, & *dividendo* nous aurons $b+c+d+e-a-b-c-d.\ a+b+c+d :: b-a.\ a$, & corrigeant l'expreſſion du premier terme, nous aurons $e-a.\ a+b+c+d :: b-a.\ a$, & mettant la ſeconde Raiſon à la place de la premiere, & la premiere à la place de la ſeconde, nous aurons $b-a.\ a :: e-a.\ a+b+c+d$, ce qu'il falloit démontrer.

305. *Remarque I.* Il faut obſerver qu'au lieu de dire le ſecond moins le premier eſt au premier, on pourroit dire le troiſiéme moins le ſecond eſt au ſecond, ou le quatriéme moins le troiſiéme eſt au troiſiéme, &c. ou le dernier moins le pénultiéme eſt au pénultiéme, &c. car la progreſſion étant compoſée des Raiſons égales $a.\ b :: b.\ c :: c.\ d :: d.\ e$, il eſt viſible que $b-a.\ a :: c-b.\ b :: d-c.\ c :: e-d.\ d$; & que par conſéquent au lieu de $b-a.\ a$ on peut mettre ou $c-b.\ b$, ou $d-c.\ c$, ou enfin $e-d.\ d$.

306. Remarque II. Si la progreſſion étoit deſcendante comme :: *e. d. c. b. a*, on la prendroit à rebours, ce qui donneroit la progreſſion aſcendante :: *a, b. c. d. e*, & l'on auroit la même choſe qu'auparavant.

307. Theoreme. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante ; le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant, le troiſiéme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de l'Expoſant, le quatriéme eſt égal au premier multiplié par la troiſiéme puiſſance de l'Expoſant, & ainſi de ſuite.*

Soit la progreſſion aſcendante :: $a.\ b.\ c.\ d.\ e$, & l'Expoſant p, le ſecond terme b ſera donc ap ; & mettant cette valeur de b dans la ſeconde raiſon b, c, nous aurons $ap.\ c$, & comme l'Expoſant de cette Raiſon eſt encore p, nous aurons $ap \times p$, ou $app = c$, & par la même Raiſon nous aurons $ap^3 = d$, & $ap^4 = e$; donc la progreſſion propoſée ſera la même que celle-ci :: $a.\ ap.\ app.\ ap^3.\ ap^4$, où l'on voit que le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant, que le troiſiéme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de p, &c.

308. Si la progreſſion étoit deſcendante comme :: *e. d. c. b. a* ; on la prendroit à rebours, ce qui donneroit la progreſſion aſcendante :: *a. b. c. d. e*, où l'on prouveroit la même choſe que ci-deſſus.

309. Corollaire. Il ſuit de-là que dans toute progreſſion géométrique aſcendante, le dernier terme eſt égal au premier multiplié par l'Expoſant élevé à une puiſſance, dont le dégré eſt égal au nombre des termes diminué de l'unité ; car dans la progreſſion :: a, ap, app, ap^3, ap^4, le dernier terme ap^4 eſt égal au premier terme a, multiplié par la puiſſance p^4, dont le dégré 4 eſt égal au nombre des termes 5 diminué de l'unité.

310. Probleme. *Trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique.*

Soit la progreſſion géométrique aſcendante 2 4. 8. 16. 32. Je dis $4 - 2$ eſt à 2 comme $32 - 2$ eſt à la ſomme des termes qui précedent 32 (*N.* 304.) ; mais $4 - 2 = 2$ & $32 - 2 = 30$; donc j'ai 2. 2 :: 30. 30, & par conſéquent 30 eſt la ſomme de tous les termes moins le dernier ; c'eſt pourquoi ajoutant à cette ſomme le dernier terme 32, la ſomme 62 eſt la ſomme de la progreſſion ; & l'on voit ici que quand l'Expoſant eſt 2, le dernier terme moins le premier eſt égal à la ſomme des termes qui le précedent.

Si la progreſſion avoit été 1. 3. 9. 27. 81, on auroit trouvé en faiſant $3 - 1$ eſt à 1 comme $81 - 1$ eſt à la ſomme des termes

qui précedent le dernier, & en achevant la regle de trois, que, le dernier terme moins le premier d'une progreſſion dont l'expoſant eſt 3, eſt double de la ſomme des termes qui le précedent; & ſi l'Expoſant étoit 4, on trouveroit que le dernier terme moins le premier ſeroit triple de la ſomme des termes qui le précedent, & ainſi de ſuite.

311. Soit la progreſſion géométrique deſcendante 32. 16. 8. 4. 2. je la prens à rebours, ce qui me donne la progreſſion aſcendante 2. 4. 8. 16. 32. dont je cherche la ſomme comme auparavant; ou bien comme il eſt indifférent de dire 4 — 2 eſt à 2, ou de dire 32 — 16 eſt à 16, comme 32 — 2 eſt à la ſomme des termes qui le précedent, je fais la regle de trois de cette derniere façon, & je retrouve de même qu'auparavant, que la ſomme des termes qui précedent le dernier, eſt 30. Or cela me fait voir que ſi je ne veux pas renverſer la progreſſion deſcendante, je dois dire: *Le premier terme 32 moins le ſecond 16, eſt au ſecond 16 comme le premier 32 moins le dernier 2 eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier 32*, & ceci peut ſervir de regle générale pour les progreſſions deſcendantes qu'on ne voudra pas prendre à rebours.

312. Si la progreſſion géométrique deſcendante s'étend à l'infini, le dernier terme devient infiniment petit, & peut être regardé comme égal à zero, & par conſéquent on aura le premier terme moins le ſecond eſt au ſecond comme le premier moins le dernier qui eſt zero, c'eſt-à-dire comme le premier eſt à la ſomme des termes qui le ſuivent; ſuppoſant donc que la progreſſion eſt :: 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. &c. $\frac{1}{2^\infty}$ juſqu'au dernier terme qui ſera un diviſé par la puiſſance infinie de l'Expoſant 2, lequel ſera par conſéquent un infiniment petit, à cauſe qu'une fraction diminue de plus en plus, à meſure que ſon dénominateur augmente, & devient enfin égale à rien quand le dénominateur eſt infini, nous aurons $1 - \frac{1}{2}$ eſt à $\frac{1}{2}$ comme 1 eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier, & comme $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, nous trouverons que le nombre infini de termes qui ſuivent le premier 1 ne vaut qu'un, & que par conſéquent la ſomme entiere de la progreſſion eſt 2.

On trouvera de la même façon que ſi la progreſſion étoit :: 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$. & $\frac{1}{3^\infty}$, la ſomme des termes qui ſuivent le premier, ſeroit égale à $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du premier terme; que ſi la progreſſion étoit :: 1 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, &c. $\frac{1}{4^\infty}$, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſeroit $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire le tiers du pre-

mier terme, & ainſi de ſuite. D'où il ſuit que toute progreſſion deſcendante compoſée d'une infinité de termes, eſt égale à une grandeur finie, à moins que ſon premier terme ne fût infini.

313. Quand aux progreſſions géométriques aſcendantes, il eſt viſible que leur valeur eſt infinie. Par exemple, ſi la progreſſion eſt :: 1. 2. 4. 8. 16. &c. 2^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera égale à $2^{\infty} - 1$, (*N.* 310), & par conſéquent la ſomme totale ſera $2 \times 2^{\infty} - 1$. De même ſi la progreſſion eſt :: 1. 3. 27. 81. &c. 3^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & la ſomme $\frac{3}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & ſi la progreſſion eſt :: 1. 4. 16. 64. &c. 4^{∞}, la ſomme des termes qui précedent le dernier, eſt $\frac{1}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$, & la ſomme totale $\frac{4}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$, & ainſi de ſuite.

314. Que ſi à ces progreſſions aſcendantes infinies, on ajoute les deſcendantes, enſorte qu'on ait pour la premiere $\frac{1}{2^{\infty}}$ &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. &c. 2^{∞}, la ſuite des fractions $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$ &c. ſera 1. (*N.* 312.); & comme la ſuite 1. 2. 4. 8. &c. eſt $2 \times 2^{\infty} - 1$, ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $2 \times 2^{\infty} - 1 + 1$, ou $2 \times 2^{\infty}$. De même ſi la progreſſion eſt $\frac{1}{3^{\infty}}$ &c. $\frac{1}{81}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{3}$. 1. 3. 9. 27. 81. &c. 3^{∞}, la ſuite des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. ſera $\frac{1}{2}$, & celle des termes 1. 3. 9. 27. &c. eſt $\frac{3}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, & ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $\frac{3}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2} \times 3^{\infty}$, & ainſi de ſuite.

315. THEOREME. *Toutes les puiſſances d'une grandeur ſont en progreſſion géométrique.*

Soit la ſuite des puiſſances a. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. &c. ſi je diviſe la ſeconde par la premiere, le quotient ſera a; de même ſi je diviſe la troiſiéme par la ſeconde, l'Expoſant ſera encore a, & ainſi de ſuite; donc puiſque l'Expoſant d'une puiſſance à l'autre eſt toujours le même, ces puiſſances ſont en progreſſion géométrique. Soit encore la ſuite a^0. a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. a^{-4}. &c qui eſt la même que celle-ci 1. $\frac{1}{a}$. $\frac{1}{aa}$. $\frac{1}{a^3}$. $\frac{1}{a^4}$. &c. (*N.* 161.) dont les termes vont en diminuant. Si je diviſe le premier terme a^0 par le ſecond a^{-1}, en me ſervant du calcul des expoſans, le quotient ou l'expoſant des deux termes ſera a^1, & ſi je diviſe le ſecond terme a^{-1} par la troiſiéme a^{-2}, le quotient ſera encore a^1, & ainſi de ſuite. Donc les puiſſances ſeront en progreſſion.

316. Il faut obſerver que tandis que les puiſſances poſitives d'une grandeur a^0. a^1. a^2. a^3. &c. ſont en progreſſion géométri-

que leurs exposants o. 1. 2. 3. 4. &c. sont en progression arithmetique positive, & que tandis que ses puissances négatives a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. &c. sont aussi en progression géométrique, leurs exposants —1, —2, —3, —4, —5, &c. sont en progression arithmetique négative; de façon que le terme zero se trouve entre la progression positive & la négative, & que la progression arithmetique totale est — ∞, &c. —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. ∞, ce qui nous servira pour mieux faire entendre ce que c'est que les *Logarithmes*.

CHAPITRE IX.

Des Raisons composées.

317. SI l'on a deux ou plusieurs raisons, *a*, *b*; *c*, *d*; *e*, *f*; & qu'on multiplie tous les antécedens les uns par les autres, & tous les conséquens aussi, les deux produits *ace*, *bdf*, formeront une autre raison, laquelle est dite Raison *composée* des raisons *a*, *b*; *c*, *d*; *e*, *f*, qu'on nomme *les composantes*.

318. Une Raison composée de deux Raisons égales, se nomme raison *doublée* de l'une des composantes; une raison composée de trois Raisons égales, se nomme Raison *triplée* de l'une des composantes, & ainsi de suite.

Les raisons doublées, triplées, quadruplées, &c. sont donc différentes des Raisons doubles, triples, quadruples, &c. & il ne faut pas les confondre; car la raison double est une raison dont l'antécedent est double du conséquent (*N.* 274) au lieu qu'une Raison doublée est une raison composée de deux raisons égales.

219. J'ai dit (*N.* 238.) que l'exposant d'une Raison est le quotient de la division du plus grand terme par le moindre, soit que ce terme soit ou le premier ou le dernier de la Raison, parceque lorsque le plus grand terme est le premier, le quotient de la division fait voir combien de fois le premier contient le second, & lorsqu'il est le dernier, le quotient fait voir combien de fois le premier est contenu dans le second. Or il faut remarquer qu'on pourroit aussi appeller *exposant*, le quotient du premier terme divisé par le second, soit que le premier soit plus grand, ou qu'il soit plus petit que le second; car dans le cas où le premier terme est moindre, le quotient du premier divisé par l'autre, est une fraction qui fait voir que le premier étant moindre, est

contenu dans le ſecond. Mais pour ne pas mettre de l'équivoque dans le mot d'*expoſant*, ainſi que quelques Auteurs ont fait, je nommerai toujours *expoſant* le quotient de la diviſion du plus grand terme par le plus petit terme ; & au contraire je nommerai *expoſiteur* le quotient du premier terme diviſé par le ſecond, & cet expoſiteur ne differera de l'expoſant que dans le cas où le premier terme ſera le moindre ; & il eſt viſible que l'expoſiteur multiplié par le ſecond terme, ſera toujours égal au premier dans l'un & l'autre cas ; car ſuppoſé que la Raiſon ſoit 4, 2, *l'expoſiteur* ſera 2, & par conſéquent multipliant le dernier terme 2 par le quotient ou expoſiteur 2, le produit 4 ſera égal au premier. De même ſi la Raiſon eſt 2, 4, l'expoſiteur ſera $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, & le dernier terme 4 multiplié par $\frac{1}{2}$, donnera le produit 2 égal au premier terme, &c.

320. THEOREME. *Dans toute Raiſon compoſée l'Expoſiteur eſt égal au produit des Expoſiteurs des Raiſons compoſantes.*

Soient les Raiſons a, b ; c, d, l'expoſiteur de la premiere p, & celui de la ſeconde q, la Raiſon compoſée ſera donc ac, bd. (*N.* 317.) Or dans la premiere Raiſon nous avons $a = bp$ (*N.* 319.), & dans la ſeconde $c = dq$; mettant donc ces valeurs de a & c dans la Raiſon compoſée, nous aurons $bpdq$, bd, & par conſéquent diviſant le premier terme par le dernier, l'expoſiteur ſera pq, c'eſt-à-dire le produit des expoſiteurs p, q, des raiſons compoſantes.

De même ſoient les trois Raiſons compoſantes a, b ; c, d ; f, h ; l'expoſiteur de la premiere p, celui de la ſeconde q, & celui de la troiſiéme m ; la Raiſon compoſée ſera donc acf, bdh ; or dans la premiere raiſon j'ai $a = bp$, dans la ſeconde $c = dq$, & dans la troiſiéme $f = mh$; mettant donc ces valeurs de a, c, f dans la compoſée acf, bdh, j'aurai $bpdqmh$, bdh, & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſiteur ſera pqm, lequel eſt produit des trois expoſiteurs p, q, m ; & ainſi des autres.

321. Ce Theorême eſt général, quand même il ſe trouveroit des Raiſons compoſantes qui auroient leurs antécedents plus grands que leurs conſéquents, & d'autres leurs conſéquents plus grands que les antécedents, & je n'aurois pas pû la rendre générale de la même façon, ſi je m'étois ſervi des expoſants au lieu des expoſiteurs. Car ſoient les Raiſons compoſantes 4, 1 ; 1. 3, l'expoſiteur de la premiere eſt 4, & celui de la ſeconde eſt $\frac{1}{3}$, & la Raiſon compoſée eſt 4, 3, dont l'expoſiteur $\frac{4}{3}$ eſt égal au produit

des expositeurs $4; \frac{1}{3}$ des Raisons composantes. Mais si j'avois pris les exposans 4 & 3 des raisons composantes, l'exposant $\frac{4}{3}$ de la composée n'auroit pas été égal au produit des exposans 4 & 3; & par conséquent le théorême ne se seroit pas étendu à ce cas.

322. THEOREME. *L'expositeur d'une Raison composée de deux Raisons égales, est égal au quarré de l'expositeur de l'une des composantes; celui d'une raison composée de trois Raisons égales, est égal au cube de l'expositeur de l'une des composantes; celui d'une raison composée de quatre raisons égales, est égal à la quatriéme puissance de l'expositeur de l'une des égales, & ainsi de suite.*

Soient les deux raisons $a, b :: c, d$, l'expositeur p de la premiere sera donc le même que l'expositeur de la seconde, & par conséquent nous aurons $d = bp$ & $c = dp$. Or la raison composée est ac, bd; mettant donc dans la composée les valeurs de a & de c, nous aurons $bpdp, bd$, & divisant le premier terme par le second, l'expositeur pp sera le quarré de l'expositeur p de la premiere Raison composante, ou de la seconde.

Soient de même les trois Raisons égales, $a, b :: c, d, :: f, h$; & l'expositeur de chachacune d'elles p; nous aurons donc $a = bp$, $c = dp$; & $f = hp$. Or la raison composée est acf, bdh; mettant donc les valeur de a, c, f, nous aurons $bpdphp, bdh$, & divisant le premier terme par le second, l'expositeur ppp sera le cube de l'expositeur de la premiere raison composante, ou de la seconde, ou de la troisiéme; & il est aisé de prouver la même chose à l'égard des Raisons composées d'un plus grand nombre de Raisons égales.

323. THEOREME. *Les quarrés sont en Raison doublée de la Raison de leurs racines, les cubes en Raison triplée, les quatriémes puissances en Raison quadruplée, & ainsi de suite.*

Soient les quarrés aa, bb, dont les racines sont a, b, je prens les deux Raisons égales $a, b :: a. b$, & la composée de ces deux Raisons est la raison doublée aa, bb; or les termes des cette Raison doublée sont les quarrés des termes a, b, de l'une ou de l'autre des composantes; donc les qurrés aa, bb, sont en Raison doublée de la Raison de leurs racines.

De même soient les cubes a^3, b^3, dont les racines sont a, b; je prens les trois Raisons égales $a, b :: a, b :: a, b$, & la composée de ces trois Raisons est a^3, b^3, laquelle est triplée de la premiere, ou de la seconde, ou de la troisiéme; or a^3, b^3; sont les cubes des termes a, b, de chacune de ces raisons; donc les

les cubes sont en raison triplée de la raison de leurs racines, & ainsi des autres.

324. COROLLAIRE. Il suit delà que les racines quarrées sont en raison soudoublée de celle de leurs quarrés, que les racines cubiques sont en raison soutriplée de celle de leurs cubes, &c.

325. THEOREME. *Si l'on a plusieurs grandeurs de suite, la premiere est à la troisiéme en raison composée de la raison de la premiere à la seconde, & de celle de la seconde à la troisiéme ; la quatriéme est en raison composée de la raison de la premiere à la seconde, de celle de la seconde à la troisiéme, & de celle de la troisiéme à la quatriéme, & ainsi de suite, c'est-à-dire que la raison d'un terme à un autre est composée de toutes les raisons qui se trouvent entre-deux.*

Soient les grandeurs a, b, c, d, e, &c. telles que l'on voudra, soient qu'elles aillent toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, ou tantôt en augmentant, & tantôt en diminuant; je prens les deux raisons $a, b ; b, c$, & faisant la composée, j'ai ab, bc, & divisant l'un & l'autre terme par b, les quotiens a, c, sont en même raison que ab, bc, (*N.* 33.); donc $a. c :: ab. bc$, & par conséquent la premiere grandeur donnée est à la troisiéme c, en raison composée de celle des deux premieres a, b, & de celle de la seconde b à la troisiéme c.

Je prens de même les trois raisons $a, b ; b, c ; c, d$, & leur composée est abc, bcd ; or ses deux termes étant divisés par bc, donnent a, d, qui sont en même raison que abc, bcd; donc $a. d :: abc. bcd$, c'est-à-dire la premiere grandeur donnée a est à la quatriéme d en raison composée des raisons intermédiaires, $a, b; b, c; c, d$, & ainsi des autres.

326. COROLLAIRE. Si les grandeurs données a, b, c, d, e, &c. étoient en progression géométrique ascendante, ou descendante, ce seroit encore la même chose.

327. THEOREME. *Dans toute Progression géometrique ascendante ou descendante, le premier terme est au troisiéme comme le quarré du premier au quarré du second ; le premier est au quatriéme comme le cube du premier au cube du second ; le premier est au cinquiéme comme la quatriéme puissance du premier à la quatriéme puissance du second, & ainsi de suite.*

Soit la progression $:: a, b, c, d, e$, &c. par le Théorême précédent, le premier terme a est au troisiéme c, en raison composée de la raison a, b, & de la raison b, c, or ces deux raisons sont égales; donc le premier terme a est au troisiéme c en raison

doublée de la raison a, b, ou de la raison b, c, (*N.* 318.); or la raison doublée de l'une des composantes est égale à la raison des quarrés des termes de l'une des composantes (*N.* 323.); donc la raison a, c, est la même que la raison des quarrés des deux premiers termes a, b de la progression.

De même par le Théorême précédent la raison a, d, est composée des raisons $a, b; b, c; c, d$; or ces trois raisons sont égales; donc la raison a, d, est triplée de la raison a, b; mais les cubes de la raison a, b, sont aussi en raison triplée de la raison a, b, (*N.* 323.) donc le premier terme a de la progression est au quatriéme terme d, comme le cube a^3 du premier est au cube b^3 du second, & ainsi des autres.

328. THEOREME. *Une Progression géométrique ascendante ou descendante étant donnée, les quarrés de ses termes, ou les cubes, ou les quatriémes puissances; de même, leurs racines quarrées ou leurs racines cubiques, ou leurs racines quatriémes, &c. seront encore en progression.*

Dans toute progression géométrique la raison du premier terme au second est égale à celle du second au troisiéme, celle du troisiéme au quatriéme, & ainsi de suite; donc les raisons doublées, ou triplées, ou quadruplées, &c. ou les raisons soudoublées, soutriplées, souquadruplées, &c. de toutes ces raisons sont encore égales; or les quarrés de ces raisons sont en raison doublée, les cubes en raison triplée, &c. & les racines quarrées sont en raison soudoublée, les racines cubiques en raison soutriplée, &c. donc les quarrés ou les cubes, &c. ou les racines quarrées ou cubiques, &c. sont entr'elles en même raison, & par conséquent elles sont encore en progression.

329. THEOREME. *Si deux quarrés inégaux ou deux cubes, ou deux quatriémes puissances, &c. sont divisés l'un par l'autre, le quotient est un nombre quarré, ou un cube, &c.*

Ceci est une suite des principes précédens, mais on peut le démontrer avec plus de facilité en cette sorte. Soient les quarrés aa, bb, si je divise l'un par l'autre, le quotient est $\frac{aa}{bb}$, lequel est encore un quarré; car sa racine est $\frac{a}{b}$. De même soient les cubes a^3, b^3, si je divise l'un par l'autre, le quotient $\frac{a^3}{b^3}$ est encore un cube, puisque sa racine cubique est $\frac{a}{b}$, & ainsi des autres.

330. PROBLEME. *Trouver entre deux nombres donnés autant de moyennes proportionnelles géométriques qu'on voudra.*

Soient les grandeurs a, b, entre lesquelles on demande une moyenne proportionnelle géométrique, je la nomme x, & j'ai $\because a.\ x.\ b$; or le quarré de la premiere est au quarré de la seconde comme la premiere est à la troisiéme (*N.* 327.) donc $aa.\ xx.\ a.\ b$, & faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, j'ai $aab = axx$, & divisant par a de part & d'autre, je trouve $ab = xx$, & $x = \sqrt{ab}$, ce qui me fait voir qu'il faut multiplier a par b & en tirer la racine quarrée du produit pour avoir x, de même que nous l'avons trouvée. (*N.* 292.)

Soient les grandeurs a, b, entre lesquelles on demande deux moyennes proportionnelles; je nomme la premiere x, & la seconde y, & j'ai $\because a.\ x.\ y.\ b$; or le cube de la premiere est au cube de la seconde comme la premiere est à la quatriéme (*N.* 327.); donc $a^3.\ x^3 :: a.\ b$, d'où je tire $a^3b = ax^3$, & divisant tout par a, j'ai $a^2b = x^3$, & tirant la racine cubique je trouve $x = \sqrt[3]{a^2b}$; ce qui me fait voir que pour trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles il faut faire le quarré de la premiere a, le multiplier par la quatriéme b, & tirer la racine cubique du produit. Après quoi comme les quatre termes sont en progression on dira la premiere a est à la seconde x qui sera une grandeur connuë comme cette seconde est à la troisiéme, & la Regle de Trois donnera la troisiéme.

On trouveroit de même trois moyennes proportionnelles, quatre, &c. entre deux grandeurs données.

331. *REMARQUE.* Il n'arrive pas toujours qu'on puisse exprimer en nombres les moyennes proportionnelles que l'on cherche, & l'on va voir dans le Chapitre suivant quels sont les cas où cela ne se peut pas.

332. THEOREME. *On peut toujours trouver une moyenne proportionnelle exprimable en nombre entre deux quarrés parfaits, c'est-à-dire dont on peut extraire la racine, deux entre deux cubes parfaits, trois entre deux quatriémes puissances parfaites, & ainsi de suite.*

Soient les deux quarrés parfaits aa, bb, je les multiplie l'un par l'autre, ce qui donne $aabb$, dont la racine quarrée ab est moyenne proportionnelle entre les deux quarrés aa, bb, puisque son quarré est égal au produit des deux quarrés qui sont ses extrêmes (*N.* 330.) ainsi j'ai $\because aa.\ ab.\ bb.$ ce qui fait voir que *le produit des racines de deux quarrés est moyen proportionnel entre ces deux quarrés.*

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux cubes a^3, b^3, je multiplie leurs racines a, b, chacune par le quarré aa, ce qui donne les produits a^3, a^2b, qui sont en même raison que les racines a, b, (*N.* 32.) ; je multiplie les mêmes racines a, b, chacune par le quarré de la seconde, ce qui donne les produits abb, b^3, qui sont aussi en même raison, & par conséquent les deux raisons a^3, a^2b ; & abb, b^3 étant égales chacune à la raison a, b, sont égales entr'elles ; donc $a^3 . a^2b :: abb . b^3$. Maintenant pour prouver que ces quatre grandeurs sont non-seulement proportionnelles, mais encore en proportion continuë, je multiplie la premiere a^3 par la troisiéme abb, & le produit est a^4bb dont la racine quarrée est a^2b, & par conséquent a^2b est moyenne proportionnelle entre a^3b & abb ; de même je multiplie le second terme a^2b par le quatriéme b^3, & le produit est a^2b^4 dont la racine quarrée est abb, & par conséquent abb est moyenne proportionnelle entre a^2b & b^3, & les quatre termes a^3, a^2b, abb, b^3 sont en proportion continuë.

Pour trouver trois moyennes proportionnelles entre deux quatriémes puissances a^4, b^4, je multiplie leurs racines a, b, par le cube de la premiere, & les produits a^4, a^3b, sont encore en même raison, je multiplie les mêmes racines par aab, & les produits a^3b, $aabb$, sont en même raison ; je les multiplie encore par abb, & les produits $aabb$, ab^3, sont en même raison ; enfin je les multiplie par b^3, & les produits ab^3, b^4, sont en même raison ; donc j'ai la proportion continuë $a^4 . a^3b :: a^3b . aabb :: aabb . ab^3 :: ab^3 . b^4$, & on trouvera de même qu'entre deux cinquiémes puissances parfaites il y a quatre moyennes proportionnelles, &c.

Si l'on éleve un binome $a+b$ à ses puissances, & qu'on néglige les coefficiens numériques, on trouvera que les termes compris entre la plus haute puissance de a & la plus haute puissance de b, sont les moyennes géométriques dont nous venons de parler.

Des Regles que les Arithméticiens nomment Regles de cinq, de sept, de neuf, &c.

333. Lorsque dans une question proposée qui contient cinq grandeurs connuës on en cherche une sixiéme, & que les cinq peuvent se réduire à trois, de façon que par une regle de Trois on puisse trouver la sixiéme, les Arithméticiens disent que cette regle est une regle de cinq. De même ils disent que la regle est

une regle de ſept, lorſqu'une queſtion contient ſept termes connus leſquels peuvent ſe réduire à trois, 'par le moyen deſquels on trouve le huitiéme terme cherché, & ainſi des autres; or les pratiques qu'ils enſeignent ſont fondées ſur les principes des raiſons compoſées, comme on va voir dans l'Exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Deux hommes en trois jours ont fait 24 toiſes d'ouvrage, quatre hommes en 9 jours combien en feront-ils?*

Pour réſoudre cette queſtion les Arithméticiens diſent qu'il faut multiplier les deux premiers termes 2 & 3 l'un par l'autre, ce qui fait 6; multiplier enſuite le quatriéme & le cinquiéme l'un par l'autre, ce qui fait 36, enfin faire une regle de Trois dont le premier terme ſoit le produit 6, le ſecond le nombre 24 de toiſes, & le troiſiéme le produit 36. De ſorte que la regle étant faite le quatriéme terme 144 ſera le nombre de toiſes que quatre hommes feroient en neuf jours.

6. 24 :: 36. *réponſe* 144

```
  24
  36
 ---
 144
 72
 ---
 864

   6
 864(144
 26
 --
 24
```

La proportion ſelon les Arithméticiens eſt donc 6. 24 :: 36. 144, ou bien en alternant 6. 36 :: 24. 144, c'eſt-à-dire que le produit 6 du nombre 2 d'hommes multiplié par le nombre 3 de leurs jours eſt au produit 36 du nombre d'hommes 4 multiplié par leurs jours 9 comme les 24 toiſes faites par deux hommes en 3 jours ſont à 144 toiſes que feront 4 hommes en 9 jours.

Or pour rendre raiſon de ceci, il ſuffit de faire obſerver que le nombre 24 de toiſes doit être au nombre 144 de toiſes, non-ſeulement dans la raiſon du nombre 2 d'hommes au nombre 4 d'hommes, mais encore dans la raiſon du nombre 3 de jours au nombre 9 de jours, & par conſéquent 24 doit être à 144 en raiſon compoſée des nombres d'hommes 2, 4, & des nombres de jours 3, 9; or la raiſon compoſée de ces deux raiſons eſt 2×3, 4×9, ou 6, 36, & les termes de cette raiſon ſont les produits des nombres d'hommes par leurs jours; donc, &c.

On ſera encore plus convaincu de ceci ſi l'on fait attention que deux hommes en trois jours font autant de travail que 2 fois 3 hommes ou 6 hommes en un jour, & que 4 hommes en 9 jours font autant de travail que 4 fois 9 hommes ou 36 hommes en un jour, & qu'ainſi la queſtion propoſée eſt la même que ſi

on difoit : 6 hommes ont fait 24 toifes, combien 36 hommes en feront-ils ? ce qui eft une regle de Trois ordinaire.

On juge aifément par-là de quelle façon on peut réduire à trois termes, les queftions de 7, de 9, de 11, &c. c'eft pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

CHAPITRE X.

Des Incommenfurables.

334. SI le rapport de deux grandeurs peut s'exprimer en nombres, ces deux grandeurs font dites *commenfurables entr'elles*, parce qu'on pourra trouver un nombre qui les mefurera. Le rapport de 4 à 2 eft 2, ces deux grandeurs font donc commenfurables ; car 2 fe mefure lui-même, & il mefure auffi 4, puifqu'il y eft contenu deux fois ; de même le rapport de 5 à 3 eft commenfurable, car l'unité les mefure tous les deux, étant contenuë cinq fois dans 5, & trois fois dans 3, &c.

335. Si le rapport de deux grandeurs ne peut pas s'exprimer en nombres, ces deux grandeurs font dites *incommenfurables entr'elles* ; ainfi 2 & $\sqrt{3}$ font incommenfurables, parce qu'on ne fçauroit exprimer ce que 2 eft à $\sqrt{3}$, &c.

336. Si deux grandeurs incommenfurables entr'elles deviennent commenfurables en les élevant au quarré, on dit que ces deux grandenrs font *incommenfurables entr'elles, & commenfurables enpuiffance.* 2 & $\sqrt{3}$ font commenfurables en puiffance, parce que leurs quarrés font entr'eux comme deux nombres, & fi ces grandeurs ne font commenfurables que lorfqu'on les éleve au cube, on dit qu'elles font incommenfurables entr'elles, & en puiffance, & commenfurables en troifiéme puiffance, &c.

337. THEOREME. *Si l'expofiteur ou l'expofant d'une raifon doublée n'eft pas un quarré, ou fi celui d'une raifon triplée n'eft pas un cube, les termes des raifons fimples dont ces raifons font doublées ou triplées, feront incommenfurables entr'eux ; mais fi l'expofiteur ou l'expofant d'une raifon eft un nombre quarré, ou un nombre cube, &c. les termes de la raifon feront entr'eux comme deux quarrés, ou comme deux cubes.*

Le premier cas eft facile après ce qui a été dit ci-devant ; & pour le fecond, foit la raifon 2, 8, dont l'expofiteur $\frac{1}{4}$, ou l'expofanr 4 font des nombres quarrés, or l'un & l'autre font voir que 2 eft le quart de 8 ; ainfi 2. 8 :: 1. 4, mais 1 & 4 font des nombres quarrés ;

donc les termes 2 & 8 sont entr'eux comme des nombres quarrés.

De même soit la raison 16, 54 dont l'exposant $\frac{16}{54}$, lequel réduit aux moindres termes est $\frac{8}{27}$, & l'exposant $\frac{54}{16}$, ou $\frac{27}{8}$ sont des nombres cubes, puisque la racine cubique de 8 est 2, & celle de 27 est 3 ; or l'un & l'autre nous font voir que 16. 54 :: 8. 27, & par conséquent 16 & 54 sont entreux comme des nombres cubes, & ainsi des autres.

338. THEOREME. *Dans toute progression géométrique ascendante ou descendante, le premier terme est commensurable au second si l'exposant de la raison du premier au troisiéme est un quarré, ou si celui de la raison du premier au quatriéme est un nombre cube, ou si celui du premier au cinquiéme est la quatriéme puissance d'un nombre, &c.*

Soit la proportion géométrique :: *a, b, c, d, e, f,* &c. la raison du premier terme *a* au troisiéme *c*, est composée de la raison *a, b*, & de la raison *b, c*, (*N.* 325.); or ces deux composantes sont égales, puisqu'il y a progression ; donc la raison du premier au troisiéme est doublée de la raison *a, b*, (*N.* 318.) & par conséquent son exposant est le quarré de l'exposant de la raison *a, b*, mais on suppose que cet exposant est un nombre quarré, donc on pourra tirer sa racine pour avoir l'exposant de la composante *a, b*, & connoître par-là le rapport du premier terme *a* au second terme *b*.

De même la raison du premier terme *a* au quatriéme *d*, est composée des trois raisons égales *a, b ; b, c ; c, d*, & par conséquent elle est triplée de la raison *a, b ;* or l'exposant d'une raison triplée est le cube de l'exposant de l'une des composantes ; donc tirant la racine cubique de l'exposant de la raison *a, d*, lequel est un nombre cube par la supposition, cette racine sera l'exposant de la raison *a, b*, & fera voir la raison du premier au second, & ainsi des autres.

339. THEOREME. *Dans toute progression géométrique le premier terme & le second sont incommensurables entr'eux & commensurables en puissance, si l'exposant de la raison du premier au troisiéme n'est pas un nombre quarré, & ils sont incommensurables entr'eux & en puissance, si l'exposant du premier au troisiéme n'est pas un nombre qu'on puisse exprimer.*

Soit la progression :: *a, b, c, d, e,* &c. l'exposant du premier terme *a* au troisiéme *c* n'étant pas un nombre quarré par la supposition, on ne pourra en extraire la racine ; or l'exposant du premier terme au second est égal à cette racine ; donc puis-

que cet expositeur ne pourra pas s'exprimer en nombre, les termes a, b, seront incommensurables, mais les quarrés de ces termes seront commensurablees ; car ces quarrés étant en raison doublée de la raison a, b, seront en même raison que les termes a, c, qui sont aussi en raison doublée de la raison a, b; donc l'expositeur de ces quarrés sera le même que l'expositeur des termes a, c, & comme on suppose que cet expositeur est un nombre, on pourra donc connoître la raison des quarrés.

Que si on suppose que l'expositeur de la raison a, c, ne puisse pas s'exprimer en nombre, alors la raison des quarrés de la raison a, b, ne pourra s'exprimer non plus, puisque leur expositeur étant le même que celui de la raison a, c, ne pourra pas nous faire connoître leurs rapports; ainsi les deux premiers termes a, b, seront incommensurables entr'eux & en puissance.

340. THEOREME. *Dans toute progression géometrique, le premier terme & le second seront incommensurables entr'eux, & commensurables en troisiéme puissance, si l'expositeur du premier terme au quatriéme est un nombre qui ne soit pas cube, & ils seront incommensurables entr'eux & en troisiéme puissance si l'expositeur du premier au quatrième est une quantité qu'on ne peut exprimer.*

La raison du premier au quatriéme est triplée de la raison du premier au second, & par conséquent son expositeur est le cube de l'expositeur du premier au second; donc puisqu'on suppose que cet expositeur n'est pas un cube dont on puisse extraire la racine, on ne pourra non plus trouver l'expositeur des deux premiers termes; mais les cubes de ces termes seront commensurables, puisque ces cubes étant en raison triplée de leurs racines seront entr'eux comme le premier & le quatriéme terme qui sont commensurables à cause que leur expositeur est un nombre; que si cet expositeur n'étoit pas un nombre, il est clair que celui des cubes des deux premiers termes ne le seroit pas non plus, & que par conséquent les deux premiers termes seroient incommensurables entr'eux & en troisiéme puissance.

On trouvera par un semblable raisonnement que si l'expositeur du premier terme au cinquiéme est un nombre qui ne soit pas une quatriéme puissance, le premier & le second terme sont incommensurables entr'eux, & commensurables en quatriéme puissance, & que si cet expositeur n'est pas un nombre, le premier & le quatriéme sont incommensurables en quatriéme puissance, & ainsi des autres.

342.

342. Et il faut obſerver que ſi l'expoſiteur du premier au quatriéme n'eſt pas un nombre cube, non-ſeulement le ſecond terme eſt un radical, mais encore le troiſiéme. Soit par exemple le premier & le quatriéme terme 1. 6. je nomme les deux moyens x. y, & j'ai :: 1. x. y. 6, & par conſéquent 1. x^3 :: 1. 6. (*N.* 330.) d'où je tire $x^3 = 6$, & $x = \sqrt[3]{6}$; ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[3]{6}$; or ſi je veux trouver le troiſiéme, je dis : 1. $\sqrt[3]{6}$ :: $\sqrt[3]{6}$. $\sqrt[3]{36}$, & ce troiſiéme eſt la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{36}$.

De même ſi l'expoſiteur du premier au cinquiéme n'eſt pas un nombre qui ſoit une quatriéme puiſſance, les trois termes qui ſont entre le premier & le cinquiéme ſont des grandeurs radicales. Car ſoient le premier & le cinquiéme terme 2. 8, je nomme les trois moyens x, y, z, & j'ai :: 2. x. y. z. 8; & par conſéquent 16. x^4 :: 2. 8. (*N.* 330.); d'où je tire $x^4 = \frac{16 \times 8}{2}$, & $x = \sqrt[4]{64}$; ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[4]{64}$, or pour trouver le troiſiéme je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\sqrt[4]{64}$. $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$, & le troiſiéme terme eſt $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$. & pour trouver le quatriéme terme je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$. $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64 \times 64}}{4}$, & ce quatriéme terme eſt incommenſurable de même que les précédens.

On prouveroit de la même façon que ſi l'expoſiteur du premier au ſixiéme terme n'eſt pas un nombre qui ſoit une cinquiéme puiſſance, les termes compris enrre le premier & le ſixiéme ſeront incommenſurables.

343. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire qu'on ne peut trouver une moyenne proportionnelle exprimable en nombre entre deux grandeurs, que lorſque l'expoſiteur de ces grandeurs eſt un quarré; qu'on ne peut trouver deux moyennes proportionnelles entre ces mêmes grandeurs que lorſque l'expoſiteur eſt un cube; qu'on n'en peut trouver trois que lorſque l'expoſiteur eſt une quatriéme puiſſance, &c. cependant toutes ces moyennes proportionnelles que nous ne ſçaurions exprimer en nombres, s'expriment aiſément en lignes par les regles de la Géométrie, comme on verra dans la ſuite.

CHAPITRE XI.

Des Logarithmes.

344. SI l'on prend une progreſſion géometrique infinie en montant & en deſcendant $\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞, & que ſous les termes 1. 2. 4, &c. qui vont en montant, on mette les termes poſitifs 0. 1. 2. 3, &c. d'une progreſſion arithmétique aſcendante, & que ſous les termes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, &c. de la progreſſion géométrique on mette les termes négatifs -1, -2, -3, &c. de la progreſſion arithmétique, chaque terme de la progreſſion arithmétique ſe nommera le *Logarithme* du terme de la progreſſion géométrique ſous lequel il ſe trouvera écrit ; or les deux progreſſions ſeront les ſuivantes.

$\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞.
$-\infty$, &c. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. ∞.

345. J'ai fait obſerver (*N.* 316.) que la ſuite infinie des puiſſances négatives & poſitives d'une grandeur a qui ſont $a^{-\infty}$, &c. a^{-6}. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4, &c. a^∞, ſont en progreſſion géométrique, ainſi faiſant $a = 2$, cette ſuite de puiſſances littérales ſera la même que la progreſſion géométrique cideſſus ; car a^0 eſt égal à 1 (*N.* 159.), & les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. ſont les mêmes que celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, & les expoſans des puiſſances littérales ſeront les mêmes que les termes de la progreſſion arithmétique que nous avons mis ſous ceux de la progreſſion géométrique.

346. Il ſuit delà que les logarithmes de la progreſſion géométrique auront les mêmes proprietés que les expoſans des puiſſances de a ; ainſi 1°. ſi je veux multiplier le terme 2 de la progreſſion géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter enſemble les logarithmes 1, 3, de ces deux termes, & la ſomme 4 ſera le logarithme du produit cherché (*N.* 154.) ; or le terme de la progreſſion géométrique écrit au-deſſus du logarithme 4 eſt 16 ; donc 16 eſt le produit de 2 par 8. 2°. Pour diviſer le terme 16 de la progreſſion géométrique par le terme 2, je prens les logarithmes 4. 1. de ces termes, & retranchant le ſecond du premier le reſte 3 eſt le logarithme du quotient cherché (*N.* 155.)

ainsi le terme 8 écrit sur le logarithme 3 est le quotient de 16 divisé par 2. 3°. Pour élever le terme 2 de la progression géométrique à sa quatriéme puissance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'exposant 4 de la quatriéme puissance de 2 (*N.* 156.); ainsi le terme 16 écrit au-dessus du logarithme 4 est la quatriéme puissance cherchée. 4°. Pour extraire la racine cubique de 8 je prens son logarithme 3, & le divisant par l'exposant 3 de la racine cubique, le quotient 1 est le logarithme de la racine cubique de 8 (*N.* 157.), & par conséquent le terme écrit au-dessus de ce logarithme est la racine cherché; d'où l'on voit que ce qu'il faudroit faire par la multiplication & la division, en opérant sur les termes de la progression géométrique, on le fait par l'addition & la soustraction, & ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puissances ou l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la division; or comme l'addition & la soustraction sont moins difficiles que la multiplication & la division, & que la multiplication & la division sont moins difficiles que l'élévation des puissances & l'extraction des racines, il est visible que les logarithmes épargnent bien du travail, surtout lorsqu'il s'agit de grands calculs, & de l'extraction des racines secondes, troisiémes, quatriémes, &c.

347. Il faut bien observer que les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, sont les mêmes que les logarithmes de leurs dénominateurs 2, 4, 8, &c. à l'exception qu'ils sont négatifs.

348. Comme il se trouve entre les termes d'une progression géométrique beaucoup de nombres qui ne sont point en progression, & qui par conséquent n'ont point de logarithmes, l'utilité que l'on tire des logarithmes se trouveroit bornée, mais on y a pourvû en cherchant les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4, &c. en cette sorte.

On a pris la progression. géométrique décimale :: 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. & comme pour trouver les logarithmes des nombres entre 1 & 10, il a fallu extraire des racines ainsi que nous allons dire, ce qui n'auroit pas manqué de donner des restes après l'extraction, on a augmenté tous les termes de leur progression, & leurs logarithmes aussi de plusieurs zeros, comme par exemple de 7, & la progression est devenuë par conséquent 1.0000000, 10.0000000, &c. & leurs logarithmes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, &c. en mettant un point devant ces zeros pour distinguer les logarithmes d'avec les zeros ajoutés,

& l'on a nommé *caractériſtique* le caractere qui ſe trouve devant ce point ; ainſi dans le logarithme 1.0000000 le caractere 1 ſe nomme le *caractériſtique*, &c. après cette préparation on a cherché le logarithme de 9, ou de 9.0000000 en prenant une moyenne proportionelle géométrique entre les deux termes 1 & 10 de la progreſſion géométrique augmentés de leurs zeros, & en même tems on a pris une moyenne arithmétique entre leurs logarithmes auſſi augmentés de leurs zeros, & cette moyenne arithmétique a été le logarithme de la moyenne géométrique, mais comme la moyenne géométrique s'eſt trouvée moindre que 9 ou 9.0000000, on a cherché une autre moyenne géométrique entr'elle & le terme 10 ou 10.0000000, & en même tems une moyenne arithmétique entre le logarithme de la premiere moyenne géométrique, & le logarithme de 10. ou 10.0000000 & comme cette ſeconde moyenne géométrique s'eſt trouvée encore au-deſſous de 9, ou 9.0000000, on a cherché une autre moyenne géométrique entr'elle & le nombre 10, & une autre moyenne arithmétique entre ſon logarithme & celui de 10, & lorſqu'en continuant de la même façon on a trouvé une moyenne géométrique entre 9 & 10, on en a pris une autre entre celle-ci & celle qui eſt plus proche de 9, juſqu'à ce qu'on ait trouvé une moyenne géométrique égale à 9, & ſon logarithme.

Le logarithme de 9 étant trouvé, celui de ſa racine 3 s'eſt trouvé aiſément de même que celui des puiſſances de 3 par les regles données ci-deſſus, mais il a fallu chercher de la même façon les logarithmes des autres nombres entre 1 & 10, & ceux des nombres entre 10 & 100, &c. ce qui certainement a été un travail très penible dont on doit avoir bien des obligations à l'égard de ceux qui ont eu le courage de l'entreprendre.

Tous les logarithmes des nombres 1. 2. 3. 4. 5, &c. étant trouvés, on a rangé ces nombres en colonnes les uns ſous les autres, & leurs logarithmes à côté, & c'eſt ce qu'on appelle la Table des logarithmes, laquelle s'étend depuis le logarithme de 1 juſqu'à celui de 10000 dans les Tables de M. Ozanam qui ſont les plus commodes, & par-là il eſt aiſé de connoître les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{10000}$, mais comme il y a des nombres au-delà de 10000, & qu'outre cela il y a des nombres entiers entre 1 & 10000 qui ſont compoſés d'entiers & de fractions, & dont les logarithmes ne ſont pas dans les tables, la queſtion eſt de trouver leurs logarithmes de même que

ceux des fractions dont le numérateur est plus grand que l'unité, & c'est ce que nous allons voir dans les problêmes suivans, où nous enseignerons aussi à trouver à quel nombre appartient un logarithme qui ne se trouve point dans les Tables.

349. *Trouver le logarithme du nombre 9477856.*

Ce nombre étant plus grand que 10000, j'en retranche quelques caracteres à gauche, jusqu'à ce que les restans se trouvent dans les Tables, & le moins qu'on peut en retrancher est le mieux, parce que les caracteres restans se trouvent plus près de la fin des Tables, ce qui fait que la méthode dont nous allons nous servir devient de la derniere exactitude, quoiqu'elle ne soit pas absolument géométrique. J'en retranche donc les trois derniers & les restans sont 9477 qui se trouvent dans les Tables; mais comme en retranchant 856 le reste est 9477000, c'est-à-dire 9477 multiplié par 1000, je prens dans la Table le logarithme 3.9766709 de 9477, & j'y ajoute le logarithme 3.0000000 de 1000, & la somme 6.9766709 est le logarithme du nombre 9477000, (*N.* 346.) or le nombre proposé 9477856 est plus grand que 9477000, & moindre que 9478000; car il ne surpasse 9477000 que de 856, au lieu que 9478000 le surpasse de 1000; c'est pourquoi je prens dans la table le logarithme 3.9767167 du nombre 9478, & lui ajoutant le logarithme 3.0000000 de 1000 la somme 6.9767167 est le logarithme de 9478000, ainsi les logarithmes des nombres 9477000, & 9478000, dont la différence est 1000 sont 6.9766709, & 6.9767167, & la différence de ces deux logarithmes est 458. Je dis donc si la différence 1000 des nombres 9477000, & 9478000 donne 458 pour la différence de leurs logarithmes, la différence 856 des nombres 9477000, & 9477856 que donnera-t-elle pour la différence de leur logarithme? & faisant la regle de Trois, je trouve 1000. 458 :: 856. 392, ainsi la différence cherchée est 392 avec un reste que je néglige, parce que les logarithmes étant fort grands leur dernier caractere à droite peut être plus grand ou moindre sans altérer aucunement leur valeur; bien plus on pourroit retrancher de tous les logarithmes deux caracteres à droite sans craindre qu'il y eut de l'erreur, ce que l'on concevra aisément si l'on se rappelle que chaque logarithme ayant été augmenté de sept zeros, on a fait la même chose que si on avoit réduit tous les logarithmes en fractions dont le dénominateur fût 10000000, & que par conséquent il est clair que les deux derniers caracteres à droite d'un logarithme

étant extrêmement petits, eu égard à ce dénominateur, peuvent être négligés.

Ayant donc trouvé que la différence des logarithmes des nombres 9477000, & 9477856 est 392, j'ajoute 392 au logarithme de 9477000, & la somme 6.9767101 est le logarithme du nombre proposé 9477856.

350. *Trouver le logarithme de la fraction* $\frac{2}{3}$.

La fraction $\frac{2}{3}$ est la même chose que le nombre 2 divisé par 3, c'est pourquoi je prens le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le logarithme 0.4771212 du nombre 3; je retranche ce dernier du premier, & le reste —0.1760912 est le logarithme de $\frac{2}{3}$ (*N.* 346.), & ce logarithme est négatif; car si d'une grandeur on retranche une autre grandeur plus grande qu'elle, le reste est négatif. Ces sortes de soustractions se font en retranchant la moindre quantité de la plus grande, & écrivant le reste avec le signe —.

351. PROBLEME. *Trouver le logarithme du nombre* $7\frac{1}{2}$.

Je réduis $7\frac{1}{2}$ en fraction, ce qui fait $\frac{15}{2}$; or cette fraction est la même chose que le nombre 15 divisé par 2, c'est pourquoi je prens le logarithme 1.1760913 du nombre 15, & le logarithme 0.3010306 du nombre 2, & retranchant celui-ci du premier, le reste 0.8750613 est le logarithme de la fraction $\frac{15}{2}$ (*N.* 346.)

Si après avoir réduit l'entier & fraction en fraction on trouvoit que le numerateur fut plus grand que 10000, on chercheroit le logarithme de ce numerateur comme il a été enseigné ci-dessus (*N.* 349.) & retranchant de ce logarithme le logarithme du numérateur, le reste seroit le logarithme du nombre proposé.

352. PROBLEME. *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

Je cherche ce logarithme dans les tables, & si je le trouve, le nombre écrit à son côté sera celui à qui il appartient.

Mais si le logarithme ne se trouve pas dans les tables comme par exemple le logarithme 3.0441367, je cherche dans les tables les logarithmes entre lesquels ce nombre se trouve, & ces logarithmes sont 3.0437551, & 3.0441476 dont le premier appartient au nombre 1106, & le second au nombre 1107 qui ne différent que de l'unité, & par conséquent le logarithme proposé doit appartenir à un nombre plus grand que 1106, & moindre que 1107, ce qui ne sçauroit être à moins que ce nombre ne soit composé d'entier & de fraction. Je prens la différence 3925

des logarithmes des deux nombres, & la différence 3816 du moindre de ces logarithmes au logarithme proposé 3.0441367. Je fais la différence 1 des deux nombres 1106, & 1107 égale à $\frac{100}{100}$, pour rendre plus juste l'opération que je vais faire, & je dis si la différence 3925 des logarithmes 3.0437551, & 3.0441476 donne $\frac{100}{100}$ pour la différence des nombres ausquels ils appartiennent, la différence 3916 des logarithmes 3.0441367, & 3.0437451, que donnera-t'elle pour la différence de leurs nombres & faisant la regle de Trois, je trouve 3925. $\frac{100}{100}$: 3916. $\frac{97}{100}$, & par conséquent $\frac{97}{100}$ est à fort peu de chose près la différence du nombre 1107 au nombre qui appartient au logarithme proposé. Ajoutant donc $\frac{97}{100}$ à 1107, la somme 1107 $\frac{97}{100}$ est le nombre auquel appartient le logarithme 3,0441367.

Si le logarithme proposé est 4.2507127, lequel est plus grand que le plus grand logarithme des Tables, j'en retranche le moindre logarithme qui puisse en être retranché pour faire en sorte que le reste se trouve dans les Tables près de la fin ; ainsi j'en retranche le logarithme 0.3010300 qui appartient au nombre 2, & le reste est 3.9496827, je cherche ce logarithme dans les Tables, & trouvant qu'il appartient au nombre 8906, je multiplie ce nombre par 2, & le produit 17812 est le nombre qui appartient au logarithme proposé 4.2507127 (*N.* 346.) car pour avoir ce logarithme il faut ajouter au logarithme 3.9496827 le logarithme de 2 que nous avons retranché du logarithme proposé.

Enfin soit le logarithme proposé 4.1712876, j'en retranche le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le reste est 3.8702576; or ce logarithme ne se trouve point dans les Tables, & je vois qu'il est entre les logarithmes 3.8702283, & 3.8702868 dont le premier appartient au nombre 7417, & le second au nombre 7418 dont la différence est 1 que je fais égale à $\frac{100}{100}$. La différence des logarithmes de ces deux nombres est 585, & la différence du moindre de ces logarithmes au logarithme 3.8702576 est 293. Je dis donc : si la différence 585 des logarithmes 3.8702283, & 3.8702868 donne $\frac{100}{100}$ pour la différence des nombres ausquels ils appartiennent, la différence 293 des logarithmes 38702283, & 38702576 que donnera-t'elle pour la différence de leurs nombres? & faisant la regle je trouve 585. $\frac{100}{100}$ :: 293. $\frac{50}{100}$, ainsi $\frac{50}{100}$ ou une moitié est la différence du nombre 7417 au nombre qui appartienr au logarithme 3.8702576, & par conséquent ce nombre est 7417 $\frac{1}{2}$, mais pour avoir le logarithme

proposé 41712876, il faut ajouter au logarithme 3.8702576 le logarithme de 2 que nous avons retranché au proposé, donc il faut multiplier le nombre 7417 $\frac{1}{2}$ par 2 (*N.* 346.) & le produit 14835 sera le nombre qui appartient au logarithme 41712876.

353. Je pourrois proposer ici plusieurs questions dont la solution feroit voir l'utilité des logarithmes, mais pour abreger je me contenterai de rapporter les deux suivantes.

354. PROBLEME. *Le premier & le second terme d'une progression géométrique, & le nombre des termes étant donnés, trouver le dernier terme.*

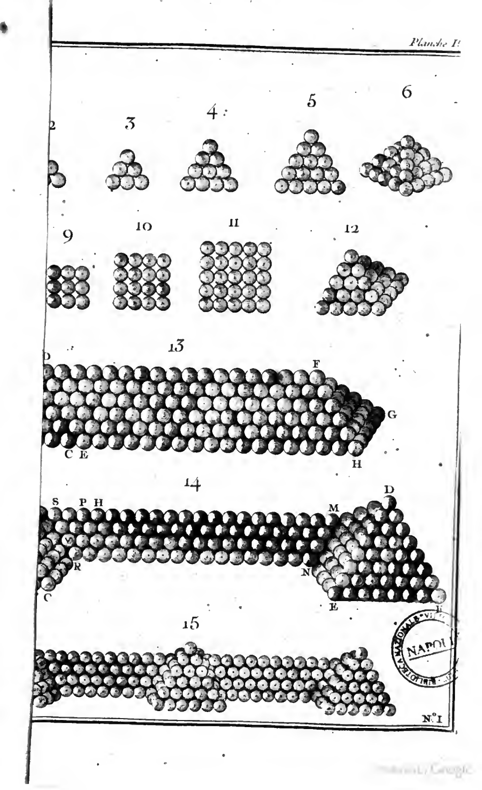
Soient les deux premiers termes 1 & 2, & le nombre des termes 14; l'exposant de la progression sera donc 2, & le nombre des termes diminué de l'unité est 13; or le dernier terme est égal au premier multiplié par l'exposant élevé à un dégré égal au nombre des termes moins un (*N.* 309.); donc le dernier terme est égal à 1 multiplié par la treiziéme puissance de 2; mais comme il feroit trop long de chercher la treiziéme puissance de 2; je prens le logarithme 0.3010300 de 2, & le multipliant par 13, le produit 3.9133900 est le logarithme de la treiziéme puissance de 2, or ce logarithme n'est pas dans les Tables, mais j'en trouve un qui est 3.9133899 qui ne differe que d'une unité, & qui par conséquent est le même; ainsi le nombre 8192 à qui ce logarithme appartient est la treiziéme puissance de 2, & cette puissance multipliée par le premier terme 1 donne le dernier terme cherché 8192.

355. PROBLEME. *Le premier terme, le second & le dernier d'une progression géométrique étant donnés, trouver le nombre des termes.*

Dans toute progression géométrique, le premier & le troisiéme terme sont entr'eux comme les quarrés des deux premiers, le premier & le quatriéme sont entr'eux comme les cubes des deux premiers, le premier & le cinquiéme sont entr'eux comme les quatriémes puissances des deux premiers, &c. (*N.* 327.) d'où il suit que le premier est au dernier comme le premier élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des termes moins un, est au second élevé à la même puissance. Cela posé.

Soient les deux premiers termes 1, 2, & le dernier 8192, je nomme le premier terme a, le second b, le dernier c, & le nombre des termes moins un x donc $a^x . b^x :: a . c$.

Je nomme la le logarithme de a, lb le logarithme de b, & lc le logarithme de c; donc le logarithme de a^x, c'est-à-dire le logarithme


2
3
4
5
6
9
10
11
12
13
D
F
G
C E
H
14
S P H
D
M
R
N
C
E
15
N.° I

logarithme de *a* élévé à la puissance *x* est *x la*; car quand on éleve une grandeur à une puissance, on multiplie son logarithme par l'exposant de cette puissance (*N.* 346.) par la même raison le logarithme de b^x est *x lb*; ainsi les logarithmes de la proportion géométrique $a^x . b^x :: a. c$, sont *xla. xlb. la. lc*, & ces quatre logarithmes sont en proportion arithmétique, puisque les grandeurs dont ils sont les logarithmes sont en proportion géométrique. Faisant donc la somme des extrêmes & la somme des moyens, j'ai $xla + lc = xlb + la$, & faisant passer *xla* du premier membre dans le second, & *la* du second dans le premier, j'ai $lc - la = xlb - xla$, & divisant tout par $lb - la$, je trouve $x = \frac{lc - la}{lb - la}$, ce qui me fait voir que le nombre des termes diminué de l'unité, est égale à la différence du logarithme du dernier au logarithme du premier, divisée par la différence du logarithme du second terme au logarithme du premier.

Je prens donc le logarithme du dernier terme 8192', lequel est 3.9133899, ou 3.9133900, ce qui n'altere point ce logarithme comme on a vû dans le problême précédent, & en retranchant le logarithme du premier terme qui n'est composé que de zeros, le reste est encore 3.9133900. Je prens de même le logarithme 0.3010300 du second terme 2, duquel retranchant le logarithme du premier, le reste est encore 0.3010300; je divise 3.9133900 par 0.3010300, & le quotient 13 me fait voir que le nombre des termes moins un est 13, & que par conséquent la progression est composée de 14 termes.

356. Ce seroit ici le lieu de parler des fractions décimales; mais comme nous n'avons point parlé des toises quarrées & cubiques ausquelles on applique quelquefois ce calcul, nous ne traiterons cette matiere que lorsque nous expliquerons le toisé.



ELEMENS

DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND,

Qui contient les Elémens de la Géométrie Théorique & Pratique des Lignes, des Surfaces & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections Coniques, du Toisé de la Maçonnerie & des bois, & du Calcul des Fractions décimales.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1. LA *matiere* ou le *corps*, est ce qui a de parties unies les unes aux autres; tout ce que nous voyons des yeux corporels, est de cette nature.

2. Le *point* est une portion de matiere si petite, qu'on peut la considerer comme n'ayant point de parties, ou comme *indivisible*.

3. La *ligne* ou *longueur*, eſt la trace que laiſſeroit un point A (*Fig.* 1.) qui iroit d'un lieu A à un autre lieu B; ou ſi l'on veut, c'eſt une ſuite de points rangés ſur cette trace. Les lieux A, B ſe nomment les *extrémités* de la ligne.

4. La ligne étant compoſée de parties peut être diviſée tranſverſalement en autant de parties AC, CD, BD que l'on voudra; (*Fig.* 1.) mais à cauſe que les points qui la compoſent ſont regardés comme indiviſibles, nous devons conſiderer la ligne comme ne pouvant être diviſée ou fenduë de l'extrémité A à l'extrémité B, ainſi que l'on fend un bâton d'un bout à l'autre, & par conſéquent toute ligne AB ne doit point être dite longue que d'une extrémité à l'autre, & nullement de droite à gauche.

5. La *ligne droite* eſt le plus court chemin que prendroit un poit A (*Fig.* 1.) en allant d'un lieu A à un autre lieu B; la ligne *courbe* eſt celle qui n'eſt pas le plus court chemin entre ſes extrémités A, B (*Fig.* 2.)

6. Par le mot de *plus court chemin*, on entend le chemin que prendroit un homme qui étant en A (*Fig.* 1.) & fixant toujours la vuë vers B, iroit devant lui ſans ſe détourner ni à gauche ni à droite juſqu'à ce qu'il fût arrivé en B.

7. Or, de cette idée du plus court chemin, il s'enſuit clairement qu'il ne ſçauroit y avoir deux plus courts chemins entre deux extrémités A, B. Car un homme qui va de A en B, en fixant toujours ſa vuë ſans ſe détourner ni à gauche ni à droite, ne ſçauroit prendre deux routes différentes, quand il recommenceroit cent fois le voyage de la même façon.

8. *Prolonger* une ligne droite, c'eſt la continuer de façon que ſa continuation ou ſon prolongement, ajoûté à la ligne droite, ne faſſe qu'une ſeule ligne droite.

9. La *diſtance* d'une grandeur matérielle ou corporelle, à une autre grandeur matérielle, eſt le plus court chemin qui ſe trouve entre ces deux grandeurs. Ainſi la diſtance entre les deux points A, B (*Fig.* 1.) eſt la ligne droite AB menée entre ces deux points, &c.

10. La *ſurface* eſt la trace d'une ligne AB (*Fig.* 3.) qui iroit d'une poſition AB à une autre poſition CD, ſoit que cette ligne AB pendant ſon mouvement, ſoit toujours de même grandeur, (*Fig.* 3.) ou qu'elle aille en diminuant, (*Fig.* 4.) ou qu'elle aille en augmentant, (*Fig.* 5.) ou tantôt en augmentant & tantôt en diminuant, (*Fig.* 6.) on peut dire que la ſurface eſt une ſuite de

lignes mises sur la trace de la ligne AB, qui iroit de la position BA à la positon CD.

11. La surface a deux longueurs, l'une selon la ligne AB, & l'autre selon l'éloignement de la ligne AB à la ligne DC; mais parce que toutes les lignes qui comprenent la surface, sont regardées comme ne pouvant se diviser ou se fendre d'un bout à l'autre, (*N.* 4.) il est visible qu'une surface ABDC doit être regardée comme ne pouvant se fendre d'une extrémité AB à l'autre extrémité CD, ainsi qu'on fendroit une planche ABDC qui auroit de l'épaisseur : donc la surface ne doit point être dite avoir de la longueur dans ce sens; c'est-à-dire de l'épaisseur, comme on dit ordinairement à l'égard d'une planche.

12. Des deux longueurs de la surface, l'une garde le nom de *longueur*, & l'autre se nomme *largeur*. Supposé donc que les deux lignes AB, AC (*Fig.* 3.) soient les deux longueurs de la surface ABDC, & qu'on nomme *longueur* la ligne AB, la *largeur* sera la ligne AC; que si l'on nomme *longueur* la ligne AC; car cela est indifférent, la ligne AB sera la longueur. Quelquefois la longueur se nomme *base*, & la largeur se nomme *hauteur*.

13. La surface *plane*, est celle dont toutes les parties ne haussent ni ne baissent pas plus les unes que les autres; telle est la surface d'un miroir ordinaire, celle d'une table bien unie, &c. & la surface *courbe* est celle dont toutes les parties ne sont pas disposées comme il vient d'être dit; telle est la surface d'une colonne, d'un pain de sucre, &c.

14. Le *corps* ou solide, est la trace d'une surface ABCD (*Fig.* 7.) qui iroit d'une position ou d'un lieu ABCD, à une autre position ou un lieu EFGH; soit que cette surface ABCD, pendant son mouvement, soit toujours de la même grandeur, (*Fig.* 7.) ou qu'elle aille en diminuant, (*Fig.* 8.) ou qu'elle aille en augmentant, (*Fig.* 9.) ou tantôt en diminuant & tantôt en augmentant. (*Fig.* 10.) On peut dire que le corps est une suite de surfaces mises les unes sur les autres, à peu près comme les feuillets d'un Livre, sur la trace de la surface ABCD qui iroit de la position ABCD à la position EFGH.

15. Le corps a donc trois longueurs, à sçavoir les deux longueurs de la surface ABCD, & celle de l'éloignement de la partie ABCD à la position EFGH.

16. Des trois longueurs du corps, l'une conserve le nom de *longueur*, l'autre se nomme *largeur*, & la troisiéme se nomme

profondeur, & il eſt indifférent de prendre laquelle on voudra pour la longueur, ou pour la largeur, ou pour la profondeur; quelquefois on nomme *baſe*, la ſurface qui a deux de ces longueurs, & la troiſiéme longueur ſe nomme alors hauteur. Par exemple, ſi l'on nomme la ſurface ABCD, *baſe* du ſolide, la ligne qui marquera la diſtance de cette baſe ABCD à l'autre poſition EFGH, ſe nomme la *hauteur*. Nous enſeignerons dans la ſuite comment on doit trouver la ligne droite qui marque la diſtance entre deux lignes, entre deux ſurfaces, entre deux corps, &c.

17. La longueur, largeur & profondeur, ſe nomme les *trois dimenſions* des corps ou des ſolides.

18. Quoique les trois dimenſions du corps ſoient réellement inſéparables, qu'il n'y ait point de lignes ſans largeur & profondeur, ni de ſurfaces ſans profondeur; cependant on peut conſiderer l'une de ces dimenſions ſans faire attention aux autres. Par exemple; je puis conſiderer la longueur d'un chemin, la couper en pluſieurs parties, lui faire prendre des détours, &c. ſans m'embarraſſer de ſa largeur, & il n'en ſera pas moins vrai que cette longueur ſera double de ſa moité, triple de ſon tiers, &c. qu'elle ſera devenuë courbe de droite qu'elle étoit, &c. de même que je puis conſiderer la ſurface d'une place, la couper en pluſieurs parties, lui faire changer de figure, &c. ſans penſer le moins du monde à ſa profondeur; ce qui n'empêchera pas de conclurre que cette ſurface ſera devenuë longue, de quarrée qu'elle étoit, &c. ainſi l'on auroit tort de ne vouloir pas admettre ces ſortes de ſuppoſitions ou plûtôt d'abſtractions, puiſqu'on en tire des conſéquences qui ſont autant de vérités inconteſtables, dont l'utilité n'eſt pas à mépriſer.

19. La *Géométrie* eſt la Science qui apprend à connoître les propriétés des corps, ſelon leurs trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur. On la diviſe en *Géométrie ſimple* & en *Géométrie compoſée*.

20. Il ne ſçauroit y avoir de lignes droites plus droites les unes que les autres, puiſqu'elles prennent toutes le plus court chemin entre leurs extrémités; mais on peut trouver une infinité de lignes courbes de différente eſpece, ſelon qu'elles prendront des chemins plus longs ou plus courts entre leurs extrémités, & dont les parties ſeront diſpoſées entr'elles de différentes manieres. Or, la Géométrie ſimple ne conſidere entre toutes ces

lignes courbes, que la ſeule ligne circulaire, & par conſéquent elle ſe borne à la conſidération des ſurfaces terminées par des lignes droites & circulaires, & à celles des corps ou ſolides dont les ſurfaces ſont compoſées de ſurfaces planes, ou de ſurfaces qui ſont une ſuite de lignes circulaires. Au contraire la Géométrie compoſée, s'étend à toutes les lignes courbes de quelque eſpece qu'elles ſoient, aux ſurfaces bornées par ces ſortes de lignes, & aux ſolides dont les ſurfaces ont quelqu'unes de ces lignes pour une de leur dimenſions. Il faudroit des Volumes ſans fin, pour traiter à fond la Géométrie compoſée, à cauſe du nombre infini de courbes qu'on peut imaginer; c'eſt pourquoi, quand nous aurons vû les Elémens de la Géométrie ſimple, je me bornerai à parler des trois courbes des ſections coniques, qui ſont celles dont l'uſage eſt le plus fréquent & le plus néceſſaire.

21. Le *cercle* eſt un eſpace plan ABCD (*Fig.* 11.) terminé par une ligne courbe ABCD, dont tous les points ſont également éloignés d'un point O pris dans cet eſpace. Le point O ſe nomme centre du cercle, la courbe ABCD ſe nomme *circonférence*, & toutes les lignes droites AO, BO, &c. menées du centre aux points de la circonférence, ſe nomment rayons; ainſi tous les rayons d'un cercle ſont égaux; car ces rayons étant des lignes droites, meſurent les diſtances des points de la circonférence au centre, & ces diſtances ſont égales par la définition du cercle.

22. Toute ligne droite qui paſſe par le centre O d'un cercle, & qui ſe termine de part & d'autre à la circonférence, ſe nomme *diamétre*, & ce diamétre eſt toujours double du rayon, car il eſt compoſé de deux rayons AO, OC.

23. Tout diamétre AC (*Fig.* 12.) diviſe le cercle en deux parties égales, & la circonférence auſſi: concevons que le plan du cercle ABCD ſoit fendu le long de la ligne AC, qu'il y ait une charniere en A & une autre en C, & qu'on face tourner autour de ces charnieres la partie ABC du plan du cercle, juſqu'à ce qu'elle vienne tomber ſur l'autre partie ADC de ce plan; les points A, C de la droite AC ne bougeant point de leur place, tous les autres points de la ligne AC ne bougeront pas non plus; car autrement la ligne AC ceſſeroit d'être doite entre ſes extrémités; ainſi le centre O reſtera où il eſt: Or, ſi le plan ABC tombant ſur le plan ADC ne lui étoit parfaitement égal, la

partie de circonférence ABC ne tomberoit pas non plus sur l'autre partie de circonférence ADC, ainsi elle tomberoit, ou toute entiere entre le diamétre AC & la partie de circonférence ADC, ou toute entiere en dehors de ADC, ou partie en dedans & partie en dehors. Si elle tomboit en dedans comme ARC, le rayon OD mené du centre O à un point D de la portion de circonférence ADC couperoit auparavant la portion de circonférence ARC en un point R, & par conséquent le rayon OR seroit plus petit que le Rayon OD, c'est-à-dire on pourroit mener dans un cercle deux rayons inégaux; ce qui est contre la nature du cercle. De même si ABC tomboit en dehors comme en ASC, le rayon OS mené à la portion de circonférence ASC couperoit auparavant ADC en un point D, & l'on auroit encore dans un même cercle deux rayons inégaux OD, OS; enfin si ABC en tombant sur ADC avoit une partie AMD en dedans de ADC (*Fig.* 13.) & une partie DSC en dehors, le rayon OM mené sur la partie intérieure AMD ne pourroit couper la partie de circonférence ADC, à moins qu'on ne le prolongeât en R, & par conséquent OM seroit plus court que OR; & le rayon OS mené sur la partie extérieure DSC couperoit auparavant ADC en N & OS seroit plus grand que ON; ainsi nous aurions encore des rayons inégaux OM, OR, OS, dans un même cercle; ce qui est impossible. Donc, il faut absolument que la portion ABC de circonférence, tombe sur l'autre portion ADC, & lui soit égale, & que par conséquent le cercle & la circonférence soient coupés chacun en deux, également.

24. Si une ligne droite AO (*Fig.* 11.) qui est en dedans un plan, tourne sur ce plan autour de son extrémité O, qui ne change jamais de place, son autre extrémité A décrira une circonférence de cercle, ABCD dont le centre sera le point O; de même si l'on prend avec le compas la grandeur AO de la ligne AO, & qu'ayant fixé l'une de ses pointes en O, on fasse tourner l'autre A autour de ce point, en tenant toujours le compas élevé à plomb sur le plan, la pointe A décrira la même circonférence ABCD. Toute partie AB ou AD, &c. d'une circonférence se nomme *Arc.*

25. *Si l'on suppose qu'un rayon de cercle* DO (Fig. 11.) *tourne autour de son centre* O *d'un mouvement toujours égal, les arcs de cercle* DA, AB, *&c. que son extrémité* D *décrira dans des tems égaux, seront égaux.* Supposons que le Rayon DO ait passé

dans une minute de la position DO, à la position AO, & que dans une autre minute il passe de la position AO à la position BO; il est clair qu'il fait le même chemin dans cette seconde minute, que si à la fin de la premiere on l'avoit remis dans sa premiere position DO, & qu'il eût continué à se mouvoir pendant la seconde minute: or, en ce cas, son extrémité D auroit décrit dans la seconde minute le même arc DA qu'elle auroit décrit dans la premiere, à cause de son mouvement égal. Donc l'arc AB qu'il a décrit en passant de la position AO, à la position BO dans la seconde minute, avec le même mouvement, doit être aussi égal à l'arc DO.

26. Les Géometres divisent la circonférence du cercle en 360 parties égales ou petits arcs égaux, qu'ils nomment degrés; chaque degré se divise en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*; chaque minute en 60 parties égales nommées *secondes*; chaque seconde en 60 parties égales nommées *tierces*; & ainsi de suite.

27. *Si une ligne* AO (Fig. 14.) *tourne autour de son extrémité* O, *comme autour d'un centre, toutes les circonférences que ses points* A, B, C, *&c. décriront, seront décrites dans un même tems, de même que leur moitiés, leur tiers, leur quarts*, &c. 1°. La ligne AO en tournant autour du point O ne peut pas revenir à la premiere position AO que tous ses points ABC &c. ne reviennent en même tems à leurs positions; car autrement cette ligne cesseroit d'être droite : or, quand ces points sont revenus à leur premiere position, leur circonférence sont décrites; donc les circonférences sont toutes décrites dans un même tems. 2°. Supposons que la ligne AO ait passé de la position AO à la position EO, & que l'arc AE décrit par le point A, soit, par exemple, la cinquiéme partie de sa circonférence; donc le point A dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à décrire l'arc AE, décrira la circonférence entiere; or, le point B aura décrit l'arc BH dans le même tems que le point A aura décrit l'arc AE; ainsi si cet arc BH étoit moindre que la cinquiéme partie de sa cironférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à parcourir l'arc BH, décriroit cinq parties égales de sa circonférence, moindres chacune que la cinquiéme partie; donc il ne décriroit pas les cinq cinquiémes de sa circonférence, c'est-à-dire sa circonférence entiére; ce qui est impossible, puisqu'il faut qu'il décrive sa circonférence dans le même tems que le point A décrit la sienne.

sienne. De même si l'arc BH étoit plus grand que la cinquiéme partie de sa circonférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé a décrire cet arc, décriroit cinq parties égales de sa circonférence plus grande chacune que la cinquiéme; donc il décriroit plus de cinq cinquiémes, c'est-à-dire plus que sa circonférence; ce qui est encore impossible par la même raison : donc, &c.

Et delà, il suit que les arcs CR, BH, &c. décrits par tous les points de la ligne AO entre une de ses positions AO & une autre position EO valent tous un même nombre de degrés de leurs circonférences; car si l'arc AE vaut, par exemple, la sixiéme partie de sa circonférence, tous les autres arcs CR, BH, &c. vaudront aussi la sixiéme partie de leur circonférence; or, ces circonférences sont divisées chacune en 360 degrés; donc tous les arcs vaudront la sixiéme partie de 360 degrés, & par conséquent ils vaudront un même nombre de degrés de leurs circonférences

28. Les axiomes ou les principes sur lesquels la Géométrie fonde tous ses raisonnemens, sont les suivans, 1°. *Il est impossible qu'une chose soit & ne soit pas dans un même tems.* 2°. *Les parties d'un tout, prises ensemble, sont égales au tout.* 3°. *Si deux grandeurs sont égales à une troisieme elles sont égales entre elles.* 4°. *Si à deux grandeurs égales on ajoûte ou on retranche des grandeurs égales, les sommes ou les restes seront égaux, & si on leur ajoûte ou retranche des grandeurs inégales, les sommes ou les restes seront inégaux.* 5°. *Si on multiplie ou si l'on divise des grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotients seront égaux, & si on les multiplie ou divise par des grandeurs inégales, les produits ou les quotiens seront inégaux.* 6°. *Si deux grandeurs étant mises l'une sur l'autre, conviennent parfaitement, en sorte que les parties de l'une n'excedent pas les parties de l'autre, ces deux grandeurs sont parfaitement égales.* Il n'est pas étonnant qu'une science qui n'employe que des principes aussi clairs & évidens que ceux-ci, en tirent des conséquences d'une parfaite certitude; mais ce qu'il y a d'admirable, c'est qu'avec la seule simplicité de ces principes, elle puisse élever l'esprit à de si belles & profondes connoissances.

29. Lorsqu'on prouve l'égalité de deux grandeurs en les mettant l'une sur l'autre; cela s'appelle *démontrer par la Superposition.* Quelques Auteurs ont prétendu que cette façon de démontrer

n'étoit pas assez géométrique; mais il est aisé de faire voir qu'ils ont eu tort de penser ainsi; en effet, si la Géométrie est la science qui démontre les vérités par les voyes les plus simples & les plus courtes; je n'en vois point de plus convenables à cette fin, pour faire voir que deux grandeurs sont égales, que de montrer qu'elles conviennent parfaitement lorsqu'on les met l'une sur l'autre. Aussi ceux qui ont eu ce scrupule, ont-ils été obligés d'user de détours longs & ennuyans pour prouver des vérités qui sautent aux yeux.

30. On ne doit point trouver à redire que j'employe quelque fois le cercle à l'égard des lignes droites, ni me reprocher qu'en agissant ainsi, je n'observe pas l'ordre naturel des matiéres. Je n'use du cercle en parlant des lignes droites, que comme d'un instrument dont on ne peut se passer dant la plûpart des Problêmes qui concernent les lignes droites, & dont il faut connoître du moins la formation pour s'en servir avec connoissance de cause; mais ce même cercle considéré comme une figure géométrique qui renferme grands nombre de belles propriétés utiles à la Géométrie, est traité dans un Chapitre à part selon l'ordre des matiéres.

31. Avertissement. Pour abréger le discours, je supposerai toujours dans les Chapitres suivans, que les différentes lignes que je comparerai entr'elles, ou que je menerai dans les figures, sont dans un même Plan, c'est-à-dire une même surface plane, à moins que je n'avertisse expressément du contraire; & l'on fera bien de faire attention à ceci; car autrement la plûpart des propositions & des démonstrations seroient absolument fausses.

CHAPITRE II.

Des lignes droites, des Angles qu'elles forment, des lignes perpendiculaires & des lignes paralleles.

32. Proposition Ire. *Entre deux points* A, B (Fig. 1.) *on ne peut mener qu'une seule ligne droite.*

La ligne AB est le plus court chemin entre ses extrémités A, B; or, il ne sauroit y avoir deux chemins plus courts entre deux points. (*N.* 7.) Donc on ne sauroit mener plus d'une ligne

de A à B; c'est-à-dire que si après avoir mené AB, on veut en mener une autre, cette seconde tombera sur la premiere, & n'en sera pas différente.

33. COROLLAIRE Ier. *Toutes les parties* AC, CD, &c. *d'une ligne droite* AB (Fig. 1.) *sont aussi des lignes droites, & sont entre elles en ligne droite.*

La ligne AB est droite par la supposition; donc le point A, a décrit cette ligne en allant de A en B, toujours devant lui, sans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche; (*N. 6.*) donc aussi en allant de A en C, il ne s'est point écarté ni à gauche ni à droite, & le chemin AC qu'il a pris est une ligne droite, & on prouvera la même chose des autres parties CD, &c. de la ligne AB; par la même raison, le chemin que le point A, a pris de A en D est une ligne droite; mais AD est composée des deux parties AC, CD; donc ces deux parties AC, CD sont en ligne droite, & ainsi des autres.

34. COROLLAIRE II. *Si deux lignes droites* AB, DE (Fig. 1.) *ont deux points communs* D, B; *c'est-à-dire si ces deux points appartiennent également aux deux lignes, ces deux lignes* AB, DE *ne sont ensemble qu'une seule ligne droite* AE.

Concevons que le point A mis en A ait décrit la droite AB, & que ce même point mis en D ait décrit la droite DE; ce point A aura décrit les parties AD, BD de la droite AB, en allant toujours devant lui sans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche; car ces deux parties sont en ligne droite. (*N. 33.*) Par la même raison le point A aura aussi décrit les parties DB, BE de la droite DE, en allant toujours devant lui sans s'écarter ni à gauche ni à droite; donc le point A aura décrit les trois lignes AD, BD, BE sans s'écarter ni à gauche ni à droite, & partant la ligne AE composée de ces trois lignes, sera droite; or, la ligne AE est la même que les deux droites AB, DE qui ont la partie commune DB; donc ces deux lignes sont en ligne droite.

35. COROLLAIRE III. *Donc si deux lignes droites se coupent elles ne se coupent qu'en un point*; si elles se coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & ne formeroient qu'une seule ligne droite, & par conséquent elles ne se couperoient pas.

36. PROBLEME. *Entre deux points donnés* A, B (Fig. 1.) *mener une ligne droite & la prolonger tant qu'on voudra.*

Je prens un fil délié que je noircis avec du charbon; je tens

ce fil avec les mains, autant qu'il se peut, sans le casser, & dans cet état, je le couche sur le Plan où sont les points donnés A, B, de façon que ce fil passe par ces deux points; la trace noire qu'il laisse sur le Plan entre A & B, est la droite demandée; car ce fil ne pouvant être plus tendu qu'il n'est, prend le plus court chemin entre A & B.

Je prens sur la trace AB un point D entre A & B, & tenant mon fil aussi tendu qu'auparavant, je le fais passer par les points D, B, ensorte que la trace qu'il laisse, s'étende au-delà de B, comme de B en E, & la partie BE de cette trace, est le prolongement de la ligne AB du côté de B; car la trace DE & la trace AB sont deux lignes droites qui ont deux points communs D, B, & par conséquent elles ne forment qu'une seule ligne droite, (*N.* 34.) & on prolongera de la même façon, la ligne AB, tant qu'on voudra de part & d'autre.

Ceci suppose que le Plan sur lequel sont les deux points A, B soutienne le fil dans toutes ses parties, ainsi que feroit un Plan qui seroit horizontal; mais si ce Plan étoit élevé au-dessus de l'horizon comme un mur, alors le fil n'étant pas soutenu partout, la pesanteur de ses parties lui feroit décrire une ligne courbe : or, en ce cas, il faudroit se servir de l'instrument nommé *Régle*.

Pour construire cet instrument, on prend une planche bien unie, qui n'ait pas beaucoup d'épaisseur, ou une lame de cuivre, d'argent, &c. on trace sur cette planche ou sur cette lame, une ligne droite, après quoi on la coupe le long de cette ligne, & l'instrument est fait.

Pour mener donc une ligne droite entre deux points A, B, (*Fig.* 15.) on pose la régle RS sur le Plan où sont les points donnés A, B de façon que ces deux points touchent le côté RS qui a été fait en ligne droite; puis mettant le crayon ou la plume sur l'un des points A, on mene le crayon ou cette plume de A vers B en suivant toujours la droite RS, & par ce moyen la ligne AB qu'on trace sur le Plan, est une ligne droite, puisqu'elle suit la droite RS sans s'écarter ni à droite ni à gauche.

Pour sçavoir si une régle est bien faite, on trace sur un Plan une droite AB, par le moyen d'un fil, puis on met sur le Plan la régle RS, & l'on examine si son côté RS s'ajuste à la droite AB sans s'écarter ni d'un côté ni d'autre; & si cela est, la regle est juste.

37. COROLLAIRE. *Deux points* A, B (Fig. 1.) *d'une ligne droite étant donnés, la position ou la direction de cette ligne est facile à reconnoître ;* il n'y a qu'à mener une ligne droite entre ces deux points, & ce sera certainement la ligne droite à qui ces deux points appartiennent, puisqu'il n'est pas possible de mener quelqu'autre ligne droite entre ces deux points (*N.* 32.)

38. PROPOSITION. II. *Si des extrémités* A, B, *d'une droite* AB (Fig. 16.) *on mene deux droites* AC, BC *qui se coupent en* C, *& deux autres droites* AE, BE *qui se coupent en* E, *en dedans des deux autres, les deux premieres* AC, BC *prises ensemble, sont plus grandes que les deux autres* AE, BE *prises ensemble.*

Il paroît naturel de dire que les deux AC BC prenant un plus grand détour que les deux AE, BE doivent être aussi plus grandes; mais comme bien des gens n'admettroient pas ceci pour une démonstration géométrique ; voici comme on le prouvera.

Je prolonge l'une des intérieures BE jusqu'à ce qu'elle coupe l'extérieure opposée AC en H ; la ligne AE étant droite entre ses extrémités A, E, est plus courte que les deux AH, EH qui partent des mêmes extrémités A, E & qui ne prennent pas le même chemin ; ainsi j'ai $AE < AH + EH$; de même la ligne BH ou $BE + EH$ étant droite entre ses extrémités B, H est plus courte que les deux ensemble BC, CH, & partant $BE + EH < BC + CH$; ajoûtant donc ensemble la plus courte AE avec la plus courte $BE + EH$, & la plus longue $AH + EH$ avec la plus longue $BC + CH$, j'aurai $AE + BE + EH < AH + EH + BC + CH$; retranchant de part & d'autre la droite EH, j'aurai $AE + BE < AH + CH + BC$; mais $AH + HC = AC$; donc $AE + BE < AC + BC$.

39. PROPOSITION III. *Si une droite* AB (Fig. 17.) *coupe une autre droite* CD *en un point* B, *cette droite* AB, *étant prolongée du côté de* B *passera de l'autre côté de la droite* CD.

Du point B pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas prise à discrétion, une circonférence de cercle ADEC ; la droite CD qui passe par le centre B & qui coupe la circonférence aux points C, D est donc un diametre, & les deux arcs CAD, CED valent chacun la moitié de la circonférence ; (*N.* 22. 23.) de même la ligne AB étant rayon du cercle, si on la prolonge, elle deviendra diametre, & coupera la circonférence en deux parties égales. Or, les parties CA, AD de la

demi circonférence CAD, sont moindres chacune que la demi circonférence; donc les demi circonférences ACE, ADE que la ligne AB prolongée, coupera, seront plus grande chacune que les deux parties AC, AD & par conséquent le point E ou les deux demi circonférences se joindront, & par lequel la ligne AB prolongée doit passer, sera au-delà ligne CD par rapport à la ligne AB.

40. *Definition.* Si deux lignes AB, CB (*Fig.* 18.) qui n'ont pas la même direction, c'est-à-dire qui ne font pas en ligne droite, se coupent en un point B; l'espace indéfini ABC compris entre ces lignes, se nomme *Angle*. Le point B où les lignes se coupent, se nomme *sommet* de l'angle, & les deux lignes AB, CB sont les *côtés* ou les jambes de l'angle. Il est clair qu'un angle ABD est plus ou moins grand, selon que les côtés AB, CB sont plus ou moins écartés l'un de l'autre, ou ce qui revient au même, selon que la ligne AB est moins ou plus inclinée sur la ligne CB.

41. On désigne un angle par les trois lettres A, B, C mises aux extrémités de ses côtés & au sommet, en observant d'écrire la lettre A du sommet entre les deux autres; ainsi pour exprimer l'angle formé par les droites AB, CB, on dit l'angle ABC.

42. Probleme. *Mesurer les Angles, c'est-à-dire trouver le rapport qu'ils ont entr'eux.*

Soient les angles BAC, DAB (*Fig.* 19.) qui ont leurs sommets au même point A; du point A pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas prise à discretion, une circonférence de cercle CBDC que je divise en ses 360 degrés, & si par exemple l'arc CB compris entre les côtés de l'angle BAC vaut 30 degrés, & que l'arc DB compris entre les côtés de l'angle DAB en vaille 60. Je dis que les deux angles BAC, DAB sont entre eux, de même que 30 est à 60, ou comme 1 à 2, & ainsi desautres, en observant que le sommet de l'angle soit toujours au centre du cercle.

Dans l'usage ordinaire, on dit que l'arc CB de 30 degrés est la mesure de l'angle CAB, & que l'arc BD de 60 degrés est la mesure de l'angle DAB; ce que l'on doit entendre dans le sens que je viens d'expliquer.

Pour rendre raison de cette pratique, concevons que le côté CA prolongé indéfiniment du côté de C, tourne sur son extré-

mité A, & tombe successivement sur les côtés BA, DA; tous les points de CA décriront entre les côtés CA, BA de l'angle BAC des arcs NQ, MS &c. infiniment proches, & qui couvriront totalement l'espace BAC, lequel par conséquent sera la même chose que la somme de ces arcs : or, comme on suppose que l'arc CB vaut 30 degrés ou la douziéme partie de sa circonférence, tous les autres arcs NQ, MS, &c. vaudront aussi 30 degrés, ou la douziéme partie de leurs circonférences; (*N.* 27.) ainsi la somme des arcs, ou l'angle BAC vaudra la douziéme partie de la somme des circonférences; de même comme ou suppose que l'arc BD compris entre les côtés BA, DC de l'angle DAC vaut 60 degrés, tous les arcs décrits par les points de la ligne CA entre les côtés BA, DA vaudront aussi 60 degrés, c'est-à-dire la sixiéme partie de leurs circonférences; ainsi l'angle DAB égal à la somme de tous ces arcs, vaudra la sixiéme partie de la somme des circonférences; or, nous venons de voir que l'angle BAC vaut la douziéme partie de cette somme des circonférences; donc l'angle BAC est à l'angle BAD, comme $\frac{1}{12}$ est à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{1}{12}$ est à $\frac{2}{12}$, c'est-à-dire comme 1 est à 2, & par conséquent comme l'arc CB de 30 degrés, est à l'arc DB de 60 degrés.

43. *Remarque.* La mesure d'un ou plusieurs angles n'est donc pas comme on pourroit penser la mesure de leur grandeur; mais c'est la mesure du rapport de leur grandeur, ou si l'on veut, la mesure de l'inclination de leurs côtés; car il est visible que plus l'arc compris entre les côtés d'un angle, sera petit, plus ces côtés seront proches l'un de l'autre, & que par conséquent ils seront plus inclinés l'un sur l'autre, & qu'au contraire plus l'arc compris sera grand, moins les côtés seront inclinés.

Et il faut remarquer que le plus ou le moins de longueur des jambes des angles ne change rien dans leur valeur, non plus que le plus ou le moins de grandeur de la circonférence, dont les arcs doivent mesurer le rapport de ces angles; car, 1°. Les angles étant des espaces indéfinis du côté opposé à leurs sommets, le plus ou le moins de longueur de leurs côtés ne les détourne point, & l'on doit regarder ces côtés comme prolongés à l'infini, 2°. Tous les arcs grands ou petits compris entre les jambes d'un angle, valent un même nombre de degrés de leur circonférences; ainsi les arcs BC, MS compris entre les jambes de l'angle BAC valent également 30 degrés, & les arcs DB,

VS compris entre les jambes de l'angle DAB valent également 60 degrés ; donc, soit que je me serve des arcs CB, BD de la circonférence CDBC ou des arcs MS, SV de la circonférence MSVM ; je trouverai toujours que les deux angles BAC, DAB sont entre'ux comme 30 degrés à 60 degrés.

44. *Definition.* Tout angle DAM (*Fig.* 20.) qui embrasse le quart DM de la circonférence, se nomme *Angle droit* ; tout angle BAC qui embrasse un arc BC moindre que le quart de la circonférence, se nomme *Angle aigu*, & tout angle MAB qui embrasse un arc MB plus grand que le quart de la circonférence, se nomme *Angle obtus.*

45. Tous les angles droits sont égaux, car ils embrassent tous le quart de la circonférence ou 90 degrés ; mais tous les aigus ne sont pas égaux non plus que tous les obtus ; car il peut y avoir des angles aigus qui embrassent plus ou moins de degrés au dessous de 90, & des angles obtus qui en embrassent plus ou moins au dessus de 90.

46. Probleme. *A l'extrémité* D *d'une ligne droite donnée* DE (Fig. 21) *faire un angle égal à un angle donné* ABC.

Du point B pris pour centre & d'une ouverture de compas prise à discrétion, je décris une circonférence CAHC. Je conserve la même ouverture de compas, & portant l'une des pointes en D, je décris avec l'autre une circonférence de cercle EMNE ; je prens avec le compas la grandeur CA de l'arc CA compris entre les côtés de l'angle ABC, & je porte cette grandeur de E en M sur la circonférence EMNE ; du point M je mene au point D la droite MD, & l'angle MDE est égal à l'angle donné ABC.

Car par la construction, le rayon DE de la circonférence EMNE est égal au rayon BC de la circonférence CAHC, c'est pourquoi mettant le rayon DE sur le rayon BC, ensorte qu'ils s'ajustent parfaitement, la circonférence EMNE s'ajustera parfaitement sur la circonférence CAHC, & l'arc EM sur son égal CA ; donc la droite MD tombera sur la droite AB, puisque les extrémités M, D de la droite MD tomberont sur les extrémités A, B de la droite AB, & qu'entre deux points on ne peut mener qu'une seule ligne droite ; ainsi l'angle MDE tombera sur l'angle ABC & lui sera égal.

47. Proposition IV. *Si deux angles* ABC *abc* (Fig. 22.) *sont égaux & que les jambes* AB, CB *de l'un, soient égales aux jambes* ab, cb

ab, cb *de l'autre, la droite* AC *qui joint les extrémités* A, C *des jambes du premier, sera égal à la droite* ac *qui joint les extrémités* a, c *des jambes du second, & les angles que la droite* AC *fera avec les côtés* AC, CB *du premier, seront égaux chacun à chacun aux angles que la droite* ac *fera avec les côtés* ab, cb *du second.*

Je mets le côté BC du premier, sur le côté *bc* du second qui lui est égal; le côté BA tombera aussi sur le côté *ba* qui lui est égal; s'il tomboit en dedans de l'angle *abc*, l'angle ABC seroit plus petit que l'angle *abc*, & s'il tomboit en dehors, l'angle ABC seroit plus grand que l'angle *abc*, & l'un l'autre est contre la supposition; donc les points A, C tomberont sur les points *a*, *c*, & la droite AC mené entre les points A, C tombera sur la droite *ac* menée entre les points *a*, *c* & lui sera égale; d'où il suit que l'angle BAC tombera sur l'angle *bac*, & l'angle ACB sur l'angle *acb*.

48. DEFINITION. Si l'on prolonge l'un des côtés CB (*Fig.* 23.) d'un angle CBA au-delà du sommet B en E l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB, & l'angle ABC se nomment *Angles de suite*, & si l'on prolonge les deux CB, AB au-delà du sommet, l'angle HBE fait par les deux prolongemens, & l'angle ABC se nomment *Angles opposés au sommet.*

49. PROPOSITION V. *Les Angles de suite valent ensemble deux angles droits, & les angles opposés au sommet sont égaux.*

Du sommet B (*Fig.* 23.) pris pour centre, & avec une ouverture du compas à discrétion, je décris une circonférence de cercle qui coupe les côtés des angles aux points C, A, E; le côté CB & son prolongement BE forment une ligne droite qui passe par le centre B, & qui par conséquent est un diametre, lequel coupe la circonférence en deux demi-circonférences CAE, CHE. Or, la mesure de l'angle ABC, est l'arc AC compris entre ses côtés, (*N.* 42.) & la mesure de l'angle ABE est l'arc AE, & ces deux arcs AC, AE pris ensemble, valent la demi-circonférence CHE ou deux quarts de circonférence; donc la mesure totale des angles de suite CBA, ABE est deux quarts de circonférence; mais deux quarts de circonférence sont la mesure de deux angles droits; donc les angles de suite CBA, ABE, valent ensemble deux angles droits; ce qu'il falloit premierement démontrer.

L'angle ABE & son angle de suite EBH, valent ensemble deux droits, comme on vient de voir; le même angle ABE & son angle de suite ABC, valent aussi deux droits; donc les deux en-

semble ABE, EBH sont égaux aux deux ensemble ABE, ABC; retranchant donc de part & d'autre l'angle ABE, il restera l'angle EBH égal à l'angle ABC qui lui est opposé au sommet.

50. DEFINITION. Une ligne droite AB (*Fig.* 24.) est dite *Perpendiculaire* sur une autre ligne droite CD lorsqu'elle n'est pas plus inclinée sur CD d'un côté que de l'autre.

51. COROLLAIRES. Donc, 1°. *Les deux angles* ABD, ABC *qu'une perpendiculaire* AB *fait avec la droite* CD *du même côté sont chacun droits.* Ces deux angles sont angles de suite, & valent ensemble deux angles droits: (*N.* 49.) or, ils sont égaux, puisque AB n'est pas plus inclinée sur CD d'un côté que de l'autre; donc chacun d'eux est droit.

Donc, 2°. *Toute ligne* AB *qui fait un angle droit* ABD *avec une autre droite* BD, *est perpendiculaire sur cette ligne* BD; car si l'on prolonge DB en C, les angles de suite ABD, ABC vaudront deux droits, (*N.* 49.) & comme ABD en vaut un, ABC en vaudra un aussi & sera égal à ABD, (*N.* 45.) ainsi AB n'inclinera pas plus d'un côté que d'un autre sur CD.

Donc, 3°. *Si l'on prolonge la perpendiculaire* AB *au-delà de* CB *en* E, *son prolongement* BE *sera aussi perpendiculaire sur* CD. Les angles de suite ABD, DBE valent ensemble deux droits; or, ABD est droit; donc DBE l'est aussi, & partant BE est perpendiculaire sur CD.

Donc, 4°. *Si une ligne* AE *est perpendiculaire sur une autre* CD, *réciproquement celle-ci est perpendiculaire sur* AE; les angles ABD, DBE sont droits, comme on vient de voir, & par conséquent égaux; (*N.* 45.) donc CD n'est pas plus inclinée sur AE d'un côté que d'un autre.

Donc, 5°. *D'un même point* B *pris sur une droite* CD, *on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire* BA *sur cette droite.* Si on en pouvoit mener une autre comme BH, il faudroit qu'elle passât ou à droite ou à gauche de la perpendiculaire BA, & cependant il faudroit que les angles HBD, HBC qu'elle feroit avec CD, fussent égaux; ce qui n'est pas possible, puisque l'angle HBD est plus petit que l'angle ABD qui le renferme, lequel angle est droit, à cause que AB est perpendiculaire sur CD.

Donc, 6°. *Si d'un même point* B *pris sur une droite* CD *on mene de part & d'autre deux droites* BA, BE *perpendiculaires sur* CD; *ces deux droites ne feront ensemble qu'une ligne droite*; puisque AB est perpendiculaire sur CD, son prolongement BE de l'autre côté.

de CD est aussi perpendiculaire sur CD, comme on vient de voir. Or, du même point B on ne peut pas mener du même côté deux perpendiculaires; donc la perpendiculaire BE est le prolongement de la perpendiculaire AB, & ces deux lignes sont ensemble une seule ligne droite.

52. PROPOSITION VI. *D'un point* A (Fig. 25.) *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'est pas dans le prolongement de cette droite, on ne peut mener sur* CD *qu'une seule perpendiculaire* AB.

Si l'on veut que du point A on puisse mener sur CD une autre ligne AH qui lui soit aussi perpendiculaire; je prolonge la perpendiculaire AB en E de l'autre côté de CD; je fais BE=AB, & je mene la droite EH; la droite AB & son prolongement BE sont perpendiculaires sur CD; donc les angles ABH, EBH sont droits (*N.* 51.) & partant égaux; (*N.* 45.) or, les côtés AB, BH du premier de ces angles ABH, sont égaux chacun à chacun aux côtés BE, BH du second EBH, & les lignes AH, EH joignant les extrémités de ces côtés égaux seront égales; donc, l'angle AHB que la ligne AH fait avec le côté BH du premier angle ABH, est égal à l'angle EHB que la ligne EH fait avec le côté BH du second angle EBH; (*N.* 47.) mais AHB doit être droit, puisqu'on suppose que AH est perpendiculaire sur CD; donc EHB sera aussi droit, & la droite EH sera aussi perpendiculaire sur CD; (*N.* 51.) ainsi les perpendiculaires AH, EH qui partent du même point H de la ligne CD, ne feront ensemble qu'une seule ligne droite AE entre les extrémités A, E; mais la ligne ABE est aussi droite entre les mêmes extrémités; donc entre deux points il se trouveroit deux lignes droites; ce qui est impossible: donc il est impossible aussi que AH soit perpendiculaire sur CD.

53. COROLLAIRE Ier. *Si du point* A (Fig. 26.) *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'est pas sur le prolongement de cette ligne, on mene une perpendiculaire* AB, *& plusieurs autres lignes que nous nommerons obliques, parce qu'elles ne sauroient être perpendiculaires sur* CD; *je dis* 1°. *Que la perpendiculaire* AB *sera la plus courte de toutes les lignes menées du point* A *sur* CD, 2°. *Que les autres seront d'autant plus longues qu'elles couperont la ligne* CD *en des points* H, D, &c. *plus éloignés du point* B *où la perpendiculaire coupe cette ligne*, 3°. *Qu'on trouvera tant d'obliques que l'on voudra égales deux à deux; mais jamais trois d'égales.*

Je prolonge la perpendiculaire AB au-delà de la ligne CD en E; je fais BE=AB, & je mene la ligne EH, la ligne AB &

fon prolongement BE étant perpendiculaires fur CD, les angles ABH, EBH font droits, (N. 51.) & par conféquent égaux; (N. 45.) or, les côtés AB, BH de l'angle ABH font égaux chacun à chacun aux côtés EB, BH de l'angle EBH; donc la ligne AH qui joint les extrémités des côtés AB, BH eft égale à la ligne EH qui joint les extrémités des côtés EB, BH; (N. 47.) or, les deux lignes droites AB, BE ne font enfemble qu'une ligne droite entre les points A, E; donc les deux droites AH, HE ne font pas enfemble une ligne droite entre les mêmes points A, E, & font par conféquent plus longues que les deux enfemble AB, BE; ainfi la ligne AH moitié des deux AH, HE; eft plus longue que la moitié AB des deux AB, BE, & partant la perpendiculaire AB eft plus courte que l'oblique AH, & on prouvera de même que la perpendiculaire AB eft plus courte que l'oblique AD, &c. ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Du point E, je mene la droite ED à l'extrémité D d'une autre oblique AD, & je prouverai de même qu'auparavant que ED=AD. Or, les deux droites égales AH, HE menées des extremités A, E de la droite AE fe coupent en dedans des deux droites AD, ED menées des mêmes points A, E; donc les deux AH, HE prifes enfemble, font moindres que les deux AD, DE, (N 38.) & partant la droite AH, moitié des deux AH, HE eft moindre que la droite AD moitié des deux AD, DE; ainfi l'oblique AD qui coupe CD, en un point D plus éloigné du pied B de la perpendiculaire AB eft plus longue que l'oblique AH qui coupe CD en un point H plus proche du même pied B; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Je prens fur CD de l'autre côté du pied B de la perpendiculaire AB la diftance BM égale à la diftance BH, la diftance BC égale à la diftance BD, & du point A je mene les droites AM, AC, la droite AB étant perpendiculaire fur CD, l'angle ABH eft égal à l'angle ABM, (N. 51.) & les côtés AB, BH de l'angle ABH font égaux chacun à chacun aux côtés AB, BM de l'angle ABM; donc l'oblique AH qui joint les extrémités des côtés AB, BH eft égale à la droite AM qui joint les extrémités des côtés AB, BM, (N. 47.) c'eft-à-dire que les deux obliques AH, AM qui coupent la droite CD en des points H, M également éloignés du pied B de la perpendiculaire AB font égales; & on prouvera de même que les deux obliques AC, AD font égales pour la même raifon; & comme de part

& d'autre du pied B de la perpendiculaire, on peut trouver tant de points que l'on voudra également distans deux à deux du point B, on trouvera aussi tant d'obliques égales deux à deux que l'on voudra; mais on n'en trouvera jamais trois qui soient égales, car si cela étoit, il faudroit qu'il y en eût deux qui fussent du même côté de la perpendiculaire AB, & comme ces deux lignes ne pourroient couper la ligne CD en deux points également éloignés du point B, elles ne sauroient être non plus égales; ce qui seroit contre la supposition.

54. COROLLAIRE II. Donc, *si d'un point* A *pris hors d'une droite* CD *on mene sur cette ligne une perpendiculaire* AB, *& deux obliques égales* AH, AM *la perpendiculaire* AB *coupera la droite* CD *en un point* B *également éloigné des points* H, M *où les obliques coupent la même ligne* CD. C'est une suite du Corollaire précédent; & delà il est aisé de conclure que *si deux lignes* AH, AM *menées sur une droite* CD *d'un point extérieur* A *sont égales; ces deux lignes sont deux obliques entre lesquelles la perpendiculaire menée du point* A *sur* CD *doit passer.* Car si l'une de ces lignes étoit perpendiculaire sur CD, elle seroit plus courte que l'autre : ce qui seroit contre la supposition.

55. COROLLAIRE III. *La perpendiculaire* AB *menée du point extérieur* A *sur une ligne droite* CD *est la distance du point* A *à cette droite* CB, cette perpendiculaire est la plus courte ligne qu'on puisse mener du point A sur CD, (*N.* 53.) donc elle est la distance du point A à cette ligne (*N.* 9.).

COROLLAIRE IV. *Si un point quelconque, d'une droite* ABE (Fig. 27.) *perpendiculaire sur une autre droite* CD, *est également éloigné des deux points* C, D *de la droite* CD, *cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre à l'infini, passera par tous les points également éloignés des points* C, D.

Il faut ici démontrer deux choses, 1°. Que tous les points de la perpendiculaire ABE prolongée de part & d'autre, à l'infini, sont également éloignés des points C, D, 2°. Qu'il ne peut se trouver aucun point également éloigné des points C, D, qui ne soit sur la perpendiculaire; ce que je prouve ainsi.

Si le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D est le point B où cette perpendiculaire coupe la droite CD; je prens un autre point quelconque A sur cette perpendiculaire, & de ce point, je mene les droites AC, AD aux points C, D. Ces droites seront deux obliques menées du point A de

la perpendiculaire AB, & ces obliques seront égales, puisqu'elles coupent la droite CD en des points également éloignés de la perpendiculaire; (*N.* 53.) mais ces droites mesurent les distances du point A aux points C, D; donc le point A est également éloigné des points C, D; & comme on prouvera la même chose à l'égard de tout autre point pris sur la perpendiculaire, il s'ensuit que tous les points de cette droite sont également éloignés de C & D.

Que si le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D est hors de la ligne CD tel que le point A; je mene les droites AC, AD qui seront par conséquent deux obliques égales; donc la perpendiculaire coupera CD en un point B également éloigné des points C & D, & partant je prouverai comme auparavant que tous les autres points de la perpendiculaire sont également éloignés de C & D; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant, si l'on prétend que quoique tous les points de la perpendiculaire AE (*Fig.* 28.) soient également éloignés des points C, D de la droite CD, il puisse néanmoins se trouver quelque point H hors de la perpendiculaire AE qui soit aussi également éloigné des points C, D; je mene de ce point H les droites HC, HD qui seront égales & par conséquent obliques l'une & l'autre sur CD; (*N.* 54.) ainsi la perpendiculaire menée du point H sur CD coupera cette ligne CD en un point également éloigné des points C & D, & partant, elle la coupera au point B où la perpendiculaire AE la coupe; donc il s'ensuivroit que sur un même point B pris sur CD, on pourroit mener deux droites AB, BH perpendiculaires sur la ligne CD; ce qui n'est pas possible, (*N.* 51.) par conséquent il n'est pas possible non plus que le point H soit également éloigné de C & D.

57. COROLLAIRE V. *Une même ligne ne peut être perpendiculaire sur deux lignes* AB, CD (Fig. 29.) *qui se coupe en un point* L. Si on veut que la droite DB qui coupe les droites AB, CD en deux points D, B différens du point L où ces droites se coupent, soit perpendiculaire sur l'une & l'autre de ces droites; réciproquement ces lignes seront perpendiculaires sur elle, (*N.* 51) & par conséquent il s'ensuivra que du point L où ces lignes se coupent hors de la ligne DB, on pourra mener deux perpendiculaires LD, LB sur cette droite DB; ce qui est impossible (*N.* 52.).

Et si on veut que la droite ML qui passe par le point où les deux lignes se coupent, soit perpendiculaire sur l'une & l'autre, réciproquement les deux lignes seront perpendiculaire sur elles; (*N.* 51.) donc il s'ensuivra que d'un même point L d'une droite LM, on pourroit mener deux perpendiculaires LD, LB d'un même côté; ce qui seroit encore impossible (*N.* 51).

58. COROLLAIRE VI. *Si une droite* AE (Fig. 27.) *est tellement disposée à l'égard d'une autre droite, que deux de ses points quelconques soient également éloignés de deux points* C, D *de la droite* CD, *c'est-à-dire que le point* A *soit également éloigné de* C *&* D, *& le point* E *aussi également éloigné de* C & D, *la droite* AB, *est perpendiculaire sur* CD. Du point A je conçois une perpendiculaire menée sur CD; cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre, à l'infini, passera par tous les points également éloignés de C & D, (*N.* 56.) & partant elle passera par le point E, mais la droite AE passe aussi par les points A, E; donc cette droite n'est pas différente de la perpendiculaire, car entre deux points on ne peut mener qu'une droite (*N.* 32.).

59. LEMME. *Si des extrémités* A, B *d'une droite* AB (Fig. 30.) *prises pour centres, & avec des rayons* AE, BN, *qui, pris ensemble soient plus grands que la droite* AB, *on décrit deux circonférences* EPLQ, NPSQ; *ces deux circonférences ne se couperont qu'en deux points* P, Q *dont l'un sera d'un côté de la droite* AB, *& l'autre de l'autre côté.*

En premier lieu, il est clair que ces deux circonférences ne se couperont point sur la droite AB, car leurs rayons AE, BN étant ensemble plus grands que la droite AB, ces deux rayons tombant sur AB anticiperont l'un sur l'autre, & l'extrémité E du premier AE tombera plus près du point B que l'extrémité N du second BN, 2°. Ces deux circonférences se couperont, car l'extrémité E du rayon AE, en décrivant la demi circonférence EPL du côté de P, s'éloigne de plus en plus du centre B, & va trouver la ligne AB prolongée au-delà de A par rapport à B. Et au contraire l'extrémité N du rayon BN, en décrivant la demi circonférence, s'éloigne de plus en plus du centre A, & va couper la ligne AB prolongée au-delà du point B; ainsi les deux demi circonférences prenant des routes opposées, doivent se couper quelque part, & la même chose doit se dire des deux autres demi circonférences qui sont de l'autre côté de la ligne AB.

Suppoſant donc que le point ou les deux demi circonférences EPL, NPS ſe coupent, ſoit le point P; je conçois que de ce point, ſoit menée une perpendiculaire PH ſur la droite AB, & du centre A des lignes droites AR, AR, &c. ſur tous les points de cette ligne; la droite AH étant perpendiculaire ſur PH, les droites AR, AR, &c. ſont obliques & toutes plus courtes que le rayon AP qui eſt plus éloigné qu'elles de la perpendiculaire AH; (*N.* 53.) ainſi ces obliques ne vont pas aboutir juſqu'à l'arc PE compris entre le point P & la droite AB; car ſi cela étoit, elles ſeroient égales au rayon AP; & par conſéquent l'arc PE eſt tout entier à droite de la ligne PH. De même ſi l'on mene de l'autre centre B des lignes droites BR, BR, &c. ſur tous les points de PH, toutes ces lignes ſeront plus courtes que le rayon, & n'iront pas aboutir ſur l'arc PN, lequel, par conſéquent ſera tout entier à gauche de la droite PH, c'eſt pourquoi les deux arcs PE, PN des demi circonférences EPL, NPS ne ſe coupent point ailleurs qu'en P, puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PH.

Je prolonge la droite PH en X du côté de P, & du centre A je mene ſur tous les points du prolongement PX des droites AZ, AZ, &c. toutes ces lignes ſont des obliques plus longues que le rayon AP qui eſt plus proche qu'elles de la perpendiculaire; ainſi elles coupent l'arc PL avant de couper la droite PX, & par conſéquent l'arc PL eſt tout entier à gauche de PX. De même ſi de l'autre centre B on mene des droites BZ, BZ, &c. ſur PX, ces droites couperont l'arc PS avant de couper PX, & partant cet arc ſera tout entier à droite de PX; donc les arcs PL, PS des demi circonférences EPL, NPS ne ſe couperont point ailleurs qu'en P, puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PZ: or, nous venons de voir que les autres deux arcs PE, PN ne ſe coupent qu'en P; donc les demi circonférences EPL, NPS, compoſées de ces arcs ne ſe coupent auſſi qu'en P, & on prouvera la même choſe des autres demi circonférences EQL, NQS, & partant les deux circonférences entieres ne ſe coupent qu'en deux points, l'un au deſſus, & l'autre au deſſous de la droite AB.

60. LEMME. *Une circonférence de cercle ne peut couper une ligne qu'en deux points.*

Si la ligne AB (*Fig.* 31.) qui coupe la circonférence aux points A, B paſſe par le centre O du cercle: la propoſition eſt évidente; car

AB est composée de deux rayons AO, OB, ainsi la circonférence pourroit couper le diametre en quelque point pris entre ses extrémités A, B : par exemple en P, la droite OP compris entre le centre & ce point P, seroit un rayon, & partant nous aurions deux rayons inégaux OP, OB dans un même cercle; ce qui est impossible. De même si la circonférence coupoit les prolongemens de AB en un point quelconque Q; la droite OQ seroit un rayon, & nous aurions encore deux rayons inégaux OQ, OB; ce qui est impossible.

Mais si la droite CD qui coupe la circonférence en deux points C, D ne passe par le centre O; je mene du centre O aux extrémités C, D de cette ligne, les deux rayons OC, OD lesquels étant égaux seront par conséquent deux obliques égales menées du point extérieur O sur la droite CD, (*N.* 54.) & la perpendiculaire du point O sur CD coupera cette ligne en un point D également éloigné de C & D; or, toutes les lignes OR, OR, &c. menées du point O sur tous les points de la droite CD pris entre les deux rayons OC, OD seront plus courtes que ces rayons, puisqu'elles seront plus proches de la perpendiculaire, (*N.* 53.) & n'iront pas aboutir à la circonférence; donc la circonférence ne sauroit couper cette ligne dans aucun de ces points; de même toutes les lignes OS, OS, menées du point O sur les prolongemens de la droite CD, seront plus longues que les rayons, puisqu'elles seront plus éloignées de la perpendiculaire; donc la circonférence ne passera pas par leur extrémité S, S, &c. partant elle ne coupe la ligne CD qu'aux deux points C, D.

61. Lorsque d'un point B (*Fig.* 27.) pris sur une droite CD, on mene une droite BA perpendiculaire sur CD; cela s'appelle *élever une perpendiculaire*, & lorsque d'un point A pris hors d'une ligne droite CD & qui n'est pas dans son prolongement, on mene une perperpendiculaire CD; cela s'appelle *abaisser une perpendiculaire.*

62. PROBLEME. *D'un point* B (Fig. 32.) *pris sur une droite* CD *élever une perpendiculaire sur cette ligne.*

Je prens une ouverture de compas à discrétion que je porte sur la ligne CD, de B en M & de B en N pour avoir les deux points M, N également éloignés du point B; des points M, N & avec une ouvertute de compas, mais plus grande que la précédente; c'est-à-dire plus grande que MB ou BN; je décris deux

arcs PQ, RS qui se coupent d'un même côté de la ligne CD en un point A, à cause que les deux rayons pris ensemble sont plus grands que la droite MN, (*N.* 59.) & du point A où ces arcs se coupent, je mene au point B la droite AB qui est la perpendiculaire demandée.

Car à cause que les arcs ont été décrits avec des rayons égaux, les droites AM, AN sont égales, & le point A de la ligne AB également éloigné des points M, N de la droite CD; or, le point B de cette même ligne AB est aussi également éloigné des points M, N; donc AB est perpendiculaire sur CD (*N.* 58.).

63. Probleme. *D'un point* A *pris hors d'une droite* CD (Fig. 33.) *& qui n'est pas dans ses prolongemens, abaisser une perpendiculaire sur* CD.

Du point A pris pour centre, & avec une ouverture de compas assez grande pour pouvoir couper la ligne CD, je décris un arc qui coupe cette ligne en deux points M, N; de ces points pris pour centres avec une même ouverture de compas plus grande que la moitié de MN, je décris deux arcs PQ, RS qui se coupent au point O, & du point A par le point O, je mene la droite AO que je prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe CD en B, & la droite AB est la perpendiculaire demandée.

Car les rayons AM, AN de l'arc MN étant égaux, le point A est également éloigné des points M, N de la droite CD; de même les rayons MO, NO des arcs PQ, RS étant égaux, le point O est encore également éloigné des mêmes points M, N; donc la droite AB qui passe par les deux points AO est perpendiculaire sur CM (*N.* 58.).

64. Probleme. *Couper une droite* CD (Fig. 34.) *en deux parties égales.*

Des extrémités C & D de la droite CD prises pour centre, & avec une même ouverture de compas plus grande que la moitié de CD, je décris deux arcs de cercle PQ, RS qui se coupent en deux points A, B de part & d'autre de CD, à cause que les deux rayons pris ensemble sont plus grands que CD, (*N.* 59.) & des points A, B je mene la droite AB, laquelle coupe CD en E en deux parties égales.

Car les rayons CA, DA étant égaux par la construction, le point A est également éloigné des mêmes extrémités C, D de la droite CD; & de même à cause de l'égalité des rayons CB, DB, le

point B est également éloigné des mêmes extrémités C, D; donc la droite AB qui passe par les deux points A, B est perpendiculaire sur CD, (*N.* 58.) & passe par tous les points également éloignés de C & D; (*N.* 56.) ainsi le point E ou la droite AB coupe CD, est également éloigné de C & D, & la droite CD est coupée en deux également en E.

65. PROBLEME. *Diviser un angle* ABC (Fig. 35.) *en deux parties égales.*

Du sommet B pris pour centre, & avec une ouverture de compas à discrétion, je décris un arc ANC entre les jambes de l'angle donné, des extrémités A, C de cet arc, & avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de la droite AC menée entre ces extrémités, je décris deux arcs PQ, RS qui se coupent en H, & du point H par le sommet B, je mene la droite AB qui coupe l'angle ABC en deux parties égales.

Car les rayons AB, CB étant égaux par la construction, le point B de la droite HB est également éloigné des extrémités A, C de la droite AC, & à cause de l'égalité des rayons AH, CH, le point H de la même droite HC est également éloigné des extrémités A, C; donc la ligne HB coupe AC en deux parties égales en M, (*N.* 64.) & lui est perpendiculaire; (*N.* 58.) ainsi les angles AMB, CMB sont droits & égaux entr'eux, & les côtés AM, MB du premier, sont égaux chacun à chacun aux côtés CM, MB du second; or, les droites AB, CB joignent les extrémités de ces côtés, donc l'angle ABM est égal à l'angle CBM (*N.* 47.) mais ces deux angles ABM, CBM composent ensemble l'angle ABC; donc cet angle est divisé en deux également par la droite HB.

66. PROPOSITION VII. *Si une ligne droite* AB (Fig. 36.) *se meut de façon que son extrémité* A *parcoure successivement tous les points d'une droite* AC, *prolongée si l'on veut à l'infini, & que pendant le mouvement la droite* AB *soit toujours perpendiculaire sur la droite* AC; *l'autre extrémité* B *de la ligne* AB *décrira une ligne* BM *indéfinie qui sera une ligne droite.*

Puisque la ligne AB est toujours perpendiculaire sur AC, & que son extrémité A n'abandonne jamais cette ligne, tous les points de la ligne BM sont à égale distance de AC. (*N.* 55.) Ainsi si nous concevons que la ligne BM se meuve vers la ligne AC, de façon que tous ses points ne fassent pas plus de chemin l'un que l'autre, il est clair que lorsque l'un de ses points sera parvenu

sur la ligne AC, tous ses autres points seront aussi parvenus sur AC, & que par conséquent BM tombera toute entiere sur AC, mais AC est droite; donc BM l'est aussi.

67. *Definition.* Deux lignes droites AC, BM (*Fig. 36.*) sont dites *Paralelles entr'elles* lorsqu'elles sont partout à égale distance, c'est-à-dire lorsque les perpendiculaires menées de tous les points de l'une BM sur l'autre AC, sont égales, ou enfin lorsque l'une d'entr'elles BM est formée par le mouvement d'une droite AB, toujours perpendiculaire sur l'autre; & dont l'extrémité A n'abandonne jamais AC, comme il a été dit dans la Proposition précédente.

68. Corollaires. Donc, 1°. *Toute perpendiculaire* BA *menée d'un point quelconque* B, *de l'une des paralelles* BM *sur l'autre paralelle* AC, *mesure la distance des deux paralelles.* Tous les points de BM sont éloignés de AC d'une quantité égale à BA; donc BA est la distance de la droite BM à sa paralelle AC; or la distance de la droite AC à la droite BM ne peut pas être différente de la distance de la droite BM à la droite AC; donc BA mesure aussi la distance de AC à BM.

Donc, 2°. *Toute ligne* BA *comprise entre les deux paralelles & perpendiculaire sur l'une* AC, *est aussi perpendiculaire sur l'autre* BM. Les droites BM, AC étant partout à égale distance; si du point A je mene une perpendiculaire sur BM, cette perpendiculaire mesurera la distance de AC à BM. Or, la distance de AC à BM ne peut être différente de la distance de BM à AC, c'est-à-dire de la droite BA qui a été menée perpendiculaire sur AC; donc la perpendiculaire menée de A sur BM doit être égale à BA; mais cela ne sçauroit être, si la perpendiculaire menée du point A, tomboit en un autre point que B; car en ce cas, AB seroit oblique sur BM, & plus grande que la perpendiculaire; (*N.* 53.) donc BA doit être perpendiculaire sur BM de même que sur AC.

Et delà il est aisé de prouver *l'inverse*, c'est-à-dire *que si une ligne* AB *est perpendiculaire sur deux autres* BM, AC, *ces deux lignes* BM, AC *sont paralelles entr'elles*; car si on veut que BM ne soit paralelle à AC; concevons que par le point B on fasse passer une paralelle à AC, la droite AB étant perpendiculaire sur AC, sera aussi perpendiculaire sur sa paralelle; mais AB est aussi perpendiculaire sur BM; donc il faut que BM & la paralelle menée du point B soient la même ligne; autrement une droite AB seroit

perpendiculaire fur deux différentes lignes en un même point B; ce qui eft impoffible (*N.* 57.).

Donc, 3°. *D'un même point* B *on ne fauroit mener deux paralelles à une même ligne* AC, par la raifon qu'on vient de voir.

Donc, 4°. *Deux perpendiculaires* AB, TR *entre deux paralelles* AC, BM *font paralelles entr'elles*, puifque la ligne AC, ou AT eft perpendiculaire fur l'une & fur l'autre.

Donc, 5°. *Les parties* AT, BR *des paralelles comprifes entre deux perpendiculaires* AB, TR *font égales entr'elles.* Les perpendiculaires AB, TR font paralelles entr'elles comme on vient de voir, & les parties AT, BR font perpendiculaires fur elles; donc les parties AT, BR font égales par la définition des paralelles.

69. *Definition.* Si une lignedroite RS (*Fig.* 37.) coupe deux paralelles BM, AC, 1°. Les angles BHE, CEH qu'elle fait en dedans des paralelles, l'un BHE en haut & à gauche, & l'autre CEH en bas & à droite, fe nomment *angles alternes*; ainfi les angles MHE, AEH font auffi alternes, 2°. Les angles MHR, CER que la droite RS fait du même côté avec les paralelles, fe nomment *angles du même côté*; les angles MHS, CES font donc auffi *angles du même côté*, de même que les angles BHR, AER & les angles BHS, AES. 3°. Les angles MHE, CEH, que RS fait en dedans des paralelles du même côté, fe nomment *angles internes oppofés*; ainfi les angles AEH, BHE font auffi *internes oppofés.*

70. Proposition VIII. *Si une droite* RS (Fig. 38.) *coupe deux paralelles* BM, AC, *les angles alternes* BHE, CEH *font égaux.*

Du point E j'abaiffe fur BM la perpendiculaire EV, & du point H fur AC la perpendiculaire HT; les angles droits EVH, HTE font égaux, & à caufe que les perpendiculaires EV, HT font égales. (*N.* 67.) & que les parties VH, ET des paralelles comprifes entre ces perpendiculaires font auffi égales (*N.* 68.) les deux angles égaux EVH, HTE ont les côtés égaux chacun à chacun; or, la droite HE paffe par les extrémités de ces côtés; donc l'angle EHV que cette droite fait avec le côté EH du premier angle EVH eft égal à l'angle HET qu'elle fait avec le côté ET du fecond angle HTE; (*N.* 47.) mais les angles EHV, HET font les mêmes que les angles alternes BHE, CEH; donc les angles alternes font égaux.

71. Corollaire Ier. *Les angles du même côté* RHM, HET *font égaux*; l'angle BHE eft égal à l'angle RHM qui lui eft oppofé au fommet, (*N.* 49.) & le même angle BHE eft égal à

son alterne HET; (*N.* 70.) donc les angles RHM, HET sont égaux.

72. Corollaire II. *Les angles internes opposés* MHE, CEH *valent ensemble deux droits ;* l'angle RHM & son angle de suite MHE valent ensemble deux droits : (*N.* 49.) or, l'angle CEH est égal à l'angle RHM; (*N.* 71.) donc l'angle CEH & l'angle MHE valent aussi ensemble deux droits.

73. Corollaire III. L'inverse de cette Proposition & de ses Corollaires est aussi véritable, c'est-à-dire *si une ligne droite* RS *qui coupe deux autres lignes droites* BM, AC, *fait les angles alternes égaux ou les angles du même côté égaux, ou les angles internes opposés, égaux ensemble à deux droits, les lignes* BM, AC *sont paralelles.* Car si l'on veut que BM ne soit pas paralelle à AC, concevons que par le point H on mene une paralelle à la droite AC, la ligne RS qui coupera les deux paralelles fera donc avec elles les angles alternes égaux, &c. & par conséquent l'angle que la paralelle menée du point H fera avec la ligne RS du côté de S, sera égal à l'angle TEH; mais l'angle que la ligne BH fait avec RS du côté de S, est aussi égal à l'angle TEH; donç la ligne BH fera nécessairement la même que la paralelle menée du point H, & par conséquent les droites BH ou BM & AC sont paralelle.

74. Corollaire IV. *Si deux lignes droites* HE, SR (Fig. 39. 40.) *sont également inclinées sur l'une des paralelles* AC, *elles sont aussi également inclinés sur l'autre* BM.

Les deux lignes HE, SR peuvent être également inclinées sur AC ou d'un même côté ou d'un sens différent, si elles sont également inclinées d'un même côté, (*Fig.* 39.) les angles HEC, SRC sont donc égaux, (*N.* 71.) & partant les angles EHB, RSB qui sont égaux à leurs alternes HEC, SRC, sont aussi égaux, & les droites HE, SR sont également inclinées sur BM; & si les droites HE, SR sont également inclinées sur AC d'un sens différent (*Fig.* 40.) les angles HER, SRE seront donc égaux, & partant leurs alternes EHB, RSM le seront aussi, & les deux droites HE, RS seront également inclinées sur BM dans un sens différent.

75. Proposition. IX. *Les droites* EH, RS (Fig. 39.) *également inclinées d'un même côté entre deux paralelles* AC, BM *sont paralelles entr'elles & égales.*

La ligne AC qui coupe les droites EH, RS fait les angles

HEC, SRC du même côté égaux, à cause que les lignes sont également inclinées du même côté; donc EH, RS sont paralelles (*N.* 73.) ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Des points H, S, j'abaisse sur AC les perpendiculaires HT, SV; ainsi les angles BHT, BSV sont droits (*N.* 68.) & égaux; c'est pourquoi retranchant de ces angles, les angles égaux BHE, BSR (*N.* 74.) les angles restans EHT, RSV sont égaux; or, les angles droits HTE, SVR sont égaux; mettant donc la figure RVS sur la figure ETH, en sorte que la perpendiculaire SV tombe sur son égale HT, l'angle droit RVS tombera sur son égal ETH, & l'angle RSV sur son égal EHT; donc les deux lignes SR, RV tomberont sur les deux HE, ET & leur seront égales chacune à chacune; donc les inclinées EH, SR sont égales, ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Et cette seconde partie de la Proposition est encore vraye, quand les également inclinées entre les paralelles sont inclinées dans un sens différent (*Fig.* 40.) ce qu'on démontrera de la même façon.

76. COROLLAIRE Ier. *Les parties* SH, ER (Fig. 39.) *des paralelles comprises entre les également inclinées d'un même côté, sont égales.* Nous venons de voir que les droites ET, RV sont égales. Ajoutant donc à chacune de ces lignes droites TR, nous aurions ER = TV; mais à cause des perpendiculaires HT, SV, nous avons TV = HS; donc HS = ER.

77. COROLLAIRE II. *Si deux lignes* HE, SR (Fig. 39.) *sont paralelles entre deux paralelles* BM, AC *elles sont également inclinées entre ces paralelles, & égales.*

Les deux lignes HE, SR étant paralelles entr'elles, la ligne droite AC qui les coupe fait les angles HEC, SRC du même côté égaux; (*N.* 71.) donc ces lignes sont également inclinées du même côté, & puisqu'elles sont également inclinées, elles sont égales (*N.* 75.)

78. PROPOSITION X. *Si deux points* H, S, (Fig. 39.) *d'une droite* BM, *prolongée, si l'on veut, à l'infini, sont également éloignés d'une droite* AC, *aussi prolongée à l'infini, qui est d'un même côté par rapport à ces points; la droite* BM *est paralelle à* AC, *& cette droite* BM *passe par tous les points qui sont autant éloignés de* AC *du même côté que les points* H, S.

Puisque les points H, S sont à égale distance de AC, les perpendiculaires HT, menées de ces points sur AC, sont égales;

(*N.* 55.) concevons donc que la perpendiculaire HT, se meuve de façon que son extrémité T parcoure tous les points de la droite AC, & que pendant ce mouvement la droite HT soit toujours perpendiculaire sur AC, il est clair que lorsque le point T tombera sur le point V, la perpendiculaire HT tombera sur la perpendiculaire SV qui lui est égale, car autrement d'un même point V on pourroit élever deux perpendiculaires sur AC; ce qui est impossible ; (*N.* 51.) or, pendant ce mouvement, l'autre extrémité H de la perpendiculaire HT décrira une ligne HS qui sera droite, (*N.* 66.) & cette droite prolongée à l'infini, sera paralelle à AC; (*N.* 67.) donc la droite BM qui passe par les deux points H, S de la droite HS, & qui par conséquent n'est pas différente de la droite HS prolongée à l'infini, (*N.* 34.) est aussi paralelle à AC; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant puisque BM est paralelle à AC, il est clair que tous ses points sont autanr éloignés de AC que les points H, S; mais si l'on veut que malgré cela il se trouve du même côté quelque point tel que P, qui soit autant éloigné de AC que les points H, S, & qui cependant ne soit pas sur BM; je mene du point H au point P, la droite HP, laquelle sera paralelle à AC à cause de ses deux points H, P également éloignés de AC, & partant d'un même point H, on pourra mener deux paralelles HP, HM à une même droite AC; ce qui est impossible (*N.* 68.).

79. Probleme. *D'un point donné* H (Fig. 39.) *pris hors d'une droite* AC *& qui n'est pas dans son prolongement, mener une paralelle à la droite* AC.

Du point H j'abaisse une perpendiculaire HT sur AC; d'un autre point V pris sur AC, j'éléve sur AC une perpendiculaire VS que je fais égale à HT, la ligne droite HS menée par les extrémités H, S des perpendiculaires, est la paralelle demandée; car les deux points H, S par lesquels elle passe, sont également éloignés de la droite AC; ce qui la rend paralelle (*N.* 78.)

Ou bien du point donné H, (*Fig.* 41.) je mene sur AC une oblique HR, & faisant en H un angle RHP égal à l'angle HRA, le côté HP de l'angle RHP est la paralelle demandée à cause des angles alternes égaux RHP, HRA.

80. *Remarque.* On ajoute ordinairement à la définition des paralelles *qu'elles ne se rencontreront jamais quand même on les prolongeroit à l'infini*; mais il m'a paru qu'il suffisoit de dire qu'elles *étoient toujours à égale distance ;* car il est visible que si elles sont toujours

toujours à égale distance, elles ne peuvent jamais se rencontrer.

81. PROPOSITION XI. *Si une droite* PQ (Fig. 42. 43.) *est paralelle à l'une des deux paralelles* BM, AC, *elle est aussi paralelle à l'autre.*

Il peut se faire que la droite PQ paralelle à BM soit entre les paralelles BM, AC (*Fig.* 42.) ou au-delà de AC (*Fig.* 43.) ou au-delà de BM (*Fig.* 44.).

Si PQ passe entre les paralelles BM, AC, je mene entre ces paralelles la perpendiculaire HT qui coupe PQ en E, & à cause que PQ & BM sont paralelles par supposition ; la droite HE perpendiculaire sur BM est aussi perpendiculaire sur PQ ; (*N.* 68.) or, le prolongement ET de la droite HE est encore perpendiculaire sur PQ (*N.* 51.) & ce même prolongement ET est aussi perpendiculaire sur AC, puisque la ligne HET est perpendiculaire sur AC ; donc les droites PQ, AC sont paralelles (*N.* 68.).

Si PQ paralelle à BM est au-delà de AC, je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE, & la partie HT de cette perpendiculaire, sera perpendiculaire sur AC, à cause que BM, AC sont paralelles : (*N.* 51.) or, le prolongement TE de HT est encore perpendiculaire sur AC, (*N.* 51.) & le même prolongement est perpendiculaire sur PQ, puisque la ligne entiere HE est perpendiculaire sur PQ ; donc les lignes AC, PQ sont paralelles, (*N.* 68.) enfin si PQ paralelle à BM est au-delà de BM (*Fig.* 44.) je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE, & par conséquent le prolongement HT de cette perpendiculaire étant encore perpendiculaire sur BM (*N.* 51.) sera aussi perpendiculaire sur AC paralelle à BM (*N.* 68.) donc la ligne droite EHT sera perpendiculaire sur PQ & AC, & ces deux droites seront paralelles (*N.* 68.).

82. COROLLAIRE. *Donc si deux droites* BM, AC *sont paralelles à une troisiéme* PQ, *elles sont paralelles entr'elles.* Car, 1°. Si la droite PQ est entre les deux BM, AC, (*Fig.* 42.) je prens sur PQ un point E, duquel j'éleve de part & d'autre des perpendiculaires sur PQ qui aillent couper les droites BM, AC; ainsi, à cause que BM & PQ sont paralelles, la perpendiculaire EH sera aussi perpendiculaire sur BM (*N.* 68.) & à cause que AC & PQ sont aussi paralelles, la perpendiculaire ET sera aussi perpendiculaire sur AC : (*N.* 68.) or, les deux perpendiculaires EH, ET sur PQ ne font qu'une même ligne droite HE : (*N.* 51.) donc, à cause que cette droite HE est perpendiculaire sur les deux BM, AC, ces deux lignes sont paralelles, (*N.* 68.) 2°.

Si la droite PQ est au-delà des deux BM, AC : par exemple, au-delà de AC, (*Fig.* 43.) je mene entre PQ & la paralelle BM la perpendiculaire EH, & à cause que AC est aussi paralelle à PQ, la partie ET de la perpendiculaire EH sera aussi perpendiculaire sur AC; (*N.* 68.) donc le prolongement TH de la partie ET étant encore perpendiculaire sur AC de même qu'il l'est sur BM, les droites BM & AC seront paralelles, (*N.* 68.) & on démontreroit la même chose si PQ étoit au-delà de BM.

83. PROPOSITION XII. *Si d'un point quelconque* A (Fig. 45.) *pris hors d'une droite* BM *prolongée même à l'infini, on mene une perpendiculaire sur cette droite, & plusieurs inclinées*, AB, AD, AH, &c. *la perpendiculaire sera toujours du côté des moindres Angles que les obliques font avec la droite* BM, *& les obliques les plus longues seront les plus inclinées.*

Du point H où l'oblique AH coupe la droite BM, j'éleve la perpendiculaire HL laquelle laissera le point A sur sa gauche ou sur sa droite; car si elle passoit par A, elle auroit les deux points H, A communs avec la droite AH, & par conséquent elle seroit la même que l'oblique AH (*N.* 34.) & ne seroit pas perpendiculaire sur BM; supposons donc que le point A soit à gauche de HL, les angles LHB, LHM que la perpendiculaire fait sur BM sont droits, (*N.* 51.) par conséquent ils valent ensemble deux droits, de même que les angles de suite AHB, AHM que l'oblique AH fait avec la même droite BM: (*N.* 49.) or, à cause que le côté AH de l'angle AHB est à gauche de la perpendiculaire, l'angle AHB est moindre que l'angle droit LHB; donc l'autre angle AHM est plus grand que l'autre angle droit LHM; ainsi l'angle AHB est le plus petit des deux angles que l'inclinée AH fait sur BM; maintenant si la perpendiculaire abaissée du point A sur BM coupoit cette droite du côté du plus grand angle AHM, il faudroit qu'elle coupât auparavant la perpendiculaire HL en quelque point S, & partant, il s'ensuivroit que d'un même point S pris hors d'une droite BM, on pourroit mener deux perpendiculaires SH, SM; ce qui est impossible; (*N.* 52.) donc il faut que la perpendiculaire menée du point A coupe BM en quelque point E du côté du moindre angle AHB que l'oblique AH fait avec BM, & ainsi des autres; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soient les deux obliques AB, AD du même côté de la perpendiculaire AB; du point B où la plus éloignée coupe la ligne BM, je

mene une droite BR paralelle à l'autre oblique AD; ainsi à cause que BM coupe les paralelles BR, DA, les angles du même côté RBM, ADM sont égaux; (*N.* 71.) or, à cause que l'oblique BA coupe ces deux paralelles, l'angle ABM est moindre que l'angle RBM; donc il est aussi plus petit que l'angle ADM, & partant l'oblique AB plus longue que l'oblique AD, est aussi plus inclinée sur BM que AD.

Si l'oblique la plus longue AB est du côté de B par rapport à la perpendiculaire AE, & que l'autre oblique plus courte AH soit de l'autre côté, je prends de ce même côté une oblique AM égale à l'oblique AB; ainsi les distances EB, EM du pied de la perpendiculaire AE aux points B, M des obliques sont égales (*N.* 54.) & les angles égaux AEB, AEM ont les côtés AE, EB égaux chacun à chacun aux côtés AE, EM : donc l'angle ABM fait avec le côté BE par la ligne AB qui joint les extrémités des côtés du premier angle AEB, est égal à l'angle AME fait avec le côté ME par la ligne AM qui joint les extrémités des côtés du second angle AEM : (*N.* 47.) or, à cause que l'oblique AM est plus grande que l'oblique AH qui est du même côté, elle est aussi plus inclinée sur BM que AH, comme nous venons de le prouver; donc l'oblique AB qui est autant inclinée que l'oblique AM, est aussi plus inclinée que AH qui est plus courte qu'elle, ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

84. COROLLAIRE. *Donc les obliques égales sont également inclinées sur* BM, *& font avec elles des angles égaux;* ce qu'on démontrera, comme nous avons fait à l'égard des obliques égales AB, AM.

85. *REMARQUE.* On a toujours reproché à Euclide d'avoir pris pour axiome *que deux lignes qui ne sont pas paralelles, étant prolongées de part & d'autre doivent se couper*, & la raison en est, a-t-on dit, parce qu'il y a dans la Géométrie des lignes qui s'approchent de plus en plus, & qui cependant ne se coupent jamais, & que d'ailleurs Euclide pouvoit démontrer cet axiome : or, si ce reproche étoit légitime, on pourroit le faire aussi à quiconque avanceroit sans preuve que *deux lignes droites qui se coupent, s'éloignent de plus en plus entr'elles, à mesure qu'elles s'éloignent du point où elles se coupent & que deux lignes qui sont plus proches d'un côté que d'un autre, s'éloignent de plus en plus, en allant de la moindre distance à la plus grande, & s'approchent de plus en plus, en allant de la plus grande distance à la moindre.* Car ces deux propositions peuvent se

démontrer; & d'ailleurs il y a dans la Géométrie des lignes qui n'ont pas ces propriétés; afin donc qu'on ne m'accuse pas d'user de suppositions, & pour faire voir qu'on peut fort bien prouver ce qu'on avance, sans avoir recours à la méthode, sans ordre, dont Euclide s'est servi; voici comment je démontre ces trois propositions.

86. PROPOSITION. XIII. *Si deux lignes droites se coupent, elles s'éloignent entr'elles de plus en plus, à mesure qu'elles s'éloignent du point où elles se coupent.*

Les deux droites AB, AC (*Fig.* 46.) se coupent en A; si l'on veut que ces droites ne s'éloignent pas de plus en plus, à mesure qu'elles s'éloignent du point A, il faudra donc qu'il se trouve sur AB des points tels que D & E qui soient également éloignés de la droite AC, ou dont le plus éloigné E du point A se trouve plus proche de la droite AC que le moins éloigné D.

Si l'on veut donc que les points D, E soient à égale distance de AC, la droite DE qui passera par ces deux points sera paralelle à AC, (*N.* 78.) or, cette droite DE est partie de la droite AB qui coupe AC; donc il s'ensuivroit qu'une droite AB auroit une partie DE paralelle à une droite AC, & une autre partie DA qui couperoit cette même droite; ce qui est impossible, puisque deux paralelles prolongées à l'infini, sont toujours à égale distance.

Si l'on veut que le point E de la droite AB, lequel est plus éloigné du point A que le point D soit cependant plus proche de la droite AC que le point D, je mene du point D une droite DM paralelle à AC, & par conséquent tous les points de cette paralelle seront autant distans de la droite AC que le point D; & comme on suppose que le point E est plus proche de AC que le point D, il faudroit nécessairement que le point E fut entre les paralelles DM, AC comme en P; or la droite AB coupe la paralelle DM en D, & par conséquent cette droite étant parvenuë en D, passe au delà de la paralelle; donc, afin qu'elle passât par P, il faudroit qu'elle coupât la paralelle DM en un autre point; mais une droite ne peut pas couper un autre droite en deux points; (*N.* 35.) donc il n'est pas possible que le point E soit plus proche de AC que le point D; ainsi il faut nécessairement que tous les points de AB s'éloignent de plus en plus de AC, à mesure qu'ils s'éloignent du point A.

87. PROPOSITION XIV. *Si deux droites* AB, CD (Fig. 47.)

ne sont pas partout à égale distance, ces droites prolongées à l'infini, s'éloignent de plus en plus, en allant de la petite distance vers la grande, & s'approchent de plus en plus en allant du sens contraire.

Le point A de la ligne AB est plus proche de la ligne CD que l'autre point B; je mene du point A la droite AM paralelle à CD, & dont par conséquent tous les points sont autant éloignés de CD que le point A: ainsi le point B de la ligne AB, étant plus éloigné de CD que le point A, la ligne AB est en deçà de la ligne AM par rapport à CD. Or, AB coupe la ligne AM; donc par la proposition précédente, tous ses points en allant de A en B & au-delà de B, s'éloignent de plus en plus de CD, paralelle à AM.

Maintenant, si je prolonge BA au-delà du point A en S, & AM aussi au-delà de A en R, le prolongement AS, de BA passera de l'autre côté de la paralelle MR qu'elle coupe, & par conséquent le prolongement sera entre les deux paralelles RM, CD, & comme AS s'éloignera de plus en plus de AR, à mesure qu'elle s'éloignera du point A par la proposition précédente, il s'ensuit que AS s'approchera de plus en plus de CD prolongée; donc, &c.

88. PROPOSITION XV. *Si deux droites* AB, CD (Fig. 48.) *ne sont pas partout à égale distance, ces deux droites prolongées du côté de leurs moindres distances doivent se couper.*

Des points A, B de la droite AB, j'abaisse sur la droite CD prolongée, s'il le faut, les perpendiculaires AR, BD, & trouvant que AR est plus courte que BD, je vois que le point A de la ligne AB est plus proche de CD que l'autre point B. Du point le plus proche A, j'abaisse sur BD la perpendiculaire AM; ainsi la ligne BD étant perpendiculaire sur les deux AM, CD, ces deux lignes sont paralelles, (*N.* 68.) & par conséquent le point M de la ligne AM étant à même distance de la ligne CD que le point A, doit être moins éloigné de CD que le point B de la droite AB; c'est-à-dire que la perpendiculaire AM coupe sur BD une partie BM. Je porte la partie BM sur BD plusieurs fois jusqu'à ce que je passe au-delà du point D; par exemple, ici de M en N & de N en P qui est au-delà de D; ce que je puis toujours faire, à cause que la ligne BD n'étant pas infinie, puisqu'elle pourroit encore être prolongée au-delà des points B & D, ne sauroit contenir sa partie BM une infinité de fois; des points de division N, P, j'éléve des perpendiculaires indéfinies NS, PV sur BP, lesquelles

feront paralelles aux droites AM, CD, à caufe que BD eft perpendiculaire fur toutes ces lignes, (*N.* 68.) cela pofé.

Les droites ARL, BDP étant perpendiculaires fur DC font paralelles entr'elles (*N.* 68.) & perpendiculaires fur les droites AM, NS, PV paralelles à CD; (*N.* 68.) ainfi leurs parties AQ, MN comprifes entre les paralelles AM, NS font égales, (*N.* 77.) & comme MN eft égal à BM par la conftruction, AQ eft auffi égal à BM; prenant donc fur NS la partie QS égale à MA, les angles BMA, AQS font égaux & ont les côtés égaux chacun à chacun; c'eft pourquoi menant la ligne SA qui joint les extrémités des côtés de l'angle AQS, cette ligne fera avec le côté AQ de cet angle AQS un angle SAQ égal à l'angle, ABM fait avec le côté BM de l'autre angle BMA par la droite AB; (*N.* 47.) or, la ligne BA étant entre les deux paralelles BD, AR, cette ligne prolongée du côté de A feroit en A avec la paralelle AQ un angle égal à l'angle du même côté ABM, (*N.* 71.) & par conféquent égal à l'angle SAQ; donc le prolongement de BA ne peut pas être différent de la ligne AS, & la ligne BA prolongée doit couper la droite SN.

Je mene du point S la droite ST perpendiculaire fur CD prolongée, & cette droite ST étant prolongée en X, eft auffi perpendiculaire fur PV paralelle à DT; (*N* 68.) de plus, la même droite ST fera paralelle à BP qui eft auffi perpendiculaire fur DT; (*N.* 68.) ainfi les droites SX, NP perpendiculaires entre les paralelles SN, TD font égales, (*N.* 67.) & à caufe de NP=BM nous aurons SX=BM; prenant donc fur PV la partie XV égale à AM, & menant la droite VS, les angles BMA SXV font égaux, & ont les côtés égaux chacun à chacun; c'eft pourquoi je prouverai comme ci-deffus, que l'angle ABM eft égal à l'angle VSX; mais fi la droite BA déja prolongée en S, étoit encore prolongée au-delà de S, elle feroit en S avec la droite SX paralelle à BP un angle égal à l'angle ABP, (*N.* 71.) & par conféquent égal à l'angle VSX; donc le fecond prolongement SV de la droite AB ne doit pas être différent de la droite SV, & partant AB prolongée en S puis au-delà de S doit couper la droite PV; donc, à plus forte raifon, la droite AB prolongée coupera en quelque point E la droite CD prolongée, puifque celle-ci étant toujours entre fes deux paralelles SN, PV, la droite AB ne peut couper SN & PV fans couper DE.

CHAPITRE III.

Des Triangles & des Figures de plusieurs côtés considérés par rapport à leur côtés & à leurs Angles.

89. DÉFINITIONS. Tout espace plan renfermé par plusieurs lignes, se nomme *Figure*; si les lignes qui renferment cet espace sont droites, la figure se nomme *Figure rectiligne*; si ces lignes sont courbes, la figure est dite *curviligne*, & si les unes sont droites & les autres courbes, la figure se nomme *mixtiligne*. Nous ne parlerons ici que des rectilignes.

90. La plus simple de toutes les figures rectilignes, est celle qui est comprise sous trois lignes droites & qu'on nomme *Triangle;* car il est clair qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un espace.

91. Le triangle considéré par rapport à ses côtés est *Equilatéral* lorsque ses trois côtés sont égaux; *Isocele* lorsqu'il n'y en a que deux égaux, & *Scalene* lorsque ses trois côtés sont inégaux.

92. Le triangle considéré par rapport à ses angles, se nomme *Rectangle* lorsque l'un de ses angles est droit, *Ambligone* ou *Obtusangle* lorsqu'il y a un angle obtus; *Oxigone* ou *Acutangle*, lorsque ses trois angles sont aigus.

93. La *base* d'un triangle est le côté sur lequel on conçoit qu'il s'appuye, & il est indifférent de prendre pour base lequel on voudra de ses côtés; mais ordinairement dans le triangle rectangle, on prend pour base le côté opposé à l'angle droit, & cette base se nomme *Hypothénuse*, & dans un triangle isocele, on prend pour base le côté qui est inégal aux autres.

94. La hauteur d'un triangle ABC (*Fig.* 49. 50.) est la perpendiculaire BD abaissée sur la base AC de l'angle opposé B, qu'on nomme alors le *sommet* du triangle, & il n'importe pas que cette perpendiculaire tombe sur la base en dedans du triangle, (*Fig.* 49.) ou sur la base prolongée en dehors; (*Fig.* 50.) car, par le mot de *hauteur*, on entend la distance du sommet à la base, laquelle doit se mesurer par le chemin le plus court, c'est-à-dire par la perpendiculaire.

95. Lorsqu'on prolonge l'un des côtés AC (*Fig.* 50.) d'un

triangle, l'angle BCD fait par son prolongement CD, avec son côté voisin BC, se nomme *Angle externe*, & les trois angles du triangle se nomment *Angles internes*.

95. PROPOSITION XVI. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 49.) *deux côtés quelconque pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme.*

Le côté AB est droit entre ses extrêmités A, B, donc il est plus court que les deux autres BC, AC, qui pris ensemble se terminent aux mêmes extrêmités, & ainsi des autres.

96. PROBLEME. *Avec trois lignes droites données construire un triangle.*

Si les trois lignes données ne sont pas telles qu'en les prenant deux à deux, elles soient toujours plus grande que la troisiéme, le Problême est impossible, car c'est une condition nécessaire dans tout triangle (*N.* 95.) mais si cette condition est remplie, je prens l'une des droites données AC (*Fig.* 51.) pour base; de l'extrêmité A prise pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la seconde des lignes données, je décris un arc PQ; de l'autre extrêmité C prise pour centre, je décris un autre arc RS du même côté que l'arc PQ; & comme les deux rayons pris ensemble sont plus grand que la base AC, les deux arcs PQ, RS se coupent en un seul point B hors de la ligne AC (*N.* 59.). C'est pourquoi menant du point B les droites BA, BC le triangle ABC est le triangle demandé; car le rayon BA de l'arc PQ est égale à la seconde des lignes données, le rayon BC de l'arc RS est égal à la troisiéme, & la base AC est égale à la premiere.

97. PROPOSITION XVII. *Dans tout triangle* (Fig. 52.) *l'angle externe* BCD *vaut les deux internes opposés* CBA, BAC, *&* *les trois angles du triangle pris ensemble valent deux angles droits.*

De l'angle B opposé au côté polongé AC, je mene MN parallelle à ce côté AC; l'angle BCD est donc égal à son alterne MBC (*N.* 70); or l'angle MBC vaut les deux angles MBA, ABC, & l'angle MBA est égal à son alterne BAC, donc l'angle externe BCD égal à l'angle MBC, est égal aux deux internes opposés BAC, ABC ce qu'il falloit 1°. démontrer:

L'angle BCA est égal à son alterne CBN & l'angle BAC est égal à son alterne MBA, donc les trois angles MBA, ABC, CBN valent ensemble les trois angles du triangle; décrivant donc du sommet commun B pris pour centre & avec un rayon quelconque une circonference de cercle, les trois arcs MR, RS, SN, compris entre ces angles & qui sont leur mesure, composent ensemble

ſemble une demi-circonference MRSN, à cauſe que la droite MN qui paſſe par le centre eſt un diametre, ainſi les trois angles pris enſemble vaudront la demi circonference ou deux angles droits, & par conſequent les trois angles d'un triangle valent enſemble deux angles droits; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

98. Corollaires. Donc 1°. *deux angles d'un triangle ſont toujours moindres que deux droits*, puiſque les trois enſemble n'en valent pas davantage. 2°. *Si dans un triangle l'un des angles eſt droit ou obtus, les deux autres ſont chacun aigus*, car s'il s'en trouvoit un autre qui fut droit ou obtus, les trois enſemble vaudroient plus de deux droits. 3°. *Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles ou la ſomme de deux angles égale à la ſomme des deux angles, le troiſiéme angle ſera égal au troiſiéme*; car autrement la ſomme totale des trois angles de l'un des triangles ne feroit pas égale à la ſomme des trois angles de l'autre; & partant l'une ou l'autre de ces ſommes vaudroit plus ou moins de deux droits.

99. Definition. Je dirai que deux triangles ſont *parfaitement égaux*, lorſqu'en les mettant l'un ſur l'autre, les côtés tombent ſur les côtés & les angles ſur les angles, & ce qui me fait ajouter le terme de *parfaitement* à celui d'*égaux*, c'eſt qu'il y a des triangles, qui ſans pouvoir s'ajuſter les uns ſur les autres, ſont cependant égaux, c'eſt-à-dire, que les eſpaces que leurs lignes renferment ſont égaux entr'eux, comme on verra dans la ſuite.

100. Proposition XVIII. *On peut toujours conclure que deux triangles* ABC, abc *ſont parfaitement égaux, ſi l'on ſait que les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun; ou que deux côtés* AB, BC *ſont égaux à deux côtés* ab, bc, *chacun à chacun, & l'angle compris* ABC *égal à l'angle compris* abc, *ou enfin que l'un des côtés* AC *eſt égal à l'un des côtés* ac, *& les angles faits aux extrêmités* A, C *égaux aux angles faits aux extrêmités* a, c.

Si les trois côtés ſont égaux, des extrêmités A, C de la baſe AC priſes pour centres, & avec des rayons égaux aux deux autres côtés AB, BC, je décris des demi-circonferences RBH, SBM du même côté de la baſe AC prolongée de part & d'autre, je fais la même choſe à l'égard de l'autre triangle *abc*; ainſi mettant la baſe AC ſur ſon égale *ac*, les centres A, C des demi-circonferences RBH, SBM, tomberont ſur les centres *a*, *c* des demi-circonferences *rbh*, *sbm*, les rayons AR, CS, ſur les rayons *ar*, *cs* qui leur ſont égaux chacun à chacun; donc les demi-circonferences RBH, SBM, tomberont ſur les demi-circonferences *rbh*,

sbm, & le point B où les deux premieres se coupent sur le point *b* où se coupent les deux dernieres. Donc les droites BA, BC tomberont sur les droites *ba*, *bc*, & partant les deux triangles ABC, *abc* s'ajusteront & seront parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer :

Si les côtés AB, BC sont égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc*, & l'angle compris ABC, égal à l'angle compris *abc*, je mets l'angle ABC sur son égal *abc*, & partant les côtés AB, BC tomberont sur leur égaux *ab*, *bc*, & la droite AC sur la droite *ac*; & les deux triangles seront parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si la base AC est égale à la base *ac*, & les angles faits en A & C égaux chacun à chacun aux angles faits en *a* & *c*, je mets BC sur son égale AC, les angles A & C tomberont sur leur égaux *a* & *c*, & partant les droites AB, BC, sur les droites *ab*, *bc*, & le point B où les deux premiéres se coupent sur le point *b* où les deux autres se coupent; ainsi les deux triangles s'ajusteront & seront parfaitement égaux.

101. COROLLAIRE. *On ne peut conclure que deux triangles sont parfaitement égaux, quoique l'on sache que les trois angles sont égaux aux trois angles chacun à chacun, ou qu'un côté & un angle sont égaux à un côté & un angle, ou qu'un côté & deux angles sont égaux à un côté & deux angles, à moins que les deux angles de part & d'autre ne soient faits aux extrémités des côtés égaux.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 54); je coupe l'un des côtés AB en un point D, & de ce point je mene une droite DE paralelle à l'un des côtés AC, & qui coupe l'autre côté BC en un point E; ainsi le côté AB coupant les deux paralelles AC, DE, fait les angles BAC, BDE du même côté égaux (*N.* 71); de même le côté BC coupant les deux paralelles AC, DE, les angles BCA, BED du même côté sont égaux. Or l'angle B est commun aux deux triangles ABC, DBE, donc ces deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun; mais il est visible que ces deux triangles ne sont pas égaux, donc on ne peut conclure l'égalité des triangles de l'égalité de leurs angles. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soit le triangle ABC (*Fig.* 55) de l'extrémité C de l'un des côtés, je mene sur tous les points du côté opposé AB prolongé même, des droites CP, CM, & ainsi j'ai les triangles APC, ABC, AMC, & qui sont tous inégaux, car les uns sont parties des au-

tres; cependant tous ces triangles ont le même côté AC, & un angle A commun ; donc de l'égalité d'un côté & d'un angle, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Enfin soit le triangle ABC (*Fig.56.*) dont je suppose que l'angle B n'est pas égal à l'angle C ; je fais en C un angle égal à l'angle B, & la jambe CM de cet angle tombera sur AB prolongé en M, si l'angle B est plus grand que l'angle ACB, & au contraire la jambe CP de l'angle fait en C tombera sur AB entre A & B, si l'angle B est plus petit que l'angle ACB. Or dans l'un & l'autre cas, le triangle ABC, ne sera égal ni au triangle ACM ni au triangle ACP, quoique les uns & les autres de ces triangles ayent un côté AC commun & deux angles égaux ; donc de l'égalité d'un côté & de deux angles quelconques, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

102. PROPOSITION XVIII. *Deux triangles rectangles* ACB, acb (Fig. 57.) *seront toujours parfaitement égaux entr'eux si l'hypothenuse* AB *& l'un des côtés* AC *de l'un sont égaux chacun à chacun à l'hypothenuse* ab *& au côté* ac *de l'autre, ou si les deux côtés* AC, CB, *sont égaux aux côtés* ac, cb *de l'autre ; mais si l'hypothenuse* AB *& le côté* AC *de l'un* (Fig. 58.) *sont égaux aux deux côtés* cb, ac *de l'autre chacun à chacun, les deux triangles ne sont pas parfaitement égaux.*

Si l'Hypothenuse AB & le côté AC sont égaux chacun à chacun à l'hypothenuse *ab* & au côté *ac*, je mets le côté AC sur son égal *ac* & à cause de l'angle droit ACB égal à l'angle droit *acb*, le côté CB tombera sur la direction du côté *cb*, & tous les deux seront égaux, car si CB étoit plus grand que *cb*, le point B tomberoit au-delà de *b* par exemple en *e* & l'hypothenuse AB tomberoit sur *ae*; & comme elle seroit plus éloignée de la droite *ac* perpendiculaire sur *ce* que l'hypothenuse *ab*, elle seroit plus longue que cette hypothenuse (*N.* 53.) ce qui est contre la supposition. De même si CB étoit plus courte que *cb*, son point B tomberoit entre *b* & *c*, & l'hypothenuse AB couperoit *cb* en un point plus proche de la perpendiculaire que l'hypothenuse *ab*, d'où il s'ensuivroit que AB seroit moindre que *ab* (*N.* 53.) ce qui est encore contre la supposition; donc CB doit tomber sur *cb* & les deux triangles doivent être parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si les deux côtés AC, CB sont égaux chacun à chacun aux

deux côtés *ac*, *cb* les deux triangles seront parfaitement égaux à cause de l'angle droit compris B égal à l'angle droit compris *b* (*N.* 100.) Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si l'Hypothenuse AB (*Fig.* 58.) & le côté AC sont égaux chacun à chacun aux côtés *cb*, *ac*; le côté CB étant perpendiculaire sur AC est plus court que l'hypothenuse AB (*N.* 59.) ainsi dans l'autre triangle *abc*, le côté *cb* égal à AB, est plus grand que le côté CB du premier triangle, & comme *cb* étant perpendiculaire sur *ac* est plus petit que l'oblique *ab*, il s'ensuit que l'hypothenuse *ab* du second triangle est plus grande que le côté AC du premier, ainsi ces deux triangles n'ayant pas les côtés égaux chacun à chacun ne sont pas parfaitement égaux. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

103. PROPOSITION XIX. *Dans tout triangle isoscele les deux angles sur la base, c'est-à-dire sur le côté inégal sont égaux; dans tout triangle équilateral les trois angles sont égaux; dans tout triangle scalene, les trois angles sont inégaux, le plus grand est celui qui est opposé au plus grand côté, & le moindre est celui qui est opposé au plus petit côté.*

Si le triangle ABC (*Fig.* 59.) est isoscele & que AC soit le côté inégal, les deux côtés égaux AB, BC sont deux obliques égales menées du point A sur la droite AC; (*N.* 54.) donc ces obliques sont également inclinées sur AC (*N.* 84.), & partant les angles BAC, BCA sur la base sont égaux. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si le triangle ABC (*Fig.* 60.) est équilateral, je le considere comme isoscele sur l'un de ses côtés AC, & par conséquent les angles A, C sont égaux, je le considere aussi comme isoscele sur le côté AB, & partant les angles A, B, sont égaux, donc les trois angles A, C, B sont égaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si le triangle ABC est scalene (*Fig.* 61.), & que le côté AC soit le plus grand, & le côté AB le moindre. Je prolonge le côté moyen en E jusqu'à ce que CE soit égal à AC; & je tire la ligne EA. Le triangle ACE est donc isoscele & les angles CEA, CAE sont égaux. Or l'angle ABC externe au triangle AEB étant égal aux deux internes opposés AEB, EAB (*N.* 97.) est plus grand que le seul AEB ou CEA, donc il est aussi plus grand que l'angle CAE, & à plus forte raison est-il plus grand que l'angle CAB qui n'est qu'une partie de l'angle CAE. Ainsi dans le triangle scalene ABC l'angle ABC opposé au plus grand côté AB est plus grand que l'angle CAB opposé au côté moyen CB.

Je prolonge le petit côté BA en M, jufqu'à ce que BM foit égal au côté moyen BC, & je mene la droite MC, le triangle MBC eft donc ifofcele & l'angle BMC eft égal à l'angle BCM ; or l'angle BAC externe au triangle AMC étant égal aux deux internes oppofés BMC, ACM (*N.* 97.) eft plus grand que le feul AMC ou BMC, donc il eft plus grand auffi que l'angle BCM, & à plus forte raifon eft-il plus grand que l'angle BCA qui n'eft qu'une partie de l'angle BCM, ainfi dans le triangle BAC fcalene, l'angle BAC oppofé au côté moyen BC eft plus grand que l'angle BCA oppofé au plus petit côté ; mais nous venons de voir que l'angle ABC oppofé au plus grand côté AC eft plus grand que l'angle BAC oppofé au moyen, donc à plus forte raifon l'angle ABC eft plus grand que l'angle BCA oppofé au petit. Donc, & ce qu'il falloit 3°. démontrer.

104. COROLLAIRE I. *En général dans tout triangles les plus grands angles font oppofés aux plus grands côtés.* Nous venons de démontrer ceci à l'égard du triangle fcalene, nous avons vû auffi que dans le triangle équilateral tous les angles font égaux, à caufe que les côtés aufquels ils font oppofés font égaux ; & que dans le triangle ifofcele les angles oppofés aux côtés égaux font égaux ; il ne refte donc qu'à faire voir que dans le triangle ifofcele, l'angle oppofé à la bafe eft plus grand que chacun des deux égaux, fi la bafe eft plus grande que chacun des côtés égaux, & plus petit fi la bafe eft plus petite. Ce que je fais ainfi :

Si la bafe AC (*Fig.* 62.) du triangle ifofcele ABC eft moindre que chacun des côtés égaux AB, BC, je prolonge cette bafe en D, jufqu'à ce que AD foit égal à AB, & je mene la droite BD; ainfi le triangle BAD eft ifofcele & les angles ABD, ADB font égaux; or l'angle ACB externe au triangle CBD étant égal aux deux internes oppofés CDB & CBD (*N.* 97.) eft plus grand que CDB ou ADB, donc l'angle ACB eft auffi plus grand que l'angle ABD, & à plus forte raifon plus grand que l'angle ABC qui n'eft qu'une partie de l'angle ABD ; ainfi dans le triangle ifofcele ABC l'angle ACB oppofé au côté AB plus grand que la bafe AC eft plus grand que l'angle ABC oppofé à cette bafe.

Si la bafe AC (*Fig.* 63.) eft plus grande que chacun des deux côtés égaux AB, BC ; je prolonge l'un des côtés AB jufqu'à ce que AD foit égal à AC ; ainfi dans le triangle ifofcele DAC, j'ai l'angle ADC égal à l'angle ACD, & comme l'angle ABC externe au triangle CBD eft plus grand que le feul interne CDB,

puifqu'il vaut les deux internes oppofés (*N.* 97.) ce même angle ABC eft plus grand auffi que l'angle ACD égal à CDB ou ADC, & à plus forte raifon plus grand que l'angle ACB qui n'eft qu'une partie de l'angle ACD. Ainfi dans le triangle ifofcele ABC, l'angle ABC oppofé à la bafe AC plus grande que chacun des côtés égaux AB, BC eft plus grand que l'angle ACB oppofé au côté AB. Donc, & ce qu'il falloit démontrer.

105. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle les plus grands côtés font oppofés aux plus grands angles.* Dans le triangle fcalene ABC, (*Fig.* 61.) l'angle B eft le plus grand, l'angle A eft le moyen, & l'angle C eft le moindre. Si le côté BC oppofé à l'angle moyen étoit égal au côté AC oppofé au plus grand, le triangle feroit ifofcele & les angles A & B feroient égaux (*N.* 103.) ce qui eft contre la fuppofition; & fi BC étoit plus grand que AC l'angle A oppofé à BC feroit plus grand que l'angle B oppofé à AC (*N.* 104.) ce qui eft encore contre la fuppofition; Donc il faut néceffairement que BC foit moindre que CA. De même fi le côté AB oppofé au moindre angle C étoit égal au côté BC oppofé à l'angle moyen A, le triangle feroit ifofcele, & les angles A, C feroient égaux (*N.* 103.) ce qui eft contre la fuppofition, & fi AB étoit plus grand que BC, l'angle C oppofé à AB feroit plus grand que l'angle A oppofé à BC (*N.* 104.) ce qui eft encore contre la fuppofition, donc AB doit être plus petit que BC. Donc, &c.

106. COROLLAIRE III. Donc l'*hypothenufe d'un triangle rectangle eft plus grande que chacun des deux autres côtés.* Car elle eft oppofée au plus grand angle, & par la même raifon dans tout triangle obtus angle, le côté oppofé à l'angle obtus eft le plus grand.

107. PROPOSITION XIX. *Dans tout triangle ifofcele la perpendiculaire menée fur la bafe du fommet de l'angle oppofé, divife cette bafe en deux parties égales; dans tout triangle équilateral les perpendiculaires menées des fommets des angles fur les côtés oppofés divifent chacun en deux également; & dans tout triangle fcalene, les perpendiculaires menées des angles fur les côtés oppofés divifent ces côtés chacun en deux parties inégales.*

Si le triangle ABC (*Fig.* 59.) eft ifofcele & que le côté AC foit la bafe, les deux côtés BA, BC, font deux obliques égales menées fur AC du point extérieur B; donc la perpendiculaire menée du même point fur AC doit couper AC en un point également éloigné des points A, C (*N.* 54.), & par conféquent

AC doit être coupée en deux également. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si le triangle ABC (*Fig.* 60.) est équilateral, je considére ce triangle comme isoscele sur le côté AC, & par conséquent la perpendiculaire menée de l'angle opposé B sur AC coupera AC en deux également. Par la même raison, si je le considére comme isoscele sur le côté AB, le côté sera coupé en deux également par la perpendiculaire menée de l'angle opposé C, & de même de l'autre côté BC. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Enfin, si le triangle ABC (*Fig.* 61.) est scalene, les deux côtés BA, BC seront deux obliques inégales menées sur AC d'un point extérieur B, donc la perpendiculaire menée du même point B sur AC ne coupera pas AC en un point également éloigné des extrêmités A, C des obliques, car autrement ces obliques seroient égales (*N.* 54.) donc AC sera coupée en deux parties inégales, & de même des autres côtés. Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

108. Proposition XX. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 64.) *ont les côtés* AB, BC *égaux chacun à chacun aux côtés* ab, bc, *mais que l'angle* B *compris par les deux premiers, soit moindre que l'angle* b *compris par les deux autres, la base* AC *du premier est plus petite que la base* ac *du second, & si l'angle* B *est plus grand que l'angle* b, *la base* AC *est plus grande que la base* ac.

Je fais en B avec la jambe AB un angle ABD égal à l'angle *b*, & je fais la jambe BD égale au côté *bc* du second triangle *abc*. Je mene les droites AD, DC; les triangles ABD, *abc* sont parfaitement égaux à cause des côtés AB, BD égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc* & de l'angle ABD égal à l'angle *abc* (*N.* 100); donc la base AD est égale à la base *ac*. Or le triangle CBD est isoscele à cause du côté BD égal à *bc*, lequel est égal à BC; donc l'angle BDC est égal à l'angle BCD (*N.* 103.) mais l'angle DCA est plus grand que l'angle BCD qui n'est qu'une de ses parties, donc l'angle DCA est aussi plus grand que l'angle BDC & à plus forte raison plus grand que l'angle ADC qui n'est qu'une partie de l'angle BDC. Ainsi dans le triangle ADC l'angle ACD étant plus grand que l'angle CDA, le côté AD opposé à l'angle ACD est plus grand que le côté AC opposé à l'angle ADC (*N.* 104.) & partant la base AC du premier triangle, est plus petite que la base AD ou *ac* du second.

Que si l'angle B étoit plus grand que *b*, on prouveroit de même que nous venons de faire, que la base *ac* opposée au plus

Des Figures comprifes fous plus de trois côtés.

111. Toute figure de quatre côtés, fe nomme *Quadrilatere.*

112. Si les quatre côtés font égaux & les quatre angles droits, le quadrilatere fe nomme *Quarré.* D'où il fuit que les côtés oppofés d'un quarré (*Fig.* 65.) font paralelles entr'eux, car les côtés AB, DC du quarré ABCD étant perpendiculaires fur le côté AD à caufe des angles droits A, D font paralelles entr'eux (*N.* 68.) & de même les côtés oppofés AD, BC étant perpendiculaires fur le côté CD à caufe des angles droits D, C font paralelles.

113. Si les quatre angles font droits fans que les quatre côtés foient égaux, le quadrilatere fe nomme *Rectangle*; & alors les côtés oppofés font égaux; car les côtés oppofés AB, DC du rectangle ABCD (*Fig.* 66.) étant paralelles entre les côtés oppofés AD, BC qui font auffi paralelles à caufe des angles droits, doivent être égaux (*N.* 77.) & par la même raifon les deux côtés oppofés AD, BC doivent être égaux.

114. Si les quatre angles ne font pas droits ni les quatre côtés, mais que les côtés oppofés foient paralelles, le quadrilatere fe nomme *Paralellogramme* (*Fig.* 67.) & alors les côtés oppofés font égaux par la raifon que nous en avons donnée au fujet du rectangle (*N.* 113.)

115. Le *Rhombe* ou *Lozange* (*Fig.* 68.) eft un quadrilatere qui n'a pas les angles droits, mais dont les quatre côtés font égaux; & dans cette figure les côtés oppofés font paralelles, car menant de deux angles oppofés B, D la droite BD, le Rhombe eft divifé en deux triangles parfaitement égaux BAD, BCD, puifqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (*N.* 100.); & de plus ces deux triangles étant ifofceles, ont les angles fur la bafe BD égaux (*N.*73.); ainfi ADB étant égal à fon alterne CBD, les côtés AD, BC du Rhombe font paralelles (*N.* 73.); de même l'angle ABD étant égal à fon alterne CDB, les côtés AB, CD font auffi paralelles.

116. Le *Trapeze* (*Fig.* 69.) eft un quadrilatere dont les quatre angles ne font pas tous égaux, & les côtés oppofés ne font pas paralelles; & le *Trapezoïde* (*Fig.* 70.) eft un quadrilatere dont les quatre angles ne font pas tous égaux, & dont il n'y a que deux côtés qui foient paralelles.

117. Dans tout quadrilatere (*Fig.* 65. 66. 67. 68. 69. 70.) la

droite BD menée d'un angle B à son opposé D, se nomme *Diagonale.*

Les figures qui ont plus de quatre côtés, se nomment en général *Polygones*, & en particulier le polygone se nomme *Pentagone*, lorsqu'il a cinq côtés, *Hexagone*; lorsqu'il en a six, *Eptagone*; lorsqu'il en a sept, *Octogone*; lorsqu'il en a huit, *Enneagone*; lorsqu'il en a neuf, *Decagone*; lorsqu'il en a dix, *Undecagone*; lorsqu'il en a onze, *Dodecagone*, lorsqu'il en a douze. Les autres se nomment polygones de 13 côtés, de 14, de 15, de 16, &c.

Lorsque les polygones ont tous les angles & les côtés égaux; ils se nomment *réguliers*, & lorsque cela n'est pas, ils se nomment *irréguliers.*

118. PROPOSITION. XXI. *Tous les quadrilateres* (Fig. 65, 66, 67, 68.) *à l'exception du trapeze & du trapezoïde, sont coupés en deux également par l'une ou l'autre de leur diagonale* AC, BD, *& les deux diagonales se coupent en deux parties égales.*

Par la formation du quarré, du rectangle, du paralellogramme, & du lozange, les côtés opposés sont paralelles & égaux; donc si l'on mene la diagonale BD, les triangles BCD, BAD qu'elle forme avec les côtés sont parfaitement égaux, puisque le côté BC est égal à son opposé AD, le côté CD à son opposé AB, & que le troisiéme côté BD est commun à l'un & l'autre triangle (*N.* 100.); or ces deux triangles composent la figure entiere. Donc la figure est coupée en deux également par la diagonale. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Les deux diagonales BD, AC étant menées, les triangles BOC, AOD opposés au sommet O, ont le côté BC égal au côté AD opposé à BC, l'angle OBC égal à son alterne ODA, & l'angle OCB égal à son alterne OAD; ainsi ces deux triangles ayant un côté égal à un côté, & les angles sur ces côtés égaux chacun à chacun sont parfaitement égaux (*N.* 100.), donc le côté BO du premier triangle opposé à l'angle OCB est égal au côté OD opposé à l'angle OAD égal à l'angle OCB, & partant la diagonale BD est divisée en deux également en O, de même le côté OC du premier triangle opposé à l'angle OBC, est égal au côté OA du second triangle opposé à l'angle ODA, égal à l'angle OBC, & partant la diagonale AC est aussi divisée en deux également en O; ce qu'il falloit 3°. démontrer.

119. PROPOSITION XXII. *Tout polygone régulier ou irrégulier en y comprenant le triangle & le quadrilatere peut être divisé en au-*

tant de triangles qu'il a de côtés, ou en autant de triangles moins un qu'il a de côtés, ou en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés, mais le triangle n'est pas susceptible de ce dernier cas.

Soit le pentagone irrégulier ABCDE (*Fig.* 72.). Je prens un point O dans l'espace que ses côtés renferment, & de ce point, je mene aux angles les droites OA, OB, OC, OD, OE, & le pentagone est divisé en autant de triangles qu'il a de côtés, ce qui est évident, & de même des autres polygones réguliers ou irréguliers.

Soit le même pentagone ABCDE (*Fig.* 73.). Je prens un point R sur l'un de ses côtés BC, & qui ne soit ni l'une ni l'autre des extrêmités B, C. Je mene de ce point des droites RA, RE, RD à tous les angles où j'en puis mener, ce qui divise le pentagone en triangles. Or le premier triangle RBA, emporte le côté AB du pentagone, & la partie BR du côté BC, & le dernier triangle RCD emporte le côté CD du pentagone, & la partie RC du côté de BC; ainsi il faut trois côtés du pentagone pour les deux triangles RBA, RCD, & au contraire il ne faut qu'un côté du pentagone pour chacun des autres triangles RAE, RED. C'est pourquoi comme le pentagone n'a que cinq côtés, il ne doit y avoir que quatre triangles, c'est-à-dire 5 — 1 ou autant qu'il y a de côtés moins un, & ainsi des autres.

Soit encore le même pentagone ABCDE (*Fig.* 74.); de l'un de ses angles B, je mene des droites BE, BD aux autres angles où j'en puis mener, ce qui divise le pentagone en triangles; or les deux triangles extrêmes BAE, BCD, emportent chacun deux côtés du pentagone, & par conséquent il faut qu'il y ait deux triangles de moins qu'il n'y a de côtés, & il est visible que le triangle ou polygone des trois côtés est le seul qui ne peut pas se diviser de cette troisiéme façon.

120. PROPOSITION XXIII. *Tout polygone régulier* ABCDEF (Fig. 75.) *peut se diviser en autant de triangles isosceles & parfaitement égaux qu'il a de côtés, & les sommets de ces triangles seront tous en un même point O également éloignés de tous les angles du polygone.*

Je divise tous les angles en deux également par les droites AO, BO, CO, DO, &c. ainsi à cause que tous les angles du polygone sont égaux puisqu'il est régulier, tous les angles OAB, OAF, &c. que les lignes AO, BO, &c. font avec les côtés du polygone, sont aussi égaux. Or chaque angle BAF, &c. du po-

lygone vaut moins que deux droits, puisque cet angle & son angle de suite RAF ne valent que deux droits (*N.* 49.); donc les angles OAB &c. faits par les droites AO, BO, &c. avec les côtés du polygone sont moindres chacun qu'un droit; mais si le côté AB coupoit les deux droites AO, BO, de façon que les angles internes du même côté OAB, OBA fussent ensemble égaux à deux droits, les lignes AO, BO seroient paralelles (*N.* 73), donc puisque ces deux angles OAB, OBA, valent ensemble moins de deux droits, les deux lignes AO, BO doivent s'approcher, & par conséquent se couper en un point O, & le triangle AOB doit être isoscele à cause des angles égaux sur la base AB. On prouvera de même que les lignes BO, CO doivent se couper & former un triangle isoscele BOC, à cause des angles égaux sur la base BC. Or les triangles isosceles AOB, BOC ayant la base AB égale à la base BC, & les deux angles sur la base AB égaux chacun à chacun aux deux angles sur la base BC, sont parfaitement égaux (*N.* 100.); donc les deux côtés égaux AO, BO du premier doivent être égaux aux côtés égaux BO, CO du second, & par conséquent le côté BO doit être commun aux deux triangles, & le point O doit être leur sommet commun; & on démontrera de la même façon que les autres triangles COD, &c. sont isosceles & parfaitement égaux aux deux dont nous venons de parler, & que le sommet O doit être commun à tous; & delà il suit que tous les côtés AO, BO, &c. de ces triangles étant égaux, le point O est également éloigné de tous les angles du polygone.

121. Corollaire. Donc si du point O pris pour centre & avec un rayon égal à l'une des droites AO, on décrit une circonference; cette circonference passera par les extrêmités B, C, D, &c. des autres lignes BO, CO, &c. & par conséquent par tous les angles du polygone.

122. Proposition XXIV. *Si après avoir divisé un polygone régulier* ABCDEF (Fig. 75.) *en autant de triangles isosceles & parfaitement égaux qu'il a de côtés, on mene du sommet* O *commun à tous les triangles des perpendiculaires* OS, OT *& sur les côtés, ces perpendiculaires seront égales.*

Les triangles AOF, FOE sont isosceles, donc les perpendiculaires menées des sommets sur les bases, coupent les bases AF, FE chacune en deux également en S & T (*N.* 107.). Or ces deux bases sont égales, donc leurs moitiés SF, FT le sont

auſſi; ainſi les triangles OFS, OFT ayant l'angle OFS égal à l'angle OFT, & les côtés OF, FS, qui comprennent l'angle OFS, égaux chacun à chacun aux côtés OF, FT, qui comprennent l'angle OFT, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.); donc la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT, & ainſi des autres.

123. *Definition.* Lorſqu'un polygone (*Fig.* 75.) eſt diviſé en autant de triangles iſoſceles, & parfaitement égaux qu'il a de côtés. Le point O qui eſt le ſommet commun des triangles, ſe nomme centre du polygone, les angles ABC, &c. formés par les côtés du polygone, ſe nomment *Angles de la Figure*, les angles OAB, OBA de l'un des triangles ſur un côté AB, ſe nomment *angles ſur la baſe*, les côtés OA, OB, &c. des triangles ſe nomment *rayons*, & les perpendiculaires OS, OT, &c. ſe nomment *Apothêmes* ou *rayons droits*.

124. Proposition XXV. *Tous les angles d'un polygone regulier valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a de côtés.*

Tout polygone régulier peut ſe diviſer en autant de triangles iſoſceles & égaux qu'il a de côtés; or les trois angles de chacun de ces triangles valent enſemble deux angles droits (*N.* 97.); donc tous les angles des triangles pris enſemble valent autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés: or de cette ſomme il faut retrancher les angles au ſommet O à cauſe que les angles du polygone ne comprennent que les angles des baſes des triangles, & tous les angles au ſommet valent enſemble quatre angles droits, puiſqu'ils embraſſeroient la circonference entiere qui ſeroit décrite du centre O; donc les angles du polygone valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a des côtés.

Par exemple, l'exagone étant compoſé de ſix triangles, tous les angles de ces triangles valent enſemble ſix fois 2 angles droits, c'eſt-à-dire 12 angles droits, deſquels retranchant les 4 angles droits qui ſont la valeur des ſix angles faits en O. Il reſtera huit angles droits pour la valeur de la ſomme des angles de l'Hexagone, & ainſi des autres.

125. Proposition XXVI. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone* (Fig. 75.) *d'une ſeule part en* R, X, *&c. tous les angles extérieurs ſont égaux; chacun d'eux eſt égal à l'angle au centre, & tous enſemble valent 4 angles droits.*

Tous les angles du polygone sont égaux entr'eux : or chacun de ces angles BAF, &c. & son angle de suite RAF, &c. valent ensemble deux droits (*N.* 49.). Donc tous les angles extérieurs sont égaux.

L'angle BAF, & son angle de suite RAF, valent ensemble deux droits, & les trois angles OAF, OFA, AOF du triangle AOF, valent ensemble aussi deux droits. Donc les angles BAF, RAF sont ensemble égaux à la somme des trois OAF, OFA, AOF, mais l'angle BAF est égal à la somme des deux OAF, OFA, puisque chacun de ceux-ci vaut la moitié de BAF; donc l'angle RAF extérieur est égal à l'angle au centre AOF, & ainsi des autres.

Il y a autant d'angles extérieurs, que d'angles au centre, & tous les angles au centre valent ensemble quatre droits; donc à cause que chaque extérieur est égal à chaque angle au centre, la somme des extérieurs est égale à quatre angles droits.

126. PROBLEME. *Un polygone* ABCDE (Fig. 76.) *étant donné, trouver la valeur de l'angle au centre, de l'angle sur la base, & de l'angle de la figure.*

Supposons que le polygone soit un pentagone; du centre O & avec le rayon OA, je décris un cercle qui passe par tous les angles du polygone (*N.* 122.), & qui est divisée en cinq parties égales par les cinq angles égaux du centre; ainsi chacun de ces angles vaut la cinquiéme partie de la circonference ou de 360 degrés, & partant l'angle au centre vaut 72 degrés. Or les trois angles du triangle AOB valent ensemble deux droits (*N.* 97.) ou 180 degrés. Retranchant donc de 180 la valeur 72 de l'angle au centre AOB, le reste 108 est la valeur des deux angles sur la base pris ensemble ou la valeur de l'angle BAE de la figure, lequel est égal aux deux angles OAB, OBA, puisqu'il est le double de chacun d'eux; donc chacun des angles OAB, OBA sur la base vaut 54 degrés; & on trouvera de la même façon les angles des autres polygones.

127. COROLLAIRE I. *Dans l'exagone* (Fig. 75.) *les angles sur la base & l'angle au centre sont égaux, & tous les triangles qui le composent sont équilateraux.* L'angle au centre AOB embrasse la sixiéme partie de la circonférence, & vaut le sixiéme de 360 degrés, c'est-à-dire 60. Retranchant donc cette valeur 60, de la valeur 180 des trois angles du triangle AOB, il restera 120 pour la valeur des deux angles sur la base, & par conséquent

chacun d'eux vaudra 60, de même que l'angle au centre. Ainsi les trois angles du triangle AOB étant égaux, les trois côtés le seront aussi ; car s'il y avoit de côtés inégaux, les angles opposés à ces côtés seroient aussi inégaux (*N.* 104.).

128. COROLLAIRE II. *Dans le decagone ou polygone de 10 côtés, l'angle au centre est la moitié de l'angle sur la base.* L'angle au centre embrasse la dixiéme partie de la circonference ou de 360 degrés, & partant cet angle vaut 36 degrés, & cette valeur étant retranchée de la valeur 180 du triangle, le reste 144 est la valeur des deux angles sur la base ; ainsi chacun de ces angles est 72 : or 36 est la moitié de 72, donc l'angle au centre est la moitié de l'angle sur la base.

129. PROBLEME. *Le côté* AB *d'un polygone* (Fig. 76.) *étant donné, construire ce polygone.*

Je fais à chacune des extrêmités A, B un angle égal à l'angle sur la base du polygone demandé. Par exemple, si c'est un pentagone, je fais en A un angle OAB de 54 degrés (*N.* 128.), & un autre OBA en B d'un même nombre de degrés ; du point O où les côtés OA, OB de ces angles se coupent, & avec une ouverture du compas égale à OA ou OB ; je décris une circonférence, sur laquelle portant encore quatre fois le côté AB de B en C, de C en D, &c. j'ai le pentagone demandé.

Car le triangle AOB est isoscele à cause des angles égaux OBA, OAB sur la base AB, & comme ces deux angles valent ensemble 108 degrés, & qu'il en faut 180 pour les trois angles de ce triangle (*N.* 97.) ; il s'ensuit que l'angle AOB en vaut 72, ou la cinquiéme partie de la circonférence. Ainsi en portant sur la circonférence le côté AB encore 4 fois, la circonférence s'est trouvée divisée en ses cinq parties égales ; c'est pourquoi si des points des divisions C, D, &c. nous menons des rayons au centre, nous trouverons cinq triangles égaux au premier AOB, rangés autour du même sommet O, & partant la figure composée de ces cinq triangles, est un pentagone régulier dont le côté est AB, tel qu'on le demandoit.

REMARQUE. On trouve dans les étuis, nommés étuis de Mathématiques, un demi-cercle gradué, c'est-à-dire divisé en ses 180 degrés, & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aisément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

130. PROBLEME. *L'apothême* OR (Fig. 76.) *d'un polygone étant donné, construire ce polygone.*

Suppoſons que le polygone demandé ſoit un pentagone ; j'éleve ſur l'extrêmité R de l'apotheme OR, une perpendiculaire indéfinie AE, & comme l'angle au centre d'un pentagone eſt de 72 degrés ; je fais à l'autre extrêmité O de l'apotheme OR deux angles AOR, EOR, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, chacun de 36 degrés, c'eſt-à-dire de la moitié de 72 ; ainſi ces angles étant aigus, leurs côtés AO, EO ſont inclinés ſur OR, du côté de la perpendiculaire AE, & par conſéquent ils doivent couper cette perpendiculaire en des points A, E ; & comme dans les triangles ARO, ERO, le côté OR eſt commun, & que les angles AOR, ARO faits ſur ce côté, ſont égaux chacun à chacun aux angles ERO, EOR, faits ſur le même côté, il s'enſuit que ces deux triangles ſont égaux (*N.* 100.) ; donc l'angle OAR eſt égal à l'angle OER, & partant le triangle AOE eſt iſoſcele, & l'angle de ſon ſommet eſt de 72 degrés, ou la cinquiéme partie de la circonférence. Ainſi du point O pris pour centre, & avec le rayon OA ou OE, décrivant une circonférence, & portant encore quatre fois la baſe AE ſur cette circonférence de E en D, de D en C, &c. on aura un pentagone régulier, dont l'apotheme eſt OR, tel qu'on le demandoit ; ce qui ſe démontre comme dans le Problême précedent.

131. Probleme. *Conſtruire un quarré ſur une ligne donnée* AD (Fig. 65.)

Aux extrêmités A, D de la ligne AD, j'éleve deux perpendiculaires AB, DC, que je fais égales chacune à la droite AD. Des extrêmités B, C, de ces perpendiculaires, je mene la droite BC & la figure ABCD, eſt le quarré demandé.

Car à cauſe que la droite AD eſt perpendiculaire ſur les droites AB, DC, ces deux lignes ſont paralelles entr'elles (*N.* 68.), & à cauſe que les deux points B, C de la droite BC ſont également éloignés de la droite AD, les deux lignes BC, AD ſont paralelles (*N.* 78.) égales & également inclinées entre les paralelles AB, CD (*N.* 77.) ; mais AD eſt perpendiculaire entre les deux AB, CD, donc BC l'eſt auſſi, & par conſéquent tous les angles de la figure étant droits, & tous les côtés égaux, cette figure eſt en quarré (*N.* 112.) fait ſur le côté demandé.

132. Probleme. *Deux des côtés inégaux* AD, AB (Fig. 66.) *d'un rectangle étant donnés, conſtruire ce rectangle.*

J'éleve AB perpendiculairement ſur l'extrêmité A, du côté AD, puis du point B, je mene une paralelle à la droite AD, & du point

point D une paralelle à la droite AB, laquelle coupe l'autre paralelle en C, & la figure ABCD est le rectangle demandé.

Car les deux droites AB, DC étant paralelles entre les paralelles AD, BC, sont égales & également inclinées; (*N.* 77.) or, AB est perpendiculaire sur AD; donc DC l'est aussi, & par la même raison, les droites AD, BC sont égales & également inclinées, & la droite BC est perpendiculaire sur les deux AB, DC; donc la figure a ses quatres angles droits, & les côtés opposés, paralelles; donc elle est un rectangle, (*N.* 113.) & ce rectangle est tel qu'on le demandoit.

133. PROBLEME. *Deux des côtés inégaux* AD, AB *d'un parallelogramme* (Fig. 67.) *étant donnés, construire ce paralellogramme.*

Je fais faire aux deux côtés donnés un angle BAD égal à l'angle donné; de l'éxtrémité B je mene une paralelle à AD, & de l'extrémité D une paralelle à AB, laquelle coupe l'autre paralelle en C, & la figure ABCD est le paralellogramme demandé; ce qui se démontre comme à l'égard du rectangle.

CHAPITRE IV.

De la puissance des Lignes.

134. PAr le mot de *Puissance* d'une ligne, nous n'entendons ici que sa seconde puissance, c'est-à-dire le quarré d'une ligne, & ce que nous nous proposons, c'est de sçavoir combien le quarré d'une ligne divisée en plusieurs parties égales ou inégales contient de quarrés de ses parties, & de produits des unes par les autres, & aussi quel est le rapport de quarrés de ces parties à quelques produits des unes par les autres, &c. ce que l'on entendra mieux par les Propositions suivantes.

135. PROBLEME. *Faire le produit de deux lignes données* AB, AC (Fig. 77.)

J'éleve AB perpendiculairement sur AC; je mene BD paralelle à AC & CD paralelle à AB; ce qui forme un rectangle ABDC (*N.* 132.) lequel est la même chose que le produit demandé; & en voici la démonstration.

Multiplier la ligne AB par la ligne AC, c'est prendre la ligne AB autant de fois qu'il y a d'unités dans la ligne AC. (Livre

premier; (*N.* 11.) or, la ligne AC étant une ſuite de points, le point eſt ſon unité, & par conſéquent pour multiplier AB par AC, il faut prendre AB autant de fois qu'il y a de points dans AC. Concevons donc que ſur tous les points de la ligne AC, s'élevent des perpendiculaires égales chacune à AB; ces perpendiculaires ſeront paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & comme elles ſe toucheront les unes & les autres dans toute leur longueur, leur ſomme formera un eſpace qui eſt le rectangle ABDC; or, la ſomme de ces lignes n'eſt pas différente de la premiere priſe, autant de fois qu'il y a d'unités dans AC ou multipliée par AC; donc le rectangle ABCD, eſt égal au produit de AB par AC.

136. *Remarque.* On demandera peut-être pourquoi je fais faire un angle droit aux deux lignes AB, AC plûtôt qu'un angle aigu ou obtus; & en effet il paroît d'abord que ſi nous faiſons former aux deux lignes AB, AC un angle aigu BAC, (*Fig.* 78.) & que nous achevions le paralellogramme ABCD, comme il a été dit ci-deſſus; (*N.* 133.) ce paralellogramme contiendra autant de lignes égales à AB qu'il y a de points dans AB, & que par conſéquent le paralellogramme doit être auſſi égal au produit des deux lignes; cependant comme ce feroit ici une erreur groſſiere, il faut faire voir en quoi elle conſiſte, en montrant qu'il n'y a que le rectangle qui ſoit égal au produit de ces lignes.

Le point étant conſidéré comme indiviſible doit avoir une longueur & une largeur infiniment petite, & partant, nous devons le conſidérer comme un quarré moindre que tout ce que nous pouvons imaginer de plus petit, ou comme un petit cercle dont le diametre eſt moindre que tout ce qu'on pourroit aſſigner ou concevoir; or, les lignes ne ſont autre choſe que les traces du point; c'eſt pourquoi nous devons les conſidérer comme ayant toutes une même largeur infiniment petite, & égale à la largeur ou à la longueur du point, ou comme des rectangles tels que ABEH (*Fig.* 79.) qui peuvent être égaux ou inégaux en longueur; mais dont la largeur, c'eſt-à-dire la diſtance des paralelles AB, EH, ou la perpendiculaire AH entre ces deux paralelles eſt toujours la même & infiniment petite; cela poſé.

Suppoſons que le rectangle infiniment mince ABEH (*Fig.* 79.) ſoit la ligne qu'on veut multiplier par la ligne AC; ſi nous mettons ce rectangle perpendiculairement ſur la ligne AC, il eſt clair qu'il ne prendra ſur cette ligne que la longueur AH d'un point,

c'eſt pourquoi, concevant qu'il y ait une infinité de rectangles égaux au rectangle ABEH, les uns auprès des autres, le long de la ligne AC, & qui lui ſoient tous perpendiculaires; il y en aura certainement autant que la ligne AC contient de points, & par conſéquent leur ſomme, ou le premier pris autant de fois qu'il y a de points dans AC, ſera le produit demandé, & ce produit ſera un rectangle.

Maintenant, concevons qu'une infinité de rectangles infiniment minces & égaux chacun au précédent, ſoient tous également inclinés ſur la ligne AC; (*Fig.* 80.) il faudra néceſſairement que tous ces rectangles ne s'appuyent ſur AC que ſur un angle de leurs baſes, & qu'ils laiſſent des petits triangles rectangles tels que HTV, VXZ qui ſeront tous égaux entr'eux, (*N.* 100.) ayant le le côté TV égal au côté XZ, l'angle droit HTV égal à l'angle droit VXZ, & l'angle TVH égal à l'angle XZV, à cauſe des baſes TV, XZ également inclinées ſur AC; mais pour remédier à l'inconvénient de ces triangles vuides, je prolonge le côté RB en A; ce qui donne encore un petit triangle rectangle égal à chacun des triangles vuides HTV, &c. & du point E, je mene ES paralelle à AH; les triangles rectangles ESB, HAR ſont parfaitement égaux, (*N.* 102.) à cauſe des hypothénuſes ES, AH paralelles entre les paralelles AB, HE, & par conſéquent égales, (*N.* 77.) & des côtés BE, RH auſſi égaux pour la même raiſon; retranchant donc du rectangle RBEH le triangle ESB, & lui donnant en ſa place le triangle AHR, le paralellograme ASEH ſera encore égal au rectangle RBEH, & faiſant la même choſe à l'égard des autres rectangles, nous aurons le paralellogramme ASDC égal à la ſomme des petits paralellogrammes ou à la ſomme des rectangles. Or, les parties égales AH, HV, &c. que ces paralellogrammes prennent ſur AC ſont plus grandes que les épaiſſeurs RH, TV &c. des rectangles infiniment minces; donc il y a néceſſairement moins de paralellogrammes ou de rectangles que la ligne AC ne contient de points, & par conſéquent le premier rectangle pris autant de fois que la ligne AC a de points, doit faire une ſomme plus grande que la ſomme des petits paralellogrammes contenus dans le paralellagramme ASDC; ainſi ce paralellogramme n'eſt pas le produit qu'on demande, & on trouvera toujours qu'en inclinant une ligne ſur l'autre, le paralellogramme ſera moindre que le produit demandé.

137. *Remarque II.* J'ai dis plus haut (*N.* 35.) que ſi deux lignes droites ſe coupent, elles ne ſe coupent qu'en un point, & dans la Remarque précédente, j'ai fait voir qu'une ligne droite qui coupe obliquement une autre, prend une partie plus grande ſur cette ligne que ſi elle la coupoit perpendiculairement; d'où il paroît qu'on peut conclurre que deux lignes droites peuvent ſe couper en plus d'un point. Or, de peur qu'on ne me reproche de me contredire moi-même, je vais faire voir que ces deux Propoſitions n'ont rien d'oppoſé, pourvû qu'on les entende comme elles doivent être entenduës.

Nous avons démontré (*N.* 34.) que ſi deux lignes droites ont deux points communs, ces deux lignes ne font qu'une ſeule & même ligne droite; & delà nous avons conclu que deux lignes droites ne peuvent ſe couper en deux points; c'eſt-à-dire que ſi deux points de l'une s'ajuſtent ſur deux points de l'autre, les deux lignes peuvent ſe couper: ainſi il ne s'agit que de faire voir, que quoique deux lignes qui ſe coupent obliquement, ſe coupent en une partie plus grande que ſi elles ſe coupoient perpendiculairement; cependant il n'y a jamais deux points de l'une qui s'ajuſtent ſur deux points de l'autre, de la façon dont nous venons de l'expliquer.

Concevons donc que deux lignes droites ſoient repréſentées par les rectangles AB, CD (*Fig.* 81. 82.) dont les largeurs ſont infiniment petites & égales, ou ſi l'on veut par les ſuites des petits cercles infiniment petits & égaux compris dans ces rectangles, & mettons ces deux rectangles ou ces deux ſuites de cercles perpendiculairement l'un ſur l'autre, enſorte qu'ils ſe coupent; (*Fig.* 81.) le petit quadrilatere dans lequel ces rectangles ſe couperont, ſera un quarré, puiſque les quatre côtés ſe coupent à angles droits, & qu'ils ſont égaux, à cauſe qu'étant perpendiculaires entre les longs côtés des rectangles, ils en expriment les largeurs qui ſont égales par la ſuppoſition; & comme les diamétres des petits cercles égaux, ſont égaux chacun à la largeur des rectangles, il eſt clair que le petit quarré ne peut contenir que l'un de ces cercles E; ainſi, ſi nous regardons les rectangles comme repréſentant des lignes qui ſe coupent perpendiculairement, ces lignes ne ſe couperont qu'en un point qui ſera le petit quarré; & ſi nous regardons les ſuites de cercles, comme repréſentans ces lignes, elles ne ſe couperont auſſi qu'en un point qui ſera le petit cercle E; & par conſéquent les deux lignes n'auront de commun que le point E.

Maintenant, concevons que les deux obliques AB, CD soient obliques l'une sur l'autre, (*Fig.* 82.) ou, (ce qui revient au même) que la ligne CD tourne autour du point fixe E; ensorte que l'angle DEB devienne oblique, les points H, S de la ligne CD, voisins du point E, pourront bien anticiper un peu sur les points R, T de la droite AB, voisins du point E; mais les deux premiers ne tomberont absolument sur les deux seconds, que lorsque la ligne CD tombera sur la ligne AB, & par conséquent, tant que cela ne sera pas, la droite HS menée entre les deux points H, S de la ligne CD, ne tombera pas sur la droite RT menée entre les deux points R, T de la droite AD; ainsi, ni les points H, S, ni les points R, T ne pourront être dits communs aux deux lignes, puisque leurs directions sont différentes, & il n'y aura que le point E qui sera absolument commun, & à l'un & à l'autre; donc ces deux lignes ne se couperont qu'en un point commun, quoique la partie dans laquelle ils se coupent, soit plus grande que si elles se coupoient perpendiculairement

A la vérité il peut souvent arriver que les lignes AB, CD (*Fig.* 82.) se coupent obliquement, & que néanmoins les points H, R n'anticipent pas l'un sur l'autre, non plus que les points T, S, & alors il semble qu'on puisse dire que les deux obliques AB, CD ne se coupent pas en une partie plus grande que si elles étoient perpendiculaires entr'elles. Mais il faut observer que le point H étant tout entier hors du point E, le point E ne peut passer de la position E à la position H, à moins que pendant ce mouvement, son centre ne parcourre successivement la distance qui est entre lui & le centre du point H; ainsi le point E passant en H, prend plusieurs positions intermédiaires entre la position E & la position H; par la même raison, le même point E passant de la position E à la position R, prend plusieurs positions intermédiaires entre la position E & la position R; c'est pourquoi les positions intermédiaires entre E & H, ou du moins quelques unes d'entr'elles anticipent sur les positions intermédiaires de E en R, ou sur quelques unes d'entr'elles, & ces anticipations font que deux obliques AB, CD se coupent en une partie plus grande que lorsqu'elles sont perpendiculaires; car quoiqu'alors il y ait aussi des anticipations, telles que nous venons de dire; cependant elles ne font pas que la partie coupée soit plus grande que le point E, (*Fig.* 81,) ou que le petit quarré dans lequel le point E se

trouve, & dans lequel toutes les anticipations qu'on peut imaginer sont toujours renfermées, soit plus grand. La seule inspection des Figures fait voir ceci clairement.

Il seroit impossible de rendre raison de tout ce que nous avons dit dans le Problême précédent & dans ces deux remarques, si on s'avisoit de dire avec Euclide que le point n'a point de parties & la ligne point de largeur, & ce sont ces mauvaises définitions qui ont donné lieu à bien des gens d'accuser les Géometres de tomber dans des absurdités. Nous en donnerons encore un exemple lorsque nous parlerons du cercle.

138. *Definition*. Dans tout rectangle ABDC, (*Fig.* 77.) le côté AC sur lequel on conçoit qu'il s'appuye, se nomme *base*, & le côté AB ou son égal CD perpendiculaire sur la base, se nomme *hauteur*. On désigne un rectangle par les quatre lettres mises aux quatre angles, en disant le rectangle ABCD, ou simplement par les deux lettres mises à deux angles opposés A, D en disant le rectangle AD.

139. Proposition XXVII. *Si deux rectangles ont les bases égales & les hauteurs aussi, ils sont égaux.*

Chaque rectangle est le produit de sa base par sa hauteur; or, la base de l'un est égale à la base de l'autre, & la hauteur est égale à la hauteur par la supposition, donc les deux produits ou les deux rectangles ne sauroient être différents.

140. Proposition XXVIII. *Si une ligne droite* AB (Fig. 83. 84.) *est divisée en deux ou plusieurs parties égales ou inégales, le quarré de cette ligne contient le quarré de la premiere partie; plus deux rectangles de la premiere par la seconde; plus le quarré de la seconde; plus, deux rectangles des deux premieres par la troisiéme; plus le quarré de la troisiéme; plus deux rectangles des trois premieres par la quatrième; plus le quarré de la quatriéme, & ainsi de suite, s'il y a un plus grand nombre de parties.*

Soit la ligne AB (*Fig.* 83.) divisée en deux parties AC, CD, je fais son quarré AMNB; (*N.* 133.) je prens sur le côté AM perpendiculaire sur AB la partie AE égale à la partie AC, & par conséquent la partie EM est égale à la partie restante CB à cause de AE=AC; au point C j'éléve CS perpendiculaire sur AB, & au point E j'éleve ET perpendiculaire sur AM. Les droites AM, CS, BN étant perpendiculaires sur AB sont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & par la même raison, les droites AB, ET, MN seront aussi paralelles; de plus, les droites AM, CS, BN,

perpendiculaires sur AB, sont aussi perpendiculaires sur les droites ET, MN paralelles à AB; (*N.* 68.) ainsi toutes ces lignes se coupent perpendiculairement & leurs parties aussi; cela posé.

Le petit quadrilatere AEOC ayant ses quatre angles droits & les côtés AC, AE égaux entr'eux par la construction, & égaux à leurs paralelles EO, OC, est par conséquent le quarré de la partie AC, de même le quadrilatere SOTN est le quarré de l'autre partie CB; car ses côtés OT, SN sont égaux chacun à la partie CB, puisqu'ils sont perpendiculaires entre les paralelles CS, BN; & par la même raison, les deux autres côtés OS, TN sont aussi égaux chacun à EM = CB; enfin les deux rectangles EMSO, OCBT, ayant le côté OC = OE, & le côté EM égal au côté CB sont égaux entr'eux, & égaux chacun au produit de la partie AC par la partie CB; donc le quarré AMNB de la droite AB divisée en deux parties AC, CB contient le quarré AEOC de la premiere partie AC plus, deux rectangles EMSO, COTB de la premiere partie par la seconde; plus le quarré OSNT de la seconde.

De même, soit la ligne AB (*Fig.* 84.) divisée en trois parties AC, CD, DB; je fais son quarré AMNB, & des points de division C, D, j'éleve sur DB les perpendiculaires CS, DT; je prens sur le côté AM la partie AE égale à la partie AC; la partie EH égale à la partie CD, & par conséquent la troisiéme partie HM est égale à la troisiéme partie DB; enfin, des points E, H, j'éleve sur AM les perpendiculaires EZ, HX; ainsi ces perpendiculaires coupent perpendiculairement les perpendiculaires menées sur AC, par les raisons que nous avons déja dites, & toutes ces perpendiculaires forment entr'elles des rectangles.

Or, le rectangle AEOC est le quarré de la premiere partie AC à cause de AE = AC; les deux rectangles EHVO, CORD sont égaux entr'eux, & valent chacun le produit de la partie AC par la partie CD, à cause du côté EO égal au côté CO ou AC, & du côté EH égal au côté CD; le rectangle VORP est le quarré de CD à cause du côté OR = CD & du côté OV = EH = CD; les deux rectangles HMSV, DRZB sont égaux chacun au produit de la partie AC par la partie DB, à cause des côtés égaux HM, DB, & des côtés HV, DR égaux chacun au côté AC ou AE; les rectangles VSTP, RPXZ sont aussi égaux entr'eux & au produit de la partie CD par la partie DB, à cause du côté VP ou CD égal au côté PR = HE = CD & du côté SV ou MH égal au côté RZ ou DB; enfin le rectangle PTNX est le quarré

de DB, à cause du côté PX ou DB égal au côté PT ou HM; donc le quarré de la droite AB divisée en trois parties AC, CD, DB contient le quarré AEOC de la premiere partie; plus deux produits HEOV, CORD de la premiere par la seconde; plus, le quarré OVPR de la seconde; plus, deux rectangles HMSV, DRZB de la premiere par la troisiéme joints à deux rectangles VSTP, RPXZ de la seconde par la troisiéme; ce qui fait ensemble deux rectangles des deux premiers par la troisiéme; plus le quarré PTNX de la troisiéme, & ainsi des autres.

141. COROLLAIRE. *Lorsqu'une ligne* AB *est divisée en deux ou plusieurs parties* (Fig. 83. 84.) *la diagonale de son quarré* AMNB *coupe en deux également tous les quarrés des parties de cette ligne.*

La diagonale AN (*Fig.* 83.) coupe le quarré AMNB en deux triangles parfaitement égaux; (*N.* 119.) or, ces triangles étant rectangles & isosceles, les deux angles sur la base de chacun d'eux, doivent valoir ensemble un droit, puisque les trois angles de tout triangle, valent ensemble deux droits; (*N.* 97.) donc chaque angle sur la base doit valoir ensemble un demi droit, & par conséquent la diagonale AN doit couper l'angle droit MAC du quarré AMNB en deux également. Or, la diagonale AO du quarré EACO coupe aussi le même angle droit EAD en deux également, par la même raison; donc la diagonale AN tombe sur la diagonale AO, & passe par le point O; d'où il suit qu'elle coupe aussi le quarré EACO en deux également. Maintenant les angles égaux EOA, AOC sont égaux aux angles SON, TON qui leur sont opposés au sommet; (*N.* 49) donc la ligne AN coupe aussi en deux égalemement l'angle droit SOT du quarré SOTN, & par conséquent cette diagonale AN tombe sur la diagonale ON du quarré SOTN & le divise en deux également; ainsi des autres.

142. COROLLAIRE. *Si une ligne* AB *est divisée* (Fig. 85.) *en plusieurs parties égales, son quarré contient autant de fois le quarré de l'une de ses parties, qu'il y a d'unités dans le quarré du nombre de parties.*

Supposons que la ligne AB ait 3 parties, je fais son quarré; des points de division j'éleve des perpendiculaires sur AB; je divise AM en un même nombre de parties, & des points de division je mene des perpendiculaires sur AM. Il est visible par cette construction que j'aurai 9 quarrés égaux au quarré AO de la premiere partie AC: or, 9 est le quarré du nombre 3 des parties. Donc, &c.

&c. & ainsi des autres, & la raison en est que le quarré AMNB n'est autre chose que le produit de la ligne AB = 3 par la ligne AM = 3, lequel produit est 9.

143. Corollaire. Delà, il suit que le quarré d'une ligne coupée en deux également est quadruple du quarré de sa moitié, que le quarré d'une ligne coupée en trois également est noncuple du quarré de son tiers, &c.

144. Proposition XXIX. *Si une ligne droite* AB (Fig. 86.) *est divisée en plusieurs parties égales ou inégales* AC, CD, DB, *le produit ou rectangle de la ligne* AB *par une autre ligne* AM, *est égal à la somme des produits ou rectangles de chaque partie par la ligne* AM.

Sur tous les points de division de la ligne AB, j'éleve les perpendiculaires CS, DT, & le rectangle AMNB est divisé en trois autres rectangles AMSC, CSTD, DTNB dont le premier est le produit ou le rectangle de la partie AC par la droite AM le second est le produit ou le rectangle de la seconde partie CD par CS = AM, & le troisiéme est le produit ou le rectangle de la troisiéme partie DB par DT = AM; or ces trois rectangles composent le rectangle total; donc, &c.

145. Proposition XXX. *Si une ligne* AB (Fig. 87.) *est divisée en deux parties inégales* AC, CB, *le rectangle de la ligne* AB *par l'une de ses parties* AC *est égal au rectangle des deux parties; plus le quarré de cette partie* AC.

J'éleve en A la perpendiculaire AD égal à AC; j'acheve le rectangle ADEB, & du point C j'éleve la perpendiculaire CR sur AB. Le rectangle ADEB est donc le rectangle de la droite AB par sa partie AC ou AD; le rectangle ADRC est le quarré de la partie AC, & le rectangle CREB est celui des deux parties BC, CA ou CR; or, il est visible que le rectangle ADEB est égal au quarré ADRC, plus le rectangle CREB.

146. Proposition XXXI. *Si une ligne droite* AB (Fig. 88.) *est divisée en deux parties égales* AC, CB, *& en deux inégales* AD, DB; *le rectangle des deux inégales* AD, DB *est égal au quarré de la moitié* AC *de la ligne, moins le quarré de la partie* DC *interceptée entre les points de division* D, C.

Je fais d'une part le quarré AMNC de la moitié AC, & j'en retranche le quarré DHRC de la partie DC; ce qui me donne un reste AMNRHD qui est une espece d'équerre, qu'on nomme ordinairement un *Gnomon*. De l'autre côté j'éleve en D la droite

DE perpendiculaire sur AB & égal à AD, & achevant le rectangle DEFB; le rectangle est le même que celui des parties inégales AD, BD; ainsi il s'agit de faire voir que le gnomon AMNKHD est égal au rectangle DEFB, & pour cela :

Je prolonge RH en S, ce qui divise le gnomon en deux rectangle SN, SD; je prolonge aussi NC en P, ce qui divise le rectangle DEFB aussi en deux rectangles DP, PB : or les rectangle SN, PB sont égaux; car à cause de CN = CA, & de CR = CD, nous aurons NR = AD = DE = CP; c'est-à-dire les deux côtés NR, CP sont égaux, de même que les deux autres côtés MN, CB, à cause de MN = AC = CB, & les deux rectangles SD, DP sont aussi égaux, à cause de AD = DE, & de DC = DH; donc, le gnomon est égal au rectangle DEFB.

147. COROLLAIRE. *Donc le rectangle des parties inégales; plus le quarré de la partie interceptée* DC, *est égal au quarré de la moitié de la ligne.* Par la Proposition précédente, nous avons $AD \times DB = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$; donc en ajoûtant $\overline{CD}^2$ de part & d'autre, nous aurons $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.

148. PROPOSITION XXXII. *Si à une ligne droite* AB (Fig. 89.) *divisée en deux parties égales* AC, CB, *on ajoûte une autre ligne droite* AD, *le rectangle de toute la ligne* DB *par l'ajoûtée* AD, *est égale au quarré de la ligne* DC *composée de la moitié* AC *& de l'ajoûtée* AD, *moins le quarré de la moitié* AC *de la ligne* AB.

Je fais d'une part le quarré DMNC de la ligne DC, & j'en retranche le quarré AHRC de la ligne AC, ce qui donne un reste ou gnomon DMNRHA. De l'autre part, j'éleve en D une droite DE perpendiculaire sur DB & égale à DA, & achevant le rectangle DEFB ce rectangle est le même que celui de DB par DA; ainsi il est question de faire voir que le gnomon DMNRHA est égal au rectangle DEFB, & pour cela:

Je prolonge RH en S, ce qui divise le gnomon en deux rectangles SN, SA; je prolonge aussi NC en P; ce qui divise le rectangle DEFB en deux autres DP, PB : or à cause de DC = CN, & de AC = CR nous avons NR = DA = DE, & à cause du quarré DMNC, nous avons MN = NC; donc les deux rectangles SN, DP qui ont les côtés NR, MN égaux chacun à chacun aux côtés DC, DE sont égaux. De même nous

avons DA = DE = CP, & AH = AC = CB ; donc les deux rectangles SA, PB qui ont les côtés DA, AH égaux chacun à chacun aux côtés CP, CB sont égaux, & par conséquent le gnomon est égal au rectangle DEFB.

Remarque. Les deux Propositions précédentes reviennent souvent dans la Géométrie, & l'on fera fort bien de se les rendre familieres.

149. Proposition XXXIII. *Si d'un point* O *pris sur la diagonale* AC *d'un rectangle ou d'un paralellogramme* ABCD, (Fig. 90. 91.) *on mene des droites* RS, TV *paralelles aux côtés* AD, DC ; *les paralellogrammes* RDVO, TOSB *par lesquels la diagonale ne passe pas, sont égaux.*

La diagonale divise le rectangle ou le paralellogramme en deux triangles ADC, ABC parfaitement égaux, (*N.* 118.) & les droites RS, TV divisent chacun de ces triangles en deux autres triangles, & un rectangle ou paralellogramme : or, le rectangle ou paralellogramme AROT étant aussi divisé en deux triangles égaux par sa diagonale AO, le triangle ARO est égal au triangle ATO, & par la même raison, dans le rectangle ou paralellogramme OVCS, le triangle OVC est égal au triangle OSC ; donc si nous retranchons du triangle ADC les deux triangles ARO, OVC ; & du triangle ABC les deux triangles ATO, OSC ; le rectangle ou paralellogramme RDVO qui restera d'une part, sera égal au rectangle ou paralellogramme TOSB qui restera de l'autre.

CHAPITRE V.

Des Raisons, Proportions & Progressions Géométriques des Lignes.

150. Tout espace compris entre deux paralelles qui ne sont point bornées par des perpendiculaires ou des obliques, se nomme *Espace paralelle.*

Les espaces paralelles étant indéfinis & non terminés de part & d'autre, le plus ou moins de longueur des paralelles n'augmente ni ne diminuë leur grandeur, & l'on peut considerer ces paralelles comme infiniment prolongées.

151. PROPOSITION XXXIV. *Si les perpendiculaires* RP, rp (Fig. 92.) *ou les egalement inclinées* TS, ts *comprises entre deux espaces paralelles* ABCD, abcd *sont égales, les espaces paralelles sont égaux, & si les espaces paralelles sont égaux, les perpendiculaires ou les également inclinées sont égales.*

Je porte l'espace ABCD sur l'espace *abcd*, en mettant la droite indéfinie CD sur l'indéfinie *cd*, de façon que le point P de la perpendiculaire RP tombe sur le point *p* de la perpendiculaire *rp*; ces deux perpendiculaires étant égales, tomberont l'une sur l'autre; car d'un même point *p*, on ne peut élever deux perpendiculaires sur une même ligne; (*N.* 51.) ainsi la droite indéfinie AB tombera sur la droite indéfinie *ab* à cause que par un même point R on ne peut mener deux différentes paralelles à une même ligne, (*N.* 68.) & parconséquent les deux espaces paralelles seront parfaitement égaux : on prouvera de la même façon que si deux également inclinées TS, *ts* sont égales, les espaces paralelles sont égaux. Ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Si l'on prétend que les deux espaces étant égaux, les perpendiculaires RP, *rp* ou les inclinées TS, *ts* soient inégales, je mets l'indéfinie CD sur l'indéfinie *cd;* ensorte que le point P de la perpendiculaire RP, tombe sur le point *p* de la perpendiculaire *rp*; ces deux perpendiculaires tomberont l'une sur l'autre; mais comme on les suppose inégales, le point R tombera au-delà de *r* : par exemple, en Q, si RP est plus grande que *rp*, ou endeçà du point *r* : par exemple, en *q*, si RP est moindre que *rp*; & dans l'un & l'autre de ces cas, la paralelle AB ne tombera point sur la paralelle AB, puisqu'elle passera ou par Q ou par *q*, & les deux espaces parelelles ne seront pas égaux; ce qui est contre la supposition. Donc, si les espaces paralelles sont égaux, les perpendiculaires sont nécessairement égales; & on prouvera de même que les espaces étant égaux, les également inclinées sont égales; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

152. COROLLAIRE. Ce que nous venons de dire seroit encore vrai, si les également inclinées LH, *ts* étoient inclinées en différent sens; car il n'y auroit qu'à renverser l'espace ABCD sur l'espace *abcd*; c'est-à-dire, mettre l'indéfinie AB sur l'indéfinie *cd*, de façon que la paralelle CD tombât du côté de la paralelle *ab*, & que le point L de l'inclinée LH tombât sur le point *s* de l'inclinée *ts*; car alors ces deux inclinées se trouveroient inclinées du même sens, & l'on démontreroit les mêmes choses que ci-dessus.

153. PROPOSITION XXXV. *Si après avoir mené dans un espace paralelle* ABCD (Fig. 93. 94.) *une perpendiculaire* EH, *&* *tant d'autres lignes inégalement inclinées qu'on voudra*, LM, NQ, TV, &c. *on divise la perpendiculaire, ou telle inclinée qu'on voudra, en deux ou plusieurs parties égales ou inégales, & que des points de division de cette ligne, on mene des paralelles aux paralelles* AB, CD; *je dis que les autres lignes menées entre ces deux paralelles* AB, CD *seront divisées par les paralelles menées entre deux, en même raison que la ligne qui aura été premierement divisée.*

Supposons que l'inclinée LM ait été divisée en deux parties LP, PM (*Fig.* 93.) qui soient entr'elles en tel rapport qu'on voudra, & que du point de division P on ait mené la droite XPZ paralelle aux paralelles AB, CD. Je conçois que de tous les points de la ligne LM, soient menées des paralelles à AB ou à CD, toutes ces paralelles diviseront l'espace paralelle ABCD, en autant d'autres espaces paralelles que la ligne LM contiendra de petites parties égales; & comme la ligne LM est également inclinée sur toutes ces paralelles, puisque les angles du même côté sont tous égaux, & que par conséquent toutes ses parties égales sont également inclinées dans leurs petits espaces paralelles, il s'ensuit que tous ces petits espaces sont égaux entr'eux; (*N.* 151.) or, la perpendiculaire EH & les autres inclinées NQ, &c. sont divisées par les petits espaces paralelles égaux chacun en un même nombre de parties que la ligne LM, & à cause que chacune de ces lignes n'est pas plus inclinée dans un petit espace que dans un autre, toutes les parties de chacune d'elles sont égales entrelles; (*N.* 151.) ainsi, comme il n'y a pas plus de petits espaces de L en P que de E en O, & de P en M que de O en H; il s'ensuit que le nombre de parties égales de LM comprises dans sa partie LP, est au nombre des parties égales comprises dans sa partie PM, comme le nombre de parties égales de la perpendiculaire EH comprises dans sa partie EO, est au nombre de parties égales comprises dans OH; c'est-à-dire LP. PM :: EO. OH, & partant la perpendiculaire EH est divisée en O, en même raison que l'inclinée LM en P.

Et on prouvera de même que les autres inclinées NQ, TV, &c. sont divisées par XZ, en même raison que la droite LM, & ce seroit encore la même chose si la ligne LP avoit été divisée en un plus grand nombre de parties LP, PS, SM, (*Fig.* 94.)

154. COROLLAIRE Ier. *Il suit delà que les espaces paralelles inégaux, sont entr'eux comme les perpendiculaires ou comme les également inclinées entre ces paralelles, & que les perpendiculaires ou les également inclinées entre les espaces paralelles inégaux, sont entr'elles comme les espaces.*

Car le nombre des petits espaces égaux contenus dans l'espace paralelle ABXZ, (*Fig. 93.*) est au nombre des petits espaces égaux contenus dans l'espace XZCD, comme le nombre de parties égales contenuës dans la partei EO de la perpendiculaire EH, est au nombre des parties égales contenuës dans la partie OH; & partant l'espace paralelle ABXZ, est à l'espace XZCD, comme la partie EO de la perpendiculaire est à la partie OH, ou comme la partie LP de l'oblique LM, est à la partie PM de cette même oblique; c'est-à-dire que ces deux espaces ABXZ XZCD sont entr'eux comme leurs perpendiculaires LO, OH ou comme leur également inclinées LP, PM.

De même, puisque la perpendiculaire EO contient autant de parties égales que l'espace paralelle ABXZ contient de petits espaces paralelles égaux, & que la perpendiculaire OH contient autant de ces mêmes parties égales que l'espace XZCD, contient de mêmes petits espaces égaux; il s'ensuit que la perpendiculaire EO est à la perpendiculaire OH, comme l'espace paralelle ABXZ est à l'espace XZCD; & la même chose doit se dire des également inclinées LP. PM.

155. COROLAIRE II. *De ce que nous avons trouvé* (*N.* 153.) LP. PM :: EO. OH *nous pouvons dire en composant* LP + PM. PM :: EO + OH. OH *ou* LM. PM :: EH. OH. Car il est clair que le nombre de parties égales contenuës dans LM est au nombre de parties égales contenuës dans sa partie PM, comme le nombre de parties égales contenu dans EH est au nombre de parties égales contenuës dans OH, puisque le nombre de parties contenuës dans LM, est égal au nombre de parties contenuës dans EH; de même que le nombre de parties contenuës dans MP, est égal au nombre de parties contenuës dans HO: & on prouvera de la même façon que LM. PL :: EH. OE. D'où l'on tire cette régle générale; que si *deux ou plusieurs lignes* LM, EH *sont divisées chacune en deux parties qui soient en proportion; chaque partie de l'une est à toute sa ligne, comme la partie semblable de l'autre est à toute sa ligne*, & cette regle s'étend aussi à deux ou plusieurs lignes LM, EH (*Fig. 94.*) qui seroient divisées en un plus grand

nombre de parties proportionnelles entr'elles; ce qui se démontre toujours de la même façon.

156. Corollaire III. Par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire dans le Corollaire précédent, on prouvera aisément que si deux lignes LM, EH (*Fig.* 93.) sont divisées en deux parties proportionnelles, en sorte qu'on ait LP, PM : : EO, OH, on peut faire sur ces quatre termes tous les changemens dont nous avons parlé dans le premier Livre touchant les proportions (*N.* 279, 280, &c.), & il y aura toujours proportion; ainsi on a le plaisir de voir que les vérités Mathématiques se prouvent par différens principes dont les uns ajoutent de la clarté aux autres.

157. Corollaire IV. *Si plusieurs lignes droites* LM, EH, *&c.* (Fig. 93. 94.) *comprises entre deux paralelles* AB, CD, *sont coupées en deux ou plusieurs parties proportionnelles entr'elles, les lignes droites menées par les points de division de ces lignes sont paralelles aux paralelles* AB, CD.

Les droites LM, EH (*Fig.* 93.) sont divisées proportionnellement aux points P, O, si l'on veut que la droite menée du point O au point P, ne soit pas paralelle aux droites AB, CD, la paralelle menée du point O coupera donc LM, ou en dessous de P comme en R, ou en dessus comme en S, supposons que cette paralelle coupe en R; donc à cause de OR paralelle aux paralelles AB, CD, nous aurons EO, OH : : LR, RM (*N.* 153.); or par la supposition, nous avons aussi EO, OH : : LP, PM; ainsi les deux raisons LR, RM, & LP, PM, étant chacune égale à la raison, EO, OH, seront égales entr'elles; donc nous aurons LR, RM : : LP, PM, ce qui est impossible, car l'antécédent LR, est plus grand par rapport à son conséquent RM, que l'antécédent LP, par rapport à son conséquent PM.

De même si la paralelle menée du point O coupoit LM en S, nous aurions EO, OH : : LS, SM (*N.* 153.), & par la supposition nous aurions aussi EO, OH : : LP, MP; donc LS, SM : : LM, MP, ce qui est encore impossible, puisque LS est moindre par rapport à son conséquent SM que LP, par rapport à son conséquent MP; donc il faut nécessairement que la paralelle menée du point O passe par le point M.

Et on prouvera de même que si les droites LM, EH (*Fig.* 94.) sont divisées en plus de deux parties proportionnelles entr'elles,

les droites OP, RS qui joignent leurs points de division sont paralelles aux paralelles AB, CD.

158. PROPOSITION XXXVI. *Si les côtés* BA, BC (Fig. 95.) *d'un triangle* ABC, *sont coupés par une ou plusieurs lignes* MN, &c. *paralelles à la base, ces côtés sont coupés proportionnellement, & si les côtés sont coupés proportionnellement, les lignes qui les coupent sont paralelles à la base.*

Par le sommet B, je mene la droite RS paralelle à la base; ce qui me donne un espace paralelle RSAC, dans lequel les côtés AB, BC sont des inclinées. Or si les lignes MN, &c. qui coupent ces inclinées sont paralelles à la base AC ou RS, on démontrera comme ci-dessus (*N.* 153.), que les inclinées AB, BC sont coupées en même raison, & si les inclinées AB, BC sont coupées en même raison, on prouvera aussi comme ci-dessus (*N.* 157.), que les droites MN, &c. qui passent par leur points de division sont paralelles à AC ou RS.

159. PROPOSITION XXXVII. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 96.) *ont les trois angles* A, B, C *égaux aux trois angles* a, b, c, *chacun à chacun, les côtés opposés aux mêmes angles sont proportionnels.*

Je mene des angles B, *b* les droites MN, *mn*, paralelles aux côtés opposés AC, *ac*, ce qui me donne deux espaces paralelles MNAC, *mnac*, dans lesquels les côtés AB, *ab* sont également inclinés à cause de l'angle A égal à l'angle *a*, de même que les côtés BC, *bc*, à cause de l'angle B, égal à l'angle *b*; ainsi le côté AB est au côté *ab*, comme l'espace MNAC, est à l'espace *mnac* (*N.* 154.), & le côté BC, est au côté *bc*, comme le même espace paralelle MNAC, est à l'espace paralelle *mnac*. Donc la raison des côtés AB, *ab* est égale à la raison des côtés BC, *bc*; puisque l'une & l'autre est égale à la raison des espaces, & partant AB, *ab* :: BC, *bc*.

Je mene de même du sommet des angles égaux C, *c*, les droites RS, *rs* paralelles aux côtés opposés AB, *ab*, & à cause des angles A, B égaux aux angles *a*, *b* chacun à chacun, les côtés AC, *ac*; BC, *bc*, sont également inclinés dans les espaces paralelles ABRS, *abrs*, ainsi nous avons AC, *ac* :: ABRS *abrs*, & BC, *bc* :: ABRS, *abrs* (*N.* 154.), & portant AC, *ac* :: BC, *bc*, mais nous avons trouvé AB, *ab* :: BC, *bc*; donc AC, *ac* :: AB, *ab*, c'est-à-dire, les côtés du triangle ABC, sont proportionnels à ceux du triangle *abc*.

160.

160. Corollaire. *Si deux triangles* ABC, abc (Fig. 96.) *ont les côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels sont égaux.*

Je fais en A avec le côté AC, un angle CAX, égal à l'angle *a*, & en C, un angle ACX égal à l'angle *c*, & par conséquent le troisiéme angle AXC du triangle AXC est égal au troisiéme angle *b* du triangle *abc* (*N.* 97.), & ces deux triangles AXC, *abc* ont les côtés proportionnels (*N.* 159.); nous avons donc *ac*, *ab* :: AC. AX, mais par la supposition, nous avons aussi *ac*, *ab* :: AC, AB; donc AC, AX :: AC, AB, ou en alternant AC, AC :: AX, AB, & pat conséquent à cause de AC = AC, nous avons le côté AX du triangle AXC égal au côté AB du triangle ACB. De même dans les triangles *abc*, AXC, nous avons *ac*, *cb* :: AC, CX, & par la supposition nous avons aussi *ac*, *cb* :: AC, CB; donc AC, CX :: AC, CB, & partant à cause de AC = AC, le côté CX du triangle ACX est égal au côté CB du ttiangle ABC; ainsi les deux triangles AXC, ABC ayant le côté AC commun, & les deux autres côtés égaux aux deux autres côtés chacun à chacun sont parfaitement égaux (*N.* 100.), & les trois angles de l'un sont égaux chacun à chacun aux trois angles de l'autre; mais les trois angles du triangle AXC ont été faits égaux aux trois angles du triangle *abc*; donc les trois angles du triangle *abc*, sont égaux aux trois angles du triangle ABC.

161. Proposition XXXVIII. *Si deux côtés* AB, BC *d'un triangle* ABC (Fig. 97.) *sont proportionnels aux côtés* ab, bc *d'un autre triangle* abc, *& que l'angle* B *compris par les deux premiers soit égal à l'angle* b *compris par les deux autres, les trois côtés du triangle* ABC, *sont proportionnels aux trois côtés du triangle* abc.

Je prens sur le côté *ab* du plus grand triangle *abc*, une pattie *bm* égale au côté AB de l'autre triangle; & du point *m*, je mene *mn* paralelle à la base *ac*; les deux triangles *abc*, *mbn* ont les trois angles égaux, car l'angle *b* est commun, & à cause des paralelles *ac*, *mn*, les angles du même côté *bac*, *bmn* sont égaux (*N.* 71.), de même que les angles *bca*, *bnm*; donc ces triangles ont les côtés proportionnels (*N.* 159.), & nous avons *ab*, *bc* :: *bm*, *bn*, mais par la supposition nous avons aussi *ab*, *bc* :: AB, BC, donc *bm*, *bn* :: AB, BC, ou en alternant *bm*, AB :: *bn*, BC; mais *bm* est égal à AB par la construction; donc *bn* = BC, & les deux triangles *mbc*, ABC sont parfaitement égaux (*N.* 100.) à cause de l'angle B, égal à l'angle *b*, & des côtés qui comprennent l'an-

gle B, égaux aux côtés qui comprennent l'angle *b*; ainsi puisque les triangles *mbn*, *abc*, ont les trois angles égaux chacun à chacun, les triangles ABC, *abc*, auront aussi les trois angles égaux chacun à chacun, & partant leur côtés seront proportionnels (*N.* 159.).

162. *Definition.* Deux ou plusieurs figures sont dites *Semblables*, lorsqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun, & que les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

163. *Remarque.* Dans les triangles, il suffit de connoître que les trois angles sont égaux aux trois angles chacun à chacun, ou que les côtés sont proportionnels pour pouvoir dire qu'ils sont semblables, car l'une de ces conditions entraîne nécessairement l'autre avec elle (*N.* 159, 160.); & il faut dire la même chose de tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, & qui par conséquent sont composés d'un même nombre de triangles semblables. Mais à l'égard des autres figures, ce n'est pas la même chose. Tous les rectangles ont les quatre angles droits, & par conséquent égaux, & cependant tous les rectangles n'ont pas les côtés proportionnels : supposons par exemple, que les deux rectangles ABCD, *abcd* ayent les côtés proportionnels, c'est-à-dire qu'on ait AB, AD :: *ab*, *ad.* Je n'ai qu'à diminuer ou augmenter le côté *ab* du rectangle *abcd*, & dès-lors les côtés ne seront plus proportionnels; car si je prolonge *ab* en *e*, ce qui donnera le rectangle *aefd*, nous n'aurons plus AB, AD :: *ae*, *ad*, puisqu'il s'ensuivroit *ab*, *ad* :: *ae*, *ad*, & que par conséquent *ab* seroit égal à *ae*, à cause de *ad* = *ad*, ce qui est impossible. De même les côtés d'un paralellogramme peuvent être proportionnels aux côtés d'un rectangle, & cependant les angles du paralellogramme ne seront pas égaux aux angles du rectangle, &c. c'est pourquoi afin de ne pas équivoquer sur le terme de figures semblables, il faut toujours dire que les angles doivent être égaux chacun à chacun, & que les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

164. Proposition. XXXIX. *Les Figures semblables peuvent toujours se diviser en un même nombre de triangles semblables.*

Soient les deux pentagones irréguliers ABCDE, *abcde* (*Fig.* 99.) semblables entr'eux, des angles égaux B, *b*, je mene des droites à tous les angles où j'en puis mener, ce qui divise chacun de ces polygones en trois triangles. Or les deux triangles BAE, *bae* ayant l'angle A égal à l'angle *a*, & les côtés AB, AE proportionnels aux côtés *ab*, *ae*, par la supposition, sont semblables entr'eux

(*N.* 161.); donc l'angle AEB eſt égal à l'angle *aeb*, & comme l'angle AED eſt égal à l'angle *aed*, par la ſuppoſition l'angle BED eſt auſſi égal à l'angle *bed*; or dans les triangles ſemblables ABE, *abe*, les droites BE, *be* ſont proportionnelles aux côtés AE, *ae*, & ceux-ci ſont proportionnels aux côtés ED, *ed*; donc les droites BE, *be* ſont auſſi proportionnelles aux côtés ED, *ed*, & par conſéquent à cauſe de l'angle BED compris par les droits BE, ED égal à l'angle *bed*, compris par les droits *be*, *ed*, les triangles BED, *bed* ſont auſſi ſemblables, & continuant le même raiſonnement, on prouvera que les deux autres triangles BCD, *bcd* ſont ſemblables. Donc, &c.

165. PROPOSITION XL. *Les contours des figures ſemblables ſont entr'eux comme leurs côtés homologues, ou comme leurs rayons, ou comme leurs Apothêmes; ſi ces figures ont des rayons & des Apothêmes, ou comme les lignes ſemblablement poſées, c'eſt-à-dire qui ſont menées ou des angles égaux, ou par des points qui coupent les côtés homologues en même raiſon, & qui ſont des angles ègaux tournés du même côté.*

Soient les deux Hexagones réguliers ABCDEF, *abcdef* (*Fig.* 100.), diviſez l'ûn & l'autre en leurs ſix triangles égaux & ſemblables à cauſe de l'égalité des angles; les ſix côtés du premier étant égaux entr'eux, de même que les ſix côtés du ſecond; il eſt clair que la raiſon du côté AB au côté *ab*, eſt la même que celle du côté BC au côté *bc*, & ainſi de ſuite; donc les ſix côtés du premier pris enſemble, c'eſt-à-dire 6AB, contiendront autant de fois les ſix côtés du ſecond pris enſemble ou 6*ab* que AB contient *ab*; or les ſix côtés du premier forment ſon contour, & les ſix côtés du ſecond forment le contour du ſecond; donc le contour du premier eſt au contour du ſecond, comme le côté homologue AB, eſt au côté homologue *ab*.

Mais dans les triangles ſemblables AOB, *aob*, nous avons AB, *ab* : AO, *ao*; donc puiſque les contours ſont entr'eux comme les côtés AB, *ab*, ils ſont auſſi comme les rayons AO, *ao*.

Je mene les apothêmes OR, *or*, qui coupent les baſes BA, *ba* des triangles iſoſceles AOB, *aob* en deux également (*N.* 107.), & à cauſe que les baſes BA, *ba* ſont proportionnelles aux rayons OA, OA, leurs moitiés RA, *ra* ſont auſſi proportionnelles aux mêmes rayons, & partant à cauſe de l'angle compris RAO égal à l'angle compris *rao*, les triangles RAO, *rao* onr tous leurs côtés proportionnels (*N.* 161.); donc AO, *ao* : : OR, *or*; mais les

contours font entr'eux comme les rayons AO, *ao*; donc ils font aussi comme les apothêmes OR, *or*.

Je prens sur les côtés AF, *af*, les parties AH, *ah* égales, par exemple, chacune au tiers de ces lignes, & des points H, *h*; je mene des droites HS, *hs*, qui font des angles égaux avec les lignes AF, *af*, & du même côté, ces lignes HS, *hs* sont donc semblablement posées; or les triangles HSF, *hsf*, ayant les deux angles sur HF, égaux chacun à chacun aux deux angles sur *hf*, le troisiéme est par conséquent égal au troisiéme (*N.* 97.), & les deux triangles sont semblables, donc HF, *hf* :: HS, *hs*; mais les droites HF, *hf* étant les deux tiers des côtés AF, *af*, sont proportionnelles à ces côtés, donc les côtés AF, *af* sont entr'eux comme les semblablement posées HS, *hs*, & par conséquent les contours étant entr'eux comme les côtés AF, *af*, sont aussi comme les semblablement posées HS, *hs*.

Puisque les triangles HSF, *hsf* sont semblables, nous avons SF, *sf* :: HF, *hf*, or HF, *hf* :: AF, *af*, & AF, *af* :: OF, *of*, donc OF, *of* :: SF, *sf*, ou en alternant OF, SF :: *of*, *sf*. Donc en divisant, nous aurons OF—SF, OF :: *of* — *fs*, *of*, c'est-à-dire, OS, OF :: *os*, *of*, ou OS, *os* :: OF, *of*. Maintenant si je prolonge les droites HS, *hs* en T, *t*, les angles OST, *ost*, seront égaux à cause que leurs opposés au sommet sont égaux, & comme les angles SOT, *sot* sont aussi égaux, le troisiéme OTS sera égal au troisiéme *ots*, & les deux triangles OST, *ost*, seront semblables, ce qui donne ST, *st* :: SO, *so*; or SO, *so* :: OF, *of*, & les contours sont entr'eux comme les rayons OF, *of*, donc ils sont aussi comme les semblablement posées ST, *st*.

Et on prouvera par des semblables raisonnemens que les droites ST, *st* étant prolongées en V & *u*, les contours seront entr'eux, comme les semblablement posées TV, *tu*, & comme les trois lignes HS, ST, TV, sont à chacune des trois lignes *hs*, *st*, *tu*, dans la raison des contours; on prouvera aussi que les trois ensemble HS, ST, TV, c'est-à-dire la ligne HV, sont aux trois ensemble *hs*, *st*, *tu*, c'est-à-dire à la ligne *hu*, semblablement posée dans la raison des contours.

Et les mêmes choses se démontreront dans les Figures semblables irréguliéres (*Fig.* 99.), puisqu'on peut toujours les diviser en un même nombre de triangles semblables (*N.* 164.).

166. **Definition.** Les contours ou les circuits des Figures semblables régulieres, ou irrégulieres, se nomment *Périmétres*.

167. PROPOSITION XLI. *Si l'on divise en deux également l'un des angles* B *d'un triangle* ABC (Fig. 101.), *par une droite* BE *qui coupe le côté opposé* AC, *les segmens* AE, EC *du côté* AC, *sont entr'eux comme les côtés* AB, BC.

Des angles A, C, je mene des droites RS, MN, paralelles à BE, ce qui me donne deux espaces paralelles RSEB, MNEB; or par la construction les angles ABE, CBE étant égaux, les côtés AB, BC sont également inclinés entre ces deux espaces, & par conséquent ces deux côtés sont entr'eux comme leurs espaces; de même à cause de l'angle CEX, égal à son opposé au sommet AEB, les segmens AE, EC sont également inclinés dans leurs espaces, & sont entr'eux comme ces mêmes espaces; donc la raison des côtés AB, BC, est la même que celle des segmens AE, BC, l'une & l'autre étant la même que la raison des espaces, & partant AE, EC : : AB, BC.

168. PROPOSITION XLII. *Si du sommet de l'angle droit* ABC (Fig. 102.) *d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse sur l'hypotenuse* AC, *une perpendiculaire* BR, *le triangle sera divisé en deux autres triangles rectangles* ABR, RBC, *semblables entr'eux & au triangle* ABC.

Les triangles ABC, ABR ont l'angle droit ABC, égal à l'angle droit ARB, & l'angle aigu A est commun à tous les deux, donc le troisiéme est égal au troisiéme (*N.* 98.), & les deux triangles sont semblables (*N.* 162.). Par la même raison les triangles ABC, BRC, qui ont l'angle C commun, & l'angle droit égal à l'angle droit, sont semblables entr'eux, d'où il suit que les deux triangles ARB, BRC, sont semblables, puisqu'ils ne peuvent être semblables au triangle ABC, sans avoir chacun les trois angles égaux aux trois angles de ce triangle, & partant égaux entr'eux.

169. COROLLAIRE Ier. *La perpendiculaire* BR, *abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypotenuse* AC, *est moyenne proportionnelle entre les segmens* AR, RC *de l'hypotenuse.*

Les triangles ABR, BRC sont semblables (*N.* 168.), & partant les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels; or à cause que les triangles ABR, ABC sont aussi semblables (*N.* 168.), & que l'angle aigu A est commun à tous les deux, l'autre angle aigu ABR du triangle ABR, doit être égal à l'autre angle aigu ACB; & comme cet angle ACB, appartient au triangle rectangle BRC, semblable au triangle ABR, il s'ensuit que l'an-

gle aigu A du triangle ABR est égal à l'angle aigu CBR du triangle CBR. Nous avons donc dans ces deux triangles ABR, BRC, le côté AR du triangle ABR opposé à l'angle ABR, est au côté RB du même triangle opposé à l'angle A, comme le côté RB du triangle RBC opposé à l'angle C qui est égal à l'angle ABR, est au côté RC de ce même triangle opposé à l'angle RBC, égal à l'angle A. Ainsi AR, RB :: RB, RC, & par conséquent RB est moyenne proportionnelle entre les segmens AR, RC de l'hypotenuse.

170. COROLLAIRE II. *La perpendiculaire* BR *étant menée du sommet de l'angle droit sur l'hypotenuse, chaque côté* AB, BC *du triangle rectangle* ABC, *est moyen proportionnel entre l'hypotenuse & le segment de l'hypotenuse qui se trouve de son côté.*

Les triangles ABR, ABC sont semblables (*N.* 168.), & nous venons de voir que l'angle ABR est égal à l'angle C. Donc les côtés AR, AB du triangle ARB, sont proportionnels aux côtés AB, AC du triangle ABC, car il est aisé de voir que ces côtés sont opposés à des angles égaux. Ainsi nous avons AR, AB :: AB, AC, c'est-à-dire le côté AB, est moyen proportionnel entre le segment AR de l'hypothenuse qui se trouve de son côté, & l'hypothenuse entiere AC.

De même les triangles BRC, ABC sont semblables (*N.* 168.); & l'angle RBC est égal à l'angle A; donc les côtés RC, BC du triangle RBC, sont proportionels aux côtés BC, AC du triangle ABC; ainsi RC, BC :: BC, AC; le côté BC est moyen proportionnel entre le segment RC, & l'hypothenuse AC.

171. COROLLAIRE III. *Dans tout triangle rectangle* ABC (Fig. 103.) *le quarré de l'hypothenuse est égal aux quarrés des deux autres côtés pris ensemble.* Du sommet B de l'angle droit, j'abaisse la perpendiculaire BR sur l'hypothenuse, & par le Corollaire précédent, j'ai AR, AB :: AB, AC, & faisant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne; j'ai $AR \times AC = \overline{AB}^2$; ainsi élevant en A une perpendiculaire AP = AC, & achevant le rectangle APQR, ce rectangle est égal au quarré BMNA du côté AB. Or, par le même Corollaire précédent, j'ai RC, CB :: CB, AC; donc $RC \times AC = \overline{CB}^2$; c'est pourquoi élevant en C la perpendiculaire CS = AC, & achevant le rectangle CSQR; ce rectangle est égal au quarré CBTV du côté CB; donc les deux rectangles APQR, CSQR pris ensemble sont égaux aux deux

quarrés BMNA, CBTV; mais les deux rectangles pris ensemble forment le quarré APSC de l'hypothenuse AC, puisque les côtés AR, RC pris ensemble font l'hypothenuse AC, & que AP est égal à AC par la construction ; donc le quarré de l'hypothenuse est égal aux quarrés des deux autres côtés pris ensemble.

172. PROBLEME. *Les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle étant connus* (Fig. 103.), *connoître la perpendiculaire* BR, *abaissée de l'angle droit sur l'hypothenuse, & les segmens* AR, RC.

Nous avons $AR \times AC = \overline{AB}^2$ (*N.* 170.); divisant donc de part & d'autre par AC, nous aurons $AR = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$; c'est-à-dire, si l'on fait le quarré de la valeur du côté AB, & qu'on la divise par la valeur de l'hypothenuse, le quotient sera le segment AR, & retranchant la valeur de ce segment de la valeur de l'hypothenuse, le reste sera l'autre segment RC.

Maintenant, puisque le triangle ARB est rectangle, & que le côté AB est son hypothenuse ; nous aurons $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$, donc en retranchant $\overline{AR}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{AB}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{RB}^2$; c'est-à-dire que si du quarré du côté connu AB, on retranche le quarré du segment AR, qu'on peut connoître, comme on vient de voir, le reste sera le quarré de la perpendiculaire, & la racine quarrée de ce reste sera la valeur de la perpendiculaire.

173. PROPOSITION XLIII. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 104.) *le quarré du côté* AC *opposé à un angle aigu* B, *est égal à la somme des quarrés des autres côtés* AB, BC, *moins deux rectangles faits de l'un des côtés* BC, *par sa partie* BO, *coupée du côté de* B, *par la perpendiculaire* AO, *menée de l'angle opposé* A.

Je fais le quarré ADEC du côté AC, le quarré ABRS de AB, le quarré CBTV de CB, & le quarré COZX de CO. Je prolonge OZ en L, & XZ en F; ainsi comme le quarré de BC, contient le quarré de sa partie OC, plus le quarré de sa partie BO, plus deux rectangles égaux des deux parties (*N.* 140.); ces deux rectangles égaux sont OBFZ, ZLVX, & ajoutant au premier le quarré FTLZ de la partie BO, & au second un quarré HIVX, égal au même quarré de BO, les deux rectangles BOTL, ZLIH seront égaux, & seront deux produits de BO par BT ou BC. Cela posé.

Dans le triangle rectangle AOC, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$; or le quarré du côté BC surpasse le quarré $\overline{CO}^2$, de tout le gnomon BTVXZO, & comme dans le triangle rectangle ABO, le quarré du côté AB qui est l'hypothenuse de ce triangle rectangle, est égal au quarré $\overline{AO}^2$, plus le quarré $\overline{BO}^2$, & que par conséquent le quarré $\overline{AB}^2$ surpasse le quarré $\overline{AO}^2$ de la valeur de $\overline{BO}^2$, c'est-à-dire du petit quarré XVIH, il s'ensuit que les quarrés de BC, AB surpassent les quarrés $\overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, c'est-à-dire le quarré $\overline{AC}^2$ de la valeur du gnomon BTVXZO, plus celle du petit quarré VIHX, & par conséquent de la valeur des deux rectangles OBTL, ZLIH ou de deux produits de la partie BO par BT ou BC. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BO \times BC$.

174. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés d'un triangle* (Fig. 104.); *dans lequel la perpendiculaire* AO *menée de l'un des angles* A *sur le côté opposé* BC, *tombe en dedans du triangle, connoître la perpendiculaire, & les segmens* BO, OC *du côté* BC.

Puisque la perpendiculaire AO tombe au-dedans du triangle, les angles ABO, ACO, que les côtés AB, AC font avec le côté BC sont aigus, car la perpendiculaire tombe toujours du côté des moindres angles que font les obliques (*N.* 83.); ainsi le côté AC étant opposé à un angle aigu B, nous aurons $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BO \times BC$; & ajoutant de part & d'autre $2BO \times BC$, puis retranchant $\overline{AC}^2$, nous aurons $2BO \times BC = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, & divisant tout par BC, nous aurons $2BO = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{BC}$, c'est-à-dire, que si de la somme des quarrés des côtés AB, BC, on retranche le quarré du côté AC, & qu'on divise le reste par le côté BC, le quotient sera le double du segment BO, & la moitié du quotient sera le segment BO; c'est pourquoi, si du côté BC, on retranche le segment BO, le reste sera la valeur de l'autre segment OC.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ (*N.* 172.), & qu'en retranchant $\overline{BO}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2$, il s'ensuit que si du quarré du

du côté connu AB, on retranche le quarré du ſegment BO, qu'on peut connoître, comme on vient de voir, le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire AO; & la racine de ce reſte ſera la valeur de AO.

175. POPOSITION XLIV. *Dans tout triangle obtus-angle* ABC (*Fig.* 105.) *le quarré du côté* AC *oppoſé à l'angle obtus* ABC *eſt égal aux quarrés des côtés* AB, BC, *plus deux rectangles du côté* BC, *ſur lequel tombe la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé* A *par le prolongemennt* BO *de ce côté juſqu'à la perpendiculaire.*

Je fais le quarré ADEC, le quarré AORS de la perpendiculaire AO, le quarré COZX de OC, & le quarré CBTV de CB. Je prolonge les droites BT, VT en L, F, & comme le quarré de OC contient le quarré de ſa partie BC, plus le quarré de l'autre partie OB, plus deux rectangles égaux des deux parties (*N.* 140.), ces deux rectangles égaux ſont BOFT, TLXV, & chacun d'eux eſt le produit de OB par BC. Cela poſé.

Le triangle AOC étant rectangle, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$, or le quarré de OC vaut le quarré du côté BC, plus tout le gnomon BOZXVT, & comme dans le triangle rectangle AOB, dont AB eſt l'hypothenuſe, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, & qu'en retranchant $\overline{AO}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$, il s'enſuit que le quarré $\overline{AC}^2$, ou les deux quarrés enſemble $\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$, valent le quarré $\overline{BC}^2$, plus le gnomon BOZXVT, plus le quarré $\overline{AB}^2$, moins le quarré $\overline{OB}^2$, c'eſt-à-dire moins le quarré TFZL, mais le gnomon BOZXVT, moins le quarré TFZL n'eſt autre choſe que les deux rectangles BOFT, TLXV qui valent $2OB \times BC$; donc $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$.

176. PROBLEME. *Les trois côtés d'un triangle obtus-angles* ABC (*Fig.* 105.) *étant connus, connoître la perpendiculaire menée de l'un des angles aigus* A, *ſur le côté oppoſé* BC, *& le prolongement de ce côté ſur la perpendiculaire.*

Nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$ (*N.* 175.) retranchant donc de part & d'autre les quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, nous aurons $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = 2OB \times BC$, & diviſant de part & d'autre par CB, nous aurons $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{CB} = 2OB$, c'eſt-à-dire que ſi

de la valeur du quarré $\overline{AC}^2$, on retranche les valeurs des quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, & qu'on divise le reste par la valeur du côté BC, le quotient sera le double du prolongement OB; ainsi la moitié de ce quotient sera la valeur du prolongement.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, si on retranche de part & d'autre $\overline{OB}^2$, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$, ainsi retranchant de la valeur du quarré $\overline{AB}^2$, le quarré du prolongement OB, qu'on peut connoître, comme il vient d'être dit, le reste sera le quarré de la perpendiculaire AO, & la racine de ce reste sera la valeur de la perpendiculaire.

177. PROBLEME. *Une droite* AB (Fig. 106. 107.) *étant divisée en tant de parties qu'on voudra, égales ou inégales, diviser une autre ligne donnée* AD *en même raison que la ligne* AB.

Je fais à l'extrêmité A de la droite AB un angle à volonté DAB, dont je fais le côté AD égal à l'autre ligne donnée AD; je joints les extrêmités des côtés AB, AD, par la droite BD, & des points de division, je mene des paralelles à BD, lesquelles coupent la droite AD en même raison que AB; car menant par A une droite RS paralelle à BD, les droites AB, AD comprises dans l'espace paralelle RSBD, sont coupées en même raison par les droites MC, &c. paralelles aux paralelles RS, BD (*N.* 153.)

178. COROLLAIRE. *Si une ligne* AD (Fig. 106. 107.) *est coupée en parties proportionnelles aux parties d'une autre ligne* AB, *cette ligne* AD *ne peut pas être coupée du même côté en d'autres parties qui soient en même raison.*

Supposons que AD (*Fig.* 106.) soit coupée en C, en deux parties proportionnelles aux deux parties AM, MB de la droite AB. Si on veut que cette ligne AD puisse être coupée du même côté en deux autres parties qui soient encore dans la même raison, le point de division sera ou entre A & C, comme le point H ou en delà de C, comme le point T. Or, dans le premier cas, il est visible que la partie AH plus petite que AC, sera plus petite par rapport à la partie restante HD plus grande que CD que la partie AC, par rapport à la partie restante CD, & que par conséquent il ne sera pas vrai de dire: AH, HD :: AC, CD, de même dans le second cas, la partie AT plus grande que AC sera

plus grande par rapport à la partie TD moindre que CD, que AC n'est grand par rapport à CD, & il ne sera pas vrai non plus de dire AT, TD :: AC, CD. Donc AD ne peut pas être coupé du même côté en deux autres parties qui soient dans la raison des parties AC, CD.

Mais on pourroit fort bien diviser AD de l'autre côté en deux parties qui seroient dans la raison des parties AC, CD, car je n'ai qu'à prendre une partie DV égale à AC, & dès-lors l'autre partie AV sera égale à CD, & nous aurons DV, VA :: AC, CD.

Et on prouvera les mêmes choses si la ligne AD étoit divisée en un plus grand nombre de parties.

179. PROBLEME. *Trouver une troisiéme proportionnelle à deux lignes données* AC, AB (Fig. 108.).

Je fais un angle à volonté DAE; je porte sur le côté AE la premiere des lignes données de A en C; je porte la seconde sur l'autre côté de A en B, & je joints les points C, B par la droite CB; je porte aussi sur le premier côté AE la seconde ligne donnée de A en E, & du point E, menant la droite ED paralelle à CB, & qui coupe le côté AD en D, la droite AD est la troisiéme proportionnelle.

Car les triangles ACB, AED ayant l'angle A commun, les angles ACB, AED égaux à cause qu'ils sont faits du même côté par les paralelles BC; DE (*N.* 71.), & les angles ABC, ADE égaux aussi par la même raison, sont semblables. Donc AC, AB :: AE, AD; mais AB = AE par la construction; donc AC, AB :: AB, AD, & par conséquent AD est la troisiéme proportionnelle.

180. PROBLEME. *Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données* AB, AC, AD (Fig. 109.).

Je fais un angle quelconque DAE, je porte sur le premier côté DA la premiere des lignes données AB, de A en B, & sur le second EA, la seconde ligne AC de A en C. Je joints les points B, C par la droite BC, & portant la troisiéme ligne donnée AD sur le premier côté DA, de A en D; je mene par le point D la droite DE paralelle à BC, & qui coupe l'autre côté en E; la droite AE est la quatriéme proportionnelle.

Car les triangles ABC, ADE étant semblables à cause des paralelles CB, DE, nous avons AB, AC :: AD, AE.

181. PROBLEME. *Les deux premieres lignes d'une progression Géo-*

métrique de lignes étant données, continuer cette progression tant qu'on voudra.

Nommons les deux lignes données *a*, *b*. Je cherche une troisiéme proportionnelle à ces deux lignes, & je la nomme *c*; ainsi *c* est le troisiéme terme de la progression; je cherche une troisiéme proportionnelle aux deux lignes *b*, *c*, & la nommant *d*, elle sera le quatriéme terme de la progression, car par construction nous aurons *a*, *b* : : *b*, *c* & *b*, *c* : : *c*, *d*; donc *a*, *b* : : *b*, *c* : : *c*, *d* ou : : *a*, *b*, *c*, *d*, & continuant de la même façon, on trouvera tant de termes de la progression qu'on voudra.

Quant à la maniere de trouver la somme d'une progression Géométrique de lignes, elle est la même que celle que nous avons enseignée dans le premier Livre, en parlant des progressions Géométriques.

182. PROBLEME. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* AB, BC (Fig. 110.)

Je mets la petite sur la grande de B en C; je prolonge la grande du côté de B, en faisant BH égal à AC; du point A pris pour centre, & d'un rayon égal à AB; je décris un arc PR, du point H pris pour centre, & d'un rayon égal à HC; je décris un arc ST qui coupe l'arc PR en O, d'où je mene aux points C, B les droites OC, OB, & chacune de ces droites est la moyenne proportionnelle demandée, ce que je prouve ainsi:

Par la construction, nous avons AC = HB, ajoutant donc de part & d'autre la partie CB, nous aurons AB = HC; ainsi les arcs PR, TS ayant été décrits avec les rayons égaux AB, HC, qui pris ensemble sont plus grands que AH, ces deux rayons se couperont hors de la ligne AH en un seul point O du côté de O (*N.* 59.), & ce point sera également éloigné des extrêmités A, H de la ligne AH; c'est pourquoi si du point O on abaissoit une perpendiculaire sur AH, cette perpendiculaire couperoit AH en deux parties égales à cause des obliques égales ou rayons OA, OH (*N.* 54.), c'est-à-dire, sur le milieu Q de la partie CB, à cause de AC = BH, ce qui fait que AC + ½ CB = BH + ½ CB; ainsi les points C, B des obliques OC, OB étant également éloignés du point Q de la perpendiculaire, ces deux obliques sont égales (*N.* 53.), & le triangle OCB est isoscele; or, ABO est aussi isoscele, puisque AB est égal à AO, & l'un des angles ABO sur la base BO, est égal à l'un des angles OBC, sur la base CB du triangle isoscele OCB, donc le second angle

fur la bafe du triangle ABO eft égal au fecond angle fur la bafe du triangle OBC, & par conféquent le troifiéme angle eft égal au troifiéme (*N.* 97.), & les deux triangles ABO, OBC, font femblables; comparant donc les côtés oppofés aux mêmes angles, nous trouverons que les deux côtés AB, BO du triangle ABO font proportionnels aux deux côtés OB, BC du triangle OBC, c'eft-à-dire AB, BO :: BO, BC, & par conféquent BO eft moyenne proportionnelle entre les deux données AB, BC.

On trouvera dans le Chapitre qui traite du cercle, une autre maniere de chercher une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

183. DEFINITION. On dit que deux lignes a, b font *réciproques* à deux lignes c, d, lorfque l'une des deux premieres a eft à l'une des deux dernieres c, réciproquement comme l'autre des deux dernieres d, eft à l'autre des deux premieres b, ou ce qui revient au même, lorfque le produit des deux premieres eft égal au produit des deux dernieres, puifque fi nous avons $a, c :: d, b$, on aura auffi $ab = cd$, en faifant le produit des extrêmes & des moyens.

On dit auffi qu'une ligne eft coupée en deux parties *réciproques* aux parties d'une autre ligne, lorfque le produit des parties de la premiere ligne eft égal au produit des parries de l'autre, ou, ce qui revient au même, lorfque l'une des parties de la premiere ligne eft à l'une des parties de la feconde ligne réciproquement, comme l'autre partie de la feconde ligne eft à l'autre partie de la premiere.

184. PROPOSITION XLV. *Si deux rectangles* ABCD, abcd (Fig. 111.) *font égaux fans avoir ni les bafes* AB, ab *égales ni les hauteurs* AD, ad, *les hauteurs* AD, ad *font réciproques aux bafes* AB, ab.

Le rectangle ABCD, eft égal au produit AD × AB de fa bafe par fa hauteur, & le rectangle *abcd* eft égal au produit *ad* × *ab*, donc à caufe de l'égalité des rectangles, nous avons AD × AB = *ad* × *ab*; & tirant de là une proportion comme il a été dit dans le premier Livre au fujet des proportions Géométriques, nous aurons AD, *ad* :: *ab*, AD, c'eft-à-dire, les hauteurs AD, *ad* font réciproques aux bafes *ad*, *ab*.

185. COROLLAIRE. *On peut dire auffi que dans deux rectangles égaux, la hauteur* AD *& la bafe* AB *du premier font réciproques à la hauteur* ad, *& à la bafe* ab *du fecond, puifqu'on a* AD × AB = ad × ab, *comme il eft requis* (N. 183.).

186. PROPOSITION XLVI. *Le plus grand rectangle qu'on puisse faire de deux parties qui composent une ligne, est celui que l'on fait lorsque ces deux parties sont égales entr'elles.*

Soit la ligne CD (*Fig.* 112.) divisée en deux également en O; le rectangle de la partie DO par la partie OC est égal au quarré de la moitié DO; or, si l'on coupe la même ligne en deux inégalement en E; le rectangle des parties inégales DE, EC est égal au quarré de la moitié DO, moins le quarré de la partie interceptée EO; (*N.* 146.) donc le rectangle des deux parties DE, EC, inégales, est moindre que le rectangle des parties DO, OC; & comme cela arrivera toujours en quelque point qu'on veuille couper la droite DC en deux parties inégales, il s'ensuit que le rectangle des parties égales DO, OC est le plus grand qu'on puisse faire de deux parties qui composent DC.

187. PROBLEME. *Couper une droite* AB (Fig. 112.) *en deux parties réciproques aux deux parties* DE, EC *qui composent une autre ligne* DC.

Je prens une moyenne proportionnelle entre les deux parties DE, EC de la droite DC; j'éleve sur l'extrêmité B de la droite BA une perpendiculaire BH que je fais égale à la moyenne proportionnelle, du point H pris pour centre, & avec un rayon égal à la moité ZB de la ligne BA; je décris un arc, & il peut arriver, ou que cet arc coupe la droite BA en un point S, ou qu'il la touche en B sans la couper, ou qu'il ne la touche ni ne la coupe; si l'arc coupe la droite AB en S, je porte la partie BS sur ZB de Z en X, & les parties BX, XA de la droite BA sont les réciproques demandées. Si l'arc touche simplement la droite BA, les deux réciproques demandées seront les deux moités ZB, ZA de la droite BA, & si l'arc ne touche ni ne coupe la droite BA; le Problême est impossible. Prouvons tous ces cas.

En premier lieu, si l'arc coupe BA en S, je mene le rayon HS, qui par la construction est égal à BZ; le triangle HBS étant rectangle, nous avons $\overline{HB}^2+\overline{BS}^2=\overline{SH}^2$; (*N.* 171.) donc en retranchant $\overline{BS}^2$ de part, nous aurons $\overline{HB}^2=\overline{SH}^2-\overline{BS}^2$; or SH $=$BZ, & BS$=$ZX; donc $\overline{SH}^2=\overline{BZ}^2$, & $\overline{BS}^2=\overline{ZX}^2$, & partant $HB^2=\overline{SH}^2-\overline{BS}^2=\overline{BZ}^2-\overline{ZX}^2$; mais la ligne AB étant divisée en deux également en Z & en deux également en X, nous

avons $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$; (*N.* 146) donc $BX \times XA = \overline{HB}^2$; or, HB étant moyenne proportionnelle entre les parties DE, EC de la droite DC, son quarré $\overline{BH}^2$ est égal au produit $DE \times EC$ des extrêmes; donc $BX \times XA = DE \times EC$, & par conséquent les parties BX, XA de la droite BA, sont réciproques aux parties DE, EC de la droite DC (*N.* 183.).

En second lieu, si l'arc touche la ligne BA, il faut qu'il la touche en B; c'est-à-dire que son rayon HS soit égal à la perpendiculaire HB; car s'il étoit plus grand; il est clair que lorsque ce rayon en tournant au tour de H seroit parvenu à la position HS, son extrémité S tomberoit au-delà de B : par exemple, en S, & que par conséquent l'arc couperoit la ligne AB au lieu de la toucher; donc, puisque dans ce second cas, le rayon est égal à la perpendiculaire, le quarré du rayon est aussi égal à la perpendiculaire BH; or, le rayon est égal à BZ & le quarré de BZ est égal au rectangle $BZ \times ZA$; donc $BZ \times ZA = \overline{HB}^2 = DE \times EC$, & par conséquent les deux moitiés de la ligne AB sont réciproques aux parties DE, EC de la ligne DC.

Enfin si l'arc ne coupe ni ne touche BA, son rayon est par conséquent plus petit que HB, & son quarré $\overline{BZ}^2$ ou le rectangle $BZ \times ZA$ est plus petit que le quarré HB ou que le rectangle $DE \times EC$; mais le rectangle $BZ \times ZA$ est le plus grand de tous les rectangles qu'on peut faire en coupant BA en deux parties, & faisant leur rectangle; (*N.* 186.) donc on ne peut pas couper BA en deux parties dont le produit soit égal au produit $DE \times EC$; & le Problême est impossible.

188. COROLLAIRE. *Si une ligne* BA (Fig. 113.) *est coupée en deux parties* BX, XA *réciproques aux deux parties* DE, EC, *on ne peut pas la couper en un autre point du même côté par rapport au milieu* Z *en deux autres parties réciproques à* DE, EC. Le point auquel on voudroit couper cette ligne, seroit, ou entre B & X, comme le point M, ou entre X & le centre Z, comme le point *m*; dans le premier cas nous aurons $BM \times MA = \overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$ à cause de AB coupée en deux également en Z, & en deux inégalement en M; donc, si l'on suppose que les parties BM, MA soient réciproques aux deux DE, EC, nous aurons $BM \times MA$ ou $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = DE \times EC$; or, on suppose aussi $BX \times XA$

$= DB$ par la construction; donc $DR \times DB = \overline{RB}^2$, & par conséquent DR. RB :: RB. DB.

191. COROLLAIRE Ier. *Une ligne* DB *ou* AB *étant divisée en moyenne & extrême raison, si on lui ajoûte la médiane* RB *ou* BH, *on aura une ligne entiere* AH *qui sera encore divisée en moyenne & extrême raison, & dont la mediane sera la ligne* AB.

Par la Proposition précédente le quarré ABCDE est égal au rectangle AHMN; c'est-à-dire $\overline{AB}^2 = AH \times BH$: donc, HB. AB :: AB. AH.

192. COROLLAIRE II. *Une ligne* AH *étant divisée en moyenne & extrême raison; si on porte la petite partie* BH *sur sa médiane* AB *ou* BD *de* B *en* R, *cette médiane sera divisée en* R *en moyenne & extrême raison;* ce qui a été démontré ci-dessus (*N.* 190.).

193. COROLLAIRE III. *Une ligne* AH *étant divisée en moyenne & extrême raison; si à sa petite partie* BH *on ajoûte la moitié* CB *de la médiane, le quarré de la somme* CH *est égale à cinq quarrés de la moitié* CB; par la construction que nous avons faite, (*N.* 190.) la droite CD est égale à CH, & par conséquent $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2$; or, à cause du triangle rectangle CBD; nous avons $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$, & parce que DB est double de CB, nous avons $\overline{DB}^2 = 4\overline{CB}^2$; (*N.* 143.) donc $\overline{CD}^2 = 4\overline{CB}^2 + \overline{CB}^2 = 5\overline{CB}^2$, & par conséquent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$.

194. COROLLAIRE IV. *Si une ligne* AH *est divisée en moyenne & extrême raison; la petite ligne, la médiane & la ligne entiere sont incommensurables entr'elles.*

Par le Corollaire précédent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$; donc $\overline{CH}^2$. $\overline{CB}^2$ :: 5. 1, & tirant la racine quarrée de tous les termes CH. CB :: $\sqrt{5}$. 1; donc en divisant CH—CB. CB :: $\sqrt{5} - 1$. 1, c'est-à-dire BH CB. :: $\sqrt{5} - 1$. 1, & doublant les conséquents BH. AB :: $\sqrt{5} - 1$. 2; mais le terme $\sqrt{5} - 1$ est incommensurable au terme 2, puisqu'on ne peut pas exprimer leur rapport; donc le rapport de la petite ligne BH à la médiane AB est inexprimable, & ces deux lignes sont incommensurables.

Puisque BH. AB :: $\sqrt{5} - 1$. 2; donc, en composant, nous aurons BH + AB. AB :: $\sqrt{5} - 1 + 2$. 2 ou AH. AB :: $\sqrt{5} + 1$. 2; mais les deux derniers termes sont incommensurables; donc

les deux premiers AH, AB, c'eſt-à-dire la ligne entiere & la médiane ſont incommenſurables.

De même, puiſque BH. AB :: $\sqrt{5} - 1. 2$; donc en compoſant d'une autre façon, nous aurons BH. BH + AB :: $\sqrt{5} - 1. \sqrt{5} - 1 + 2.$ ou BH. AH :: $\sqrt{5} - 1. \sqrt{5} + 1$; mais les deux derniers termes ſont incommenſurables; donc la petite BH & la ligne AH le ſont auſſi.

195. COROLLAIRE V. *Si deux lignes* AH, BD (Fig. 114.) *ſont diviſées chacune en moyenne & extrême raiſon, leur parties ſont proportionelles.*

Nous avons vû par le Corollaire précédent que la petite partie BH eſt à la médiane AB comme $\sqrt{5} - 1$ eſt à 2, & cela eſt à l'égard de toutes les lignes diviſées en moyenne & extrême raiſon; donc dans la ligne BD, nous aurons auſſi DR. RB :: $\sqrt{5} - 1. 2$, par conſéquent BH. AB :: DR. RB.

196. PROBLEME. *Deux lignes droites égales* AB, BC (Fig. 115.) *étant données, trouver la baſe qu'il faut leur donner pour conſtruire un triangle iſoſcele* ABC, *dont chaque angle de la baſe ſoit double de l'angle* B *du ſommet.*

Je coupe l'une des droites données AB en moyenne & extrême raiſon, & prenant une droite AC égale à ſa médiane BR, je décris avec AC & les deux droites menées AB, BC un triangle ABC qui eſt le triangle demande.

Pour le prouver, je mene la droite RC, & à cauſe que AB eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, j'ai AR. RB :: RB. AB; (*N.* 189.) mais RB = AC : donc AR. AC :: AC. AB, ainſi les deux côtés AR. AC du triangle ACR, ſont proportionnels aux deux côtés AC, AB du triangle ABC & comme l'angle compris A eſt le même dans l'un & dans l'autre; les deux triangles ACR, ABC ſont ſemblables, (*N.* 161.) & par conſéquent le triangle ACR eſt iſoſcele, de même que le triangle ABC; ce qui rend auſſi iſoſcele le triangle RCB, puiſque AC = CR = RB : or, l'angle ARC externe au triangle RCB, vaut les deux internes oppoſés B, BCR (*N.* 97.) ou le double de l'angle B, à cauſe que les deux angles B & BCR du triangle iſoſcele RCB ſont égaux, & l'angle ARC eſt égal à l'angle RAC, puiſque le triangle ACR eſt iſoſcele; donc, dans le triangle iſoſcele ABC, l'angle A ſur la baſe eſt double de l'angle B au ſommet.

197. PROBLEME. *Une ligne* AC (Fig. 116.) *étant donnée, conſ-*

truire sur cette ligne un triangle isoscele, dont chaque angle sur la base soit double de l'angle au sommet.

Je divise la droite AC en moyenne & extrême raison en S; j'ajoûte la médiane AS à la ligne AC de A en N, & avec la droite AC & deux autres droites AB, BC égale chacune à la droite CN, je construit un triangle isoscele qui est le triangle demandé.

Car, puisque la droite AN est égale à la médiane de AC divisée en moyenne & extrême raison, la droite CN est aussi divisée en moyenne & extrême raison en A, (*N.* 191.) & sa médiane est AC : or, AB = CN par la construction; donc si nous coupons AB en moyenne & extrême raison en R, sa médiane BR sera égale à la médiane AC; ainsi nous avons un triangle isoscele ABC dont la base AC est la médiane de l'un de ses côtés, & par conséquent nous démontrerons comme dans le Problême précédent, que chaque angle sur la base est double de l'angle du sommet.

198. COROLLAIRE. *Dans tout triangle isoscele* ABC (Fig. 115. 116.) *dont chaque angle de la base est double de celui du sommet, si l'on coupe l'un des angles de la base en deux également, par une droite* CR *qui coupe le côté opposé en* R; *ce côté sera coupé en moyenne & extrême raison.* C'est une suite évidente de ce qui a été dit ci-dessus (*N.* 196.).

199. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 115. 116.) *dont chaque angle de la base est double de celui du sommet; l'angle du sommet est de 36 degrés, & chaque angle sur la base est de 72.* Je divise chaque angle de la base en deux également; ainsi les trois angles du triangle valent ensemble cinq angles égaux à celui du sommet : or, les trois angles du triangle valent ensemble deux droits ou 180 degrés; (*N.* 97.) donc les cinq angles égaux valent aussi 180 degrés, & par conséquent chacun d'eux en vaut 36 qui est le cinquiéme de 180. L'angle du sommet vaut donc 36, & chaque angle de la base vaut 72, puisqu'il est double de l'angle du sommet.

200. PROPOSITION XLVII. *Si plusieurs paralelles* AB, CD, EH. &c. (Fig. 117.) *sont coupées par plusieurs lignes* AH, MN, RS, BE &c. *qui se coupent en un même point; ces paralelles sont coupées en même raison.*

Comparons d'abord les paralelles AB, CD qui sont du même côté par rapport au point O; les triangles AOM, COT sont

semblables, à cause de l'angle AOM commun, des angles OAM, OCT faits par les paralelles avec AO égaux entr'eux, & des angles OMA, OTC égaux pour la même raison; ainsi nous avons AM, CT :: OM. OT. or, les triangles MOR, TOV étant aussi semblables, donnent MR. TV :: OM. OT; donc AM. CT :: MR. TV; mais les mêmes triangles MOR, TOV, donnent MR. TV :: OR. OV, & à cause des triangles semblables ROB, VOD nous avons RB, VD :: OR. OV. donc MR. TV :: RB. VD; ainsi la raison des parties AM, CT des paralelles AB, CD étant égale à la raison des parties MR, TV, & celle-ci étant égale à la raison des parties RB, VD; il s'ensuit que les paralelles AB, CD sont coupées en même raison.

Maintenant, comparons les paralelles AB, EH qui sont de différents côtés par rapport au point O; les triangles AOM, HON sont semblables, à cause de l'angle AOM égale à l'angle HON qui lui est opposé au sommet, de l'angle OAM égal à son alterne OHN, & de l'angle OMA égal à son alterne ONH; donc AM. NH :: MO. NO; or les triangles MOR, SON étant semblables par les mêmes raisons, donnent MR. SN :: MO. NO; donc AM. NH :: MR. SN; mais les mêmes triangles MOR, SON donnent aussi MR. SN :: RO. SO, & à cause des triangles semblables ROB, SOE, nous avons RB. SE :: RO. SO; donc MR. SN :: RB. SE; ainsi la raison des parties AM, HN des paralelles AB, EH étant égale à la raison des parties MR, SN, & celle-ci égale à celle des parties RB, SE; il est clair que les deux paralelles AB, EH sont coupées en même raison: & ainsi des autres.

201. PROBLEME. *Couper une ligne droite donnée* AB (Fig. 118.) *en tant de parties égales que l'on voudra.*

Je prens une droite indéfinie NX, sur laquelle je porte avec une ouverture de compas à discrétion, autant de parties égales qu'on en demande pour la ligne AB; par exemple quatre, NR, RS, ST, TX. Je fais sur XN un triangle équilateral NVX; & du point V, je mene des droites aux points de division R, S, T. Cela fait, je prens avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte sur les deux côtés VX, VN prolongés, s'il le faut, de V en H, & de V en L; je joints les points H, L par la droite HL, & prolongeant, s'il est nécessaire, les droites VR, VS, VT jusqu'à ce qu'elles coupent la droite HL, cette ligne HL est égale à la droite donnée, & elle est divisée en nombre de parties requis.

Car à cauſe des baſes paralelles XN, HL, les triangles VXN, VHL ſont ſemblables ; or, le triangle VXN eſt équilateral; donc le triangle VHL l'eſt auſſi, & par conſéquent HL = HV, mais VH eſt égal à AB par la conſtruction, donc HL eſt auſſi égal à AB. Or, par la Propoſition précédente, les droites XN, HL paralelles entre les lignes qui partent du même point V, ſont diviſées en même raiſon, & XN a été diviſée en quatre parties égales ; donc HL eſt auſſi diviſée en 4 parties égales.

Cette pratique eſt fort ingénieuſe, mais elle a l'inconvenient qu'après avoir diviſé HL en parties égales, il faut porter ces parties ſur la droite AB, ce qui eſt quelquefois embarraſſant, ſurtout lorſque les parties égales ſont fort petites. C'eſt pourquoi j'aimerois mieux me ſervir de la pratique ſuivante.

Soit donc la ligne AB (119.) qu'on propoſe de diviſer en quatre parties égales ; je fais en A un angle à volonté BAX, & du point B, je mene une paralelle au côté AX ; je prens une ouverture de compas à diſcrétion, & je la porte quatre fois ſur le côté indéfini AX, de A en M, de M en N, &c. Je porte la même ouverture auſſi quatre fois ſur la paralelle indéfinie BZ, de B en S, de S en T, &c. Je joints les points de diviſion des lignes AC, BD par des droites CB, RS, NT, MV, AD, & ces lignes coupent la droite AS en quatre parties égales.

Car AB étant inclinée entre les paralelles AC, BD, les angles alternes BAC, ABD ſont égaux ; or, les côtés AC, AB du triangle CAB, ſont égaux chacun à chacun aux côtés BD, BA du triangle ABD, donc à cauſe des angles compris égaux, ces deux triangles ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), & l'angle ABC eſt égal à l'angle BAD; mais ces angles ſont alternes entre les droites BC, AD, donc ces droites ſont paralelles entr'elles (*N.* 73.). Or, les droites AC, BD inclinées dans l'eſpace paralelle BCAD ſont coupées proportionnellement ; donc les lignes RS, NT, MV qui les coupent ſont paralelles aux paralelles BC, AD (*N.* 157.), & par conſéquent les mêmes lignes RS, NT, &c. coupent en même raiſon l'inclinée AB (*N.* 153.), c'eſt-à-dire, en quatre parties égales.

202. *Definition*. Si une ligne droite AB (*Fig.* 120.) eſt coupée en trois parties AC, CD, DB, de ſorte que la premiere AC ſoit à la ſeconde CD, comme toute la ligne AB eſt à la troiſiéme DB, cette ligne eſt dite être coupée *Harmoniquement, ou en trois parties Harmoniquement.*

Et il faut obſerver que quand une ligne eſt ainſi coupée, on a auſſi la troiſiéme partie DB, eſt à la ſeconde CD, comme la ligne entiere eſt à la premiere AC. Car par la définition nous avons AC, CD :: AB, DB; donc en faiſant le produit des extrêmes & des moyens, nous aurons $AC \times DB = CD \times AB$, d'où l'on tire cette proportion DB CD :: AB, AC; ainſi l'on peut dire que *quand une ligne eſt diviſée harmoniquement en trois parties, chaque extrême, eſt à la partie du milieu comme la ligne entiere eſt à l'autre extrême.*

203. COROLLAIRE. *Quand une ligne* AB (Fig. 120.) *eſt diviſée harmoniquement, la partie du milieu* CD *eſt toujours moindre que chacune des extrêmes* AC, DB. Car puiſque AC, CD :: AB, DB, & que AB eſt plus grand que DB; AC doit être auſſi plus grand que CD. De même, puiſque nous avons DB, CD :: AB, AC, & que AB eſt plus grand que AC, DB doit être auſſi plus grand que CD.

204. PROBLEME. *Diviſer une ligne droite* AB (Fig. 120.) *en trois parties harmoniquement.*

Je prens hors de la ligne AB & de ſes prolongemens, un point quelconque R, d'où je mene aux extrêmités A, B les droites RA, RB. Je coupe l'une ou l'autre de ces droites en un point quelconque P, & de ce point, je mene ſur AB la droite PD paralelle à l'autre ligne RA. Je prolonge PD en-delà de D, faiſant DS=PD; du point S, je mene au point R la droite SR qui coupe la droite AB en C, & la ligne AB eſt coupée harmoniquement aux points C, D. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe des paralelles AR, SP qui font les angles alternes égaux, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui eſt oppoſé au ſommet, les triangles ACR, SCD ſont ſemblables; donc AC, CD :: AR, SD; or, les triangles ARB, DPB étant ſemblables à cauſe des baſes AR, DP paralelles, donnent AB, DB :: AR, DP ou AB, DB :: AR, SD, puiſque DP=SD par la conſtruction; donc AC, CD :: AB, DB, & partant la ligne AB eſt diviſée harmoniquement.

205. COROLLAIRE Ier. *Quand on propoſe de diviſer une ligne harmoniquement ſans déterminer aucune de ſes parties, le Problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.* Par le Problême précédent, le point R peut être pris où l'on voudra, le point P peut être pris à diſcrétion ſur l'une ou l'autre des lignes RA, RB; or, tout cela peut varier d'une infinité de façons, & donner ſur

la ligne AB une infinité de points C, D. Donc, &c.

206. COROLLAIRE II. *Mais si la ligne* AB *est déterminée & quelqu'une de ses parties, ou si deux de ses parties sont connuës, & que la ligne entiere soit inconnuë, tout est déterminé, & le problême ne peut avoir qu'une solution.*

En premier lieu, si la ligne AB est connuë & l'une ou l'autre de ses extrêmes aussi; par exemple, la partie AC, & qu'il s'agisse de trouver le point D auquel le reste CB de la ligne doit être coupée; nous savons qu'il faut avoir AC, CD :: AB, DB, ou en alternant AC, AB :: CD, DB; c'est pourquoi il n'est question que de couper CB en deux parties CD, DB proportionnelles à la partie AC, & à la ligne entiere AB. Or, AB ne peut pas être coupée du même côté en deux autres parties proportionnelles à AC, AB (*N.* 178.); donc le problême ne peut avoir qu'une solution.

En second lieu, si la ligne AB est connue, & qu'on dise que la partie du milieu est égale à une ligne donnée. Nous savons que nous devons avoir AC, CD :: AB, DB, ce qui donne AC×DB = CD×AB; ainsi les deux extrêmes que nous ne connoissons pas en particulier, doivenr être réciproques à la ligne entiere AB, & à sa partie CD (*N.* 183.) dont nous connoissons la valeur; c'est pourquoi retranchant de la ligne AB la valeur de sa partie, le reste sera la somme des deux extrêmes AC, DB, & ajoutant à la ligne AB une droite AM égale à la valeur de la partie du milieu, la somme sera celle de la ligne entiere & de sa partie CD. Divisant donc la somme des extrêmes AC + DB en deux parties réciproques aux deux parties de la somme MB, ces deux parties seront les valeurs des extrêmes, & comme la ligne égale à la somme AC + DB, ne peut être coupée de deux façons différentes en deux telles parties réciproques, ensorte que les parties d'une seconde division qu'on voudroit faire, fussent différentes des deux parties de la premiere division (*N.* 188.). Il s'ensuit que le Problême n'a qu'une solution.

En troisiéme lieu, si les deux parties de suite MC, CD, sont connuës, & qu'on demande de trouver toute la ligne; nous savons que nous devons avoir AC, CD :: AB, DB; donc en divisant, nous aurons AC — CD, CD :: AB — DB, DB, c'est-à-dire, AC — CD, CD :: AD, DB, & par conséquent il ne sera question que de chercher une quatriéme proportionnelle à la différence AC — CD des lignes connuës AC, CD, à la ligne CD,

& à la somme AD des deux lignes ; & comme on ne peut pas prendre deux quatriémes proportionnelles différentes à trois grandeurs déterminées, le Problême est déterminé.

Enfin, si les deux extrêmes AC, BD (*Fig.* 121.) sont données ; & qu'on demande la partie du milieu, nous savons par le cas précédent que les deux extrêmes doivent être réciproques à la partie du milieu, & à la ligne entiere, c'est-à-dire que le produit AC×BD, doit être égal au produit de la partie du milieu par la ligne entiere (*N.* 183.). Ainsi je mene une ligne MR égale à la somme des extrêmes, faisant MN = AC, & NR = BD, & divisant MR en deux également en O, j'ai MN×NR = $\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$ (*N.* 146.). Il ne s'agit donc plus que d'ajouter à la ligne MR une ligne MV, telle que le rectangle de l'ajoutée MV par la ligne entiere VR, soit égal au rectangle MN×NR, & de faire voir ensuite que cette ajoutée est la partie du milieu, & qu'il ne peut y en avoir d'autre. Or, nous savons que nous devons avoir VM×VR $= \overline{VO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 148.) ; donc il faut que nous ayons aussi $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 =$ MN×NR, & partant $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$, & ajoutant $\overline{MO}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{VO}^2 = 2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$; pour trouver donc ce quarré $\overline{VO}^2$, & par conséquent sa racine VO. J'éleve sur le milieu O de la ligne MR une perpendiculaire OX, que je fais égale à MO ou OR, & je mene la droite RX, ce qui donne un triangle rectangle isoscele, dans lequel j'ai $\overline{RX}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OX}^2$ (*N.* 171.), & à cause de OR = OX = MO, j'ai $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$ Du point N pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à RX, je décris un arc qui coupe en Z la perpendiculaire OX prolongée, & menant la droite NZ, laquelle est égale par conséquent à RX, j'ai un autre triangle rectangle NZO, qui donne $\overline{ZN}^2$ ou $\overline{RX}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.) ; mais $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$, donc $2\overline{MO}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$, & retranchant $\overline{NO}^2$ de part & d'autre j'ai $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{ZO}^2$; mais $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{VO}^2$, comme on vient de voir ; donc $\overline{VO}^2 = \overline{ZO}^2$, & VO = ZO ; ainsi prolongeant OM au-delà de M, & portant ZO de O en V, nous aurons la droite VO, de laquelle retranchant MO, le

le reste sera la petite partie cherchée, faisant donc une ligne égale aux trois VM, AC, BD, & dont VM, soit la partie du milieu, cette ligne sera la ligne divisée harmoniquement, & qui aura pour extrêmes les deux données AC, BD, & le Problême n'a qu'une solution; car si VM devenoit plus grand ou plus petite, le rectangle de VM, par toute la ligne, seroit plus grand ou plus petit que le rectangle ACxBD ou $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$.

207. COROLLAIRE III. Il suit du Corollaire précédent que *si deux lignes égales divisées harmoniquement ont une des extrêmes égale à une des extrêmes ou la partie du milieu égale à la partie du milieu, les deux autres parties sont égales chacune à chacune aux deux autres parties, & que si les deux extrêmes d'une ligne sont égales aux deux extrêmes d'un autre, ou une extrême & la partie du milieu égale à une extrême, & la partie du milieu les deux lignes sont égales*; car autrement le Problême ne feroit pas déterminé dans tous les cas dont nous avons parlé (*N.* 206.), ce qui n'est pas possible.

208. COROLLAIRE IV. *Si d'un point* R (Fig. 122.) *pris hors d'une ligne* AB *divisée harmoniquement aux points* C, D, *on mene quatre lignes indefinies qui passent par les points* A, C, D, B *de la ligne* AB, *toute ligne* PS, HZ, *&c. qui coupera trois de ces lignes, & qui sera paralelle à la quatriéme, sera coupée en deux également entre les lignes qu'elle coupera.*

Du point D, je mene PS paralelle à AR, & qui coupe les trois lignes RZ, RT, RV, les triangles ARC, DSC sont semblables, à cause des angles alternes que font les paralelles AR, PS, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui est opposé au sommet; donc AR, SD :: AC, CD; or, les triangles ARB, DPB étant semblables à cause des bases paralelles AR, DP, donnent AR, DP :: AB, DB, & par la supposition nous avons AC, CD :: AB, DB, donc les raisons AR, SD & AR, DP qui sont égales aux deux précédentes, sont égales entr'elles, & nous avons AR, SD :: AR, DP, c'est-à-dire SD = DP, à cause des antécédens égaux AR, AR. Ainsi SP est divisée en deux également entre les trois lignes RZ, RT, RV; mais toutes les lignes HZ, &c. menées entre ces trois lignes paralellement à RA ou à PS, sont coupées en même raison que PS (*N.* 200.); donc elles sont coupées en deux également.

Et on prouveroit aisément la même chose si la ligne PS (*Fig.* 123.) avoit été menée du point C entre les trois RX, RZ, RT, para-

lellement à RV; car à cause des triangles semblables CSD, RDB, on auroit RB, CS :: DB, DC, & les triangles semblables ARB, APC donneroient RB, PC :: AB, AC; mais à cause que la ligne AB est divisée harmoniquement, on auroit AB, AC :: DB, DC; donc on auroit aussi RB, PC :: RB, CS, & partant PC = CS. Mais toutes lignes HT, &c. paralelles à AV ou à PS sont coupées en même raison par les lignes RX, RZ, RT; donc elles sont aussi coupées en deux également.

209. COROLLAIRE V. *Si quatre lignes qui partent d'un même point* R (Fig. 122. 123.) *sont disposées de façon que toute ligne qui en coupe trois, & qui est paralelle à la quatriéme, soit coupée en deux également entre les trois lignes qui les coupe, je dis que toute ligne qui coupera les quatre lignes à la fois dans quelque position que ce soit sera coupée harmoniquement entre les quatre lignes.*

D'un point quelconque A de la ligne RX (*Fig.* 122.); je mene une droite AB entre les quatre lignes RX, RZ, RT, RV, & comme on suppose que toute ligne HZ paralelle à RX, & comprise entre les trois autres, est divisée en deux également; je mene du point D la droite PS paralelle à RX, & par conséquent j'ai SD = DP; or, les triangles semblables ARC, SCD donnent AR SD :: AC, CD, & à cause des triangles semblables ARB, DPB, AR, PD ou SD :: AB, DB; donc AC, CD :: AB, BD, c'est-à-dire AB est divisée harmoniquement.

Et ce seroit la même chose si on disoit que toute ligne PS (*Fig.* 123.) paralelle à RV & comprise entre les trois autres, étoit coupée en deux également.

210. COROLLAIRE VI. *Si quatre lignes* RX, RZ, RT, RV (Fig. 124.) *qui partent d'un même point* R, *sont tellement disposées que toute ligne* PT *comprise entre trois, & paralelle à la quatriéme, soit divisée en deux également, ou, ce qui revient au même, que toute ligne* AB *comprise entre les quatre, soit coupée harmoniquement : Je dis que ces quatre lignes étant prolongées au-delà de* R, *ce qui donnera huit lignes* RX, RZ, RT, RV, RI, RL, RS, RQ, *il arrivera toujours que toute ligne qui coupera quatre de ces huit lignes sera divisée harmoniquement, & que toute ligne comprise entre trois de ces lignes & paralelle à une quatriéme, sera divisée en deux également.*

En premier lieu, il est clair que si je mene entre les quatre prolongemens des quatre lignes, la droite MF paralelle à AB, elle sera divisée en même raison que AB (*N.* 200.), & par conséquent harmoniquement, & comme delà il suit que toute ligne

paralelle à l'un de ces prolongemens, & compris entre les trois autres, sera divisée en deux également (*N.* 208.); il s'ensuit aussi que toute ligne qui sera comprise entre les quatre dans quelque position que ce soit sera coupée harmoniquement (*N.* 209.).

En second lieu, puisque les quatre RX, RZ, RT, RV coupent AB harmoniquement par la supposition, & qu'ainsi toute ligne comprise entre les trois RZ, RT, RV & paralelle à RA ou RQ, est coupée en deux également, il s'ensuit que les quatre RZ, RT, RV, RQ, sont disposées de la façon qu'il faut, pour que toute ligne qui sera comprise entre les quatre soit coupée harmoniquement (*N.* 209.), & partant toute ligne comprise entre les trois RT, RV, RQ, & paralelle à la quatriéme RZ ou RS sera coupée en deux également (*N.* 208.), & on prouvera les mêmes choses, & de la même façon à l'égard des quatre lignes RT, RZ, RX, RI.

En troisiéme lieu, puisque toute ligne qui coupe les trois RT, RV, RQ, & qui est paralelle à la quatriéme RZ ou RS, est coupée en deux également, toute ligne qui coupe les quatre RT, RV, RQ, RS est coupée harmoniquement (*N.* 209.), & par conséquent toute ligne qui coupera les trois RV, RQ, RS, & qui sera paralelle à la quatriéme RT, sera coupée en deux également, & les mêmes choses se prouveront à l'égard des quatre lignes RZ, RX, RI, RL.

Enfin, puisque toute ligne comprise entre les trois RV, RQ, RS, & paralelles à la quatriéme RT ou RL, est coupée en deux également; toute ligne menée entre les quatre RV, RQ, RS, RL doit être coupée harmoniquement (*N.* 209.); d'où il suit que toute ligne comprise entre les trois RQ, RS, RL, & paralelles à la quatriéme RV, est coupée en deux également (*N.* 208.), & la même chose se prouvera à l'egard des quatre RX, RI, RL, RS. Donc, &c.

211. PROPOSITION XLVIII. *Si deux lignes droites divisées harmoniquement, ont un point commun, c'est-à-dire, ou l'un des deux extrêmes, ou l'un des deux moyens, les lignes qui joindront les autres points de division, ou seront paralelles entr'elles, ou iront aboutir à un même point.*

Soient les deux droites AB, AR (*Fig.* 125. 127.) divisées l'une & l'autre harmoniquement, & qui ont le point extrême A commun; je joints les points du milieu par les droites CE, DH, & ces lignes seront ou paralelles entr'elles ou non paralelles; si elles

font paralelles (*Fig.* 125.); je joints les autres points B, R par la droite BR, & je dis que cette droite est paralelle aux deux autres; car si on veut qu'elle ne le soit pas, je mene par le point B une droite paralelle aux autres CD, DH, & cette droite coupera la droite AR prolongée, s'il le faut, en un point S different de R. Or, le triangle ASB étant coupé par les droites CE, DH paralelle au côté BS, ses autres côtés AB, AS seront coupés en même raison (*N.* 158.), & par conséquent le côté AS sera divisé harmoniquement à cause du côté AB divisé harmoniquement; ainsi nous aurons deux lignes droites inégales AR, AS divisées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH, ce qui est impossible (*N.* 207.). Donc, &c.

Si les droites CE, DH (*Fig.* 127.) ne sont pas paralelles, ces droites prolongées se couperont en quelque point O, & je dis que la droite BR prolongée passera par ce point; car si on veut que cela ne soit pas, je mene du point O la droite OA, & une autre droite au point B, laquelle par conséquent coupera AR, prolongée, s'il le faut, en un autre point S; ainsi à cause que AS sera comprise entre quatre lignes droites OA, OC, OD, OSB, qui coupent AB harmoniquement, AS sera aussi coupée harmoniquement que ces quatre lignes (*N.* 208.), & par conséquent, nous aurons deux lignes droites différentes AS, AR coupées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH, ce qui est impossible (*N.* 207.); donc il est impossible que la ligne BR prolongée, ne passe pas par le point O, ou les autres lignes CE, DH prolongées, vont se couper.

Et on démontrera de la même façon, que si deux lignes droites AB, ER, (*Fig.* 126. 128.) coupées harmoniquement, se coupent en un des points moyens C, les droites menées par leurs points de division ou seront paralelles entr'elles (*Fig.* 126.), ou se couperont toutes en un même point O (*Fig.* 128.).

212. REMARQUE. Les proprietés de la ligne divisée harmoniquement, sont d'une grande utilité pour l'intelligence des Sections Coniques, & pour abréger beaucoup le travail dans l'étude de ces Courbes, comme on verra dans la suite.

213. PROPOSITION XLIX. *Si plusieurs lignes droites sont en proportion Géométrique continuë, leurs différences, sont en même raison que ces lignes.*

Soient les trois lignes AB, AC, AD (*Fig.* 129.) en proportion continuë Géométrique, leurs différences seront BC, CD,

& il s'agit de faire voir que BC, CD :: AB, AC, & pour cela, comme le quarré de la moyenne AD est égal au produit ou rectangle des deux extrêmes AB, AC, si je fais le quarré AHMC de la moyenne AC, & le rectangle ARSB des extrêmes AB, AD, le quarré AHMC sera égal au rectangle ARSB, & retranchant de part & d'autre le rectangle commun AHPB, les rectangles restans BCMP, PHRS seront encore égaux, & partant leurs côtés seront réciproques (*N.* 184.), & nous aurons PM, PS :: PH, PB; or, à cause des paralelles AH, BP, CM, & des paralelles AB, HP, nous avons PM = BC, & HP = AB, & à cause de AR ou BS = AD, & de AH ou BP = AC, nous avons PS = CD; mettant donc ces valeurs de PM, PS, PH & PB, dans la proportion PM, PS, PH, PB, nous aurons BC, CD :: AB, AC, ce qu'il falloit démontrer.

S'il y avoit plus de trois lignes, on démontreroit encore la même chose, car supposant que quatre lignes *a*, *b*, *c*, *d* fussent en proportion continue, les différences des trois premieres seroient entr'elles comme *a* est à *b*; or les trois dernieres *b*, *c*, *d*, étant aussi en progression, leurs différences seroient comme *b* est à *c*, & par conséquent elles seroient aussi comme *a* est à *b*, & ainsi des autres.

214. PROBLEME. *Trouver tant de moyennes proportionnelles Géométriques que l'on voudra entre deux lignes données.*

On n'est pas encore parvenu à resoudre ce Problême dans tous les cas qu'il renferme en n'employant que la Géométrie ordinaire, c'est-à-dire, la régle & le compas; à la vérité la Géotrie composée en est venuë à bout; mais il est si difficile de bien exécuter ce qu'elle nous enseigne là-dessus, qu'on peut dire que cette découverte est une belle spéculation, dont il ne faut rien attendre dans la pratique. Grand nombre d'Auteurs se bornent au cas de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, qui est la plus nécessaire dans la Géométrie, & nous ont donné différens usages qui ont tous le défaut d'être extrêmement tatonneux & peu sûrs; ainsi je crois que le meilleur est de se servir du Compas de Proportion, comme nous l'enseignerons plus bas.

Quant aux autres cas de ce Problême, on les resoudra toujours, lorsqu'il s'agira de chercher trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données, ou 7, ou 15 ou 31, & ainsi de suite en doublant toujours & ajoutant l'unité. Car, par exemple,

pour trouver trois moyennes proportionnelles entre deux lignes *a*, *b*; je cherche d'abord une moyenne proportionnelle entre ces lignes, & je la nomme *x*; ainsi j'ai *a*, *x* :: *x*, *b*; après quoi je cherche une moyenne proportionnelle *z* entre *a* & *x*, & une autre *y* entre *x* & *b*; & j'ai *a*, *z* :: *z*, *x* :: *x*, *y* :: *y*, *b*; ce que je prouve ainsi : à cause de *a*, *z* :: *z*, *x*, le quarré de la premiere *a* est au quarré de la seconde *z*, comme la premiere *a* est à la troisiéme *x*, c'est-à-dire *aa*, *zz* :: *a*, *x*; ainsi qu'il a été dit dans le premier Livre (*N.* 327.); de même à cause de *x*, *y* :: *y*, *b*, nous avons *xx*, *yy* :: *x*, *b*; mais nous avons fait, *a*, *x* :: *x*, *b*, donc *xx*, *yy* :: *a*, *x*; or, nous venons de trouver *aa*, *zz* :: *a*, *x*; donc *aa*, *zz* :: *xx*, *yy*, & tirant la racine quarrée de tous les termes, nous aurons *a*, *z* :: *x*, *y*, mais nous avons *a*, *z* :: *z*, *x* & *x*, *y* :: *y*, *b*, donc ces quatre raisons sont égales, & nous avons *a*, *z* :: *z*, *x* :: *x*, *y* :: *y*, *b*.

De même si l'on demande sept moyennes Géométriques entre deux lignes données *a*, *b*; je prens d'abord une moyenne Géométrique *x*, entre *a* & *b*, & ensuite trois moyennes entre *a* & *x*, & trois moyennes entre *x* & *b*, & ainsi des autres, ce qu'on démontrera de la même façon.

215. PROBLEME. *Trouver tant de moyennes proportionnelles Arithmétiques que l'on voudra entre deux lignes données* (Fig. 130.).

Autant il est impossible de resoudre le Problême précédent dans tous ses cas, autant est-il facile de resoudre celui-ci. Soit, par exemple, les lignes AB, AC, entre lesquelles on demande de trouver trois moyennes Arithmétiques, je coupe la différence BC de ces deux lignes, en autant de parties égales plus une, qu'on demande des moyennes, c'est-à-dire en quatre BD, DE, EH, HC. Je donne à la ligne AB la partie BD, & la ligne AD est la premiere moyenne demandée; j'ajoute à AD la partie DE, & la droite AE est la seconde moyenne : enfin, j'ajoute à la droite AE la partie EH, & la droite AH est la troisiéme moyenne; & les cinq lignes AB, AD, AE, AH, AC sont en progression Arithmétique, puisqu'elles se surpassent toutes de la même façon, ou que leur différence est toujours la même.

216. PROPOSITION XLVIII. *Si trois lignes sont en progression Arithmétique ascendante ou descendante, la premiere est plus petite par rapport à la seconde, que la seconde par rapport à la troisiéme; & le produit des extrêmes est moindre que le quarré de la moyenne.*

Soient les trois lignes AB, AC, AD (*Fig.* 131.) en progres-

sion Arithmétique ascendante, & dont par conséquent les différences BC, CD sont égales ; je cherche entre les deux extrêmes AB, AD une moyenne Géométrique AX, & à cause que les trois lignes AB, AX, AD sont en progression Géométrique, leurs différences BX, XD sont entr'elles comme les lignes AB, AX (*N.* 213.), & comme AB est plus petit que AX, la différence BX est plus petite que la différence XD ; ainsi BD étant coupée en X en deux parties inégales, dont la petite est BX, cette différence BX est moindre que la moitié BC de BD, laquelle moitié est la différence de la progression Arithmétique, & partant la moyenne proportionnelle Géométrique AX est plus petite que la moyenne Arithmétique AC ; d'où il suit que AB est plus petite par rapport à AC, que par rapport à AX ; mais dans la progression Géométrique, nous avons AB, AX :: AX, AD ; donc AB est aussi plus petite par rapport à AC, que AX par rapport à AD ; mais AC est plus grande par rapport à AD, que AX par rapport à la même AD ; donc à plus forte raison AB est plus petite par rapport à AC, que AC, par rapport à AD.

Maintenant supposons que la progression Arithmétique AD, AC, AB soit descendante ; je prens la moyenne Géométrique AX entre ces deux lignes, ce qui donne la progression Géométrique AD, AX :: AX, AB, & les différences DX, XB étant entr'elles comme les lignes AD, AX (*N.* 215.), la différence DX sera plus grande que la différence XB à cause de AD plus grand que AX ; ainsi DX sera plus grande que la moitié DC de la ligne DB, laquelle moitié est la différence de la progression Arithmétique ; donc la moyenne Géométrique AX sera plus petite que la moyenne Arithmétique AC, & par conséquent AD sera moins grand par rapport à AC, que par rapport à AX, & comme AD, AX :: AX, AB, la ligne AD sera aussi moins grande par rapport à AC, que AX par rapport à AB ; or, AX est moins grand par rapport à AB, que AC par rapport à AB, donc à plus forte raison AD est moins grand par rapport à AC, que AC par rapport à AB. Ainsi dans l'un & l'autre cas, la premiere ligne de la progression Arithmétique, est moins grande par rapport à la seconde, que la seconde par rapport à la troisiéme. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Puisque dans l'un & l'autre cas, la moyenne Géométrique AX est plus petite que la moyenne Arithmétique AC, le quarré

de AX est aussi plus petit que le quarré de AC ; or, dans la progression Géométrique AB, AX :: AX, AD ou AD, AX :: AX, AB, nous avons $\overline{AX}^2 = AB \times AD$; donc AB×AD est plus petit que le quarré $\overline{AC}^2$; ainsi dans la progression Arithmétique AB, AC, AD, ou AD, AC, AB, le produit des extrêmes est moindre que le quarré de la moyenne. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

CHAPITRE VI.

Des Proprietés du Cercle.

217. DEFINITIONS. Une ligne AB (*Fig.* 132.) menée d'un point à un autre de la circonférence du cercle, & qui ne passe pas le centre, se nomme *Corde*. Nous avons démontré (*N.* 60.) que la circonférence ne peut couper qu'en deux points une corde qu'on prolongeroit même de part & d'autre. La partie ACB du cercle que la corde coupe, se nomme *petit Segment*, & l'autre partie AEB, se nomme *grand Segment*.

218. Toute ligne RS (*Fig.* 132.) qui touche une circonférence sans la couper, se nomme *Tangente*, & toute ligne HM (*Fig.* 133.) qui part d'un point extérieur H, & qui coupe la circonférence en deux points N, M, se nomme *Secante*.

219. Si d'un point B ou une droite RS (*Fig.* 132.) touche le cercle, on mene une corde AB, l'angle ABR tourné du côté du petit segment, se nomme *Angle du petit Segment*, & l'angle ABS tourné du côté du grand segment, se nomme *Angle du grand Segment*.

220. L'angle AOC (*Fig.* 133.) formé par deux rayons AO, CO, se nomme *Angle au Centre*, & l'angle NMA fait par deux cordes NM, MA, se nomme *Angle à la Circonference*.

221. La portion de cercle AOC comprise entre deux rayons, se nomme *Secteur de Cercle*.

222. Si des extrêmités d'une corde AB (*Fig.* 134.), on mene deux droites à un point quelconque C de l'arc du petit segment, l'angle ACB fait en C, se nomme *Angle dans le petit Segment ;* & si des mêmes extrêmités A, B on mene deux droites à un point quelconque D de l'arc du grand segment, l'angle ADC fait en D, se nomme *Angle dans le grand Segment*.

223. Deux

223. Deux circonférences de cercle qui ont le même centre, se nomment *Circonférences Concentriques*; & si deux circonférences de cercle, dont l'une est dans le cercle de l'autre, n'ont pas le même centre, elles se nomment *Excentriques.*

224. PROPOSITION XLIX. *Si une droite* OS (Fig. 135.) *qui passe par le centre* O, *coupe une corde* AB *en deux également, elle lui est perpendiculaire, & si elle est perpendiculaire sur la corde* AB, *elle la coupe en deux également. Dans l'un & l'autre cas, l'arc* ASB *que la corde soutient, est coupé en deux également; enfin, si l'arc* ASB *est coupé en deux également par une droite* OS *qui passe par le centre, cette droite* OS *est perpendiculaire sur la corde, & la coupe en deux également.*

Je mene aux extrêmités de la corde les rayons OA, OB qui sont deux obliques égales, menées du même point O sur la droite AB; ainsi la perpendiculaire qu'on meneroit du point O sur la même ligne AB, couperoit la droite AB au point R qui la divise en deux également (*N.* 54.), mais par la supposition, la droite OS qui passe par le même point O, passe aussi par le point R, puisqu'elle divise AB en deux également; donc la droite AS n'est pas différente de la perpendiculaire qu'on meneroit du point O, car l'une & l'autre auroient deux points communs O, R, ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Si l'on suppose que OS est perpendiculaire sur AB, il est clair qu'elle doit diviser AB en deux également, à cause des obliques égales OA, OB (*N.* 54.). Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Dans l'un & l'autre cas, les deux triangles OAR, OBR ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux (*N.* 100.); donc les angles AOS, BOS, sont égaux, & par conséqnent les arcs AS, SB, qui mesurent ces angles sont égaux, & l'arc AB est divisé en deux également par la droite OS, ce qu'il falloit 3°. démontrer.

Enfin, si l'arc AB est divisé en deux également en S, par la droite SO qui passe par le centre; cette droite passe par les mêmes points O, S, par lesquels passeroit la perpendiculaire OR, ou la droite qui partant du centre O, viendroit diviser AB en deux également; donc SO est la même que l'une ou l'autre de ces lignes, & par conséquent elle est perpendiculaire sur AB, & la coupe en deux également; ce qu'il falloit 4°. démontrer.

225. COROLLAIRE. *Si une ligne* SO *qui passe par le centre, divise*

un arc AB *en deux également ; cette ligne prolongée au-delà du centre en* H, *divisera aussi l'arc opposé* AHB *en deux également.*

La ligne SO prolongé en H est diamétre, & coupe la circonférence en deux parties égales SAH, SBH, retranchant donc d'une part l'arc SA, & de l'autre l'arc SR, égal à SA, le reste AH sera égal au reste BH.

226. COROLLAIRE II. *Toute ligne* SH *qui divise une corde* AB *en deux également, & qui lui est perpendiculaire, passe par le centre* O. Si on veut que cela ne soit pas, je mene par le point R une droite au centre, & cette droite sera perpendiculaire sur AB, à cause qu'elle la divise en deux également (*N.* 224.); donc sur un même point R, on pourroit élever deux perpendiculaires sur AB, ce qui est impossible.

227. PROBLEME. *Trouver le centre d'un cercle* (Fig. 135.).

Je mene une corde AB, que je divise en deux également en R; j'éleve en R la perpendiculaire HS, que je prolonge de part & d'autre jusqu'à la circonférence, & divisant HS en deux également en O, ce point est le centre demandé, ce qui est évident par la proposition précédente & ses Corollaires.

228. PROBLEME. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés* A, B, C, (Fig. 136.) *qui ne sont pas en ligne droite.*

Je joints les points A, B par la droite AB, & les points A, C, par la droite AC; je coupe chacune de ces droites en deux également aux points M, N, & sur ces points j'éleve des perpendiculaires indéfinies MR, NS; du point O où ces perpendiculaires se coupent, pris pour centre & d'une ouverture de compas égale à la distance OA du point O au point A; je décris une circonférence qui passe par les deux autres points B, C, ce que je prouve ainsi :

Si les droites AB, AC étoient en ligne droite, les perpendiculaires MR, NS seroient paralelles, & ne se couperoient pas (*N.* 68.); mais comme ces droites AB, AC s'inclinent l'une sur l'autre, les perpendiculaires doivent aussi s'approcher entr'elles du côté de l'angle BAC, & par conséquent elles doivent se couper en un point O. Cela posé.

Puisque la perpendiculaire MR passe par le point M également éloigné des extrêmités A, B de la droite AB, le point O de cette perpendiculaire doit être aussi également éloigné des mêmes extrêmités A, B (*N.* 56.); par la même raison le point O de la perpendiculaire NS, doit être également distant des

extrêmités A, C de la droite AC; donc ce point O est également éloigné des trois points A, B, C, & par conséquent la circonférence qui a pour centre le point O, & qui passe par le point A, doit passer par les deux autres B, C.

229. COROLLAIRE. *On ne peut faire passer deux différentes circonférences de cercles par trois points donnés* A, B, C.

Si cela se pouvoit, les droites AB, AC seroient des cordes de l'un & de l'autre cercle, & par conséquent le centre de la seconde circonférence qu'on voudroit faire passer par ces trois points, devroit se trouver sur la perpendiculaire MR, qui coupe la corde AB en deux également (*N.* 226.), par la même raison il devroit se trouver aussi sur la perpendiculaire NS qui coupe la corde AC en deux également, & de plus ce centre devroit être différent du centre O de la premiere circonférence; car autrement ces deux circonférences ne seroient pas différentes, puisqu'elles auroient le même centre & le même rayon. Mais il n'est pas possible de trouver un point différent de O qui soit sur l'une & l'autre perpendiculaire, puisqu'elles ne se coupent qu'en un point (*N.* 35.); donc il n'est pas possible de faire passer une autre circonférence par les trois points A, B, C.

230. COROLLAIRE III. *Donc deux circonférences de cercle ne peuvent se couper en trois points.* Si cela se pouvoit on pourroit aussi faire passer deux circonférences par trois points donnés.

231. COROLLAIRE. *On peut toujours faire passer une circonférence par les trois sommets des angles d'un triangle.* Les trois sommets des angles d'un triangle, ne sont jamais en ligne droite. Mais par trois points qui ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une circonférence (*N.* 228.). Donc, &c.

232. PROPOSITION L. *De toutes les lignes qu'on peut mener à la circonférence d'un cercle, d'un point* A (Fig. 137.) *pris entre le centre & la circonférence, la plus grande est la droite* AB *qui passe par le centre; la plus petite est la droite* AC *qui est le prolongement de la droite* AB, *& les autres* AM, AN, &c. *vont en diminuant à mesure qu'elles s'éloignent de la plus grande* AB.

Du centre O je mene la droite OM; dans le triangle AOM, les deux côtés AO, OM pris ensemble sont plus grands que le côté AM; or, OM est égal à OB, l'une & l'autre étant rayon du même cercle; donc AO+OM=AO+OB ou AB, & par conséquent la droite AB qui passe par le centre, est plus grande que la droite AM qui n'y passe pas; & on prouvera de la même

façon que AB eſt plus grand que AN, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon ON; les triangles AOM, AON ont le côté AO commun, & le côté OM eſt égal au côté ON; mais l'angle compris AOM dans le premier eſt plus grand que l'angle compris AON dans le ſecond; donc la baſe AM du premier eſt plus grande que la baſe AN du ſecond; (*N.* 108.) c'eſt-à-dire la droite AM plus proche de la plus grande AB, eſt plus grande que la droite AN qui en eſt plus éloignée, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Dans le triangle AON, les deux côtés AO, AN pris enſemble, ſont plus grands que le côté AN; mais ON=OC; donc AO+AN eſt plus grand que OC ou OA+AC; ainſi retranchant OA de part & d'autre, nous aurons AN plus grand que AC; c'eſt-à-dire le prolongement AC de la plus grande AB, eſt plus petit que AN, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

233. Corollaire. *On peut toujours mener du point* A *à la circonférence deux lignes égales; mais jamais trois; & la ligne qui joint les extrêmités des égales, eſt coupée en deux également, par la plus grande* AB *qui lui eſt perpendiculaire.*

Je prens l'arc BS égal à l'arc BM, & du point S je mene les droites SA, SO; l'angle SOB eſt donc égal à l'angle MOB, puiſque les arcs BS, BM qui meſure ces angles ſont égaux, & à cauſe que l'angle SOB & ſon angle de ſuite SOA valent deux droits, (*N.* 49.) de même que l'angle MOB & ſon angle de ſuite MOA; les angles SOA, MOA ſont égaux, & par conſéquent les triangles SOA, MOA qui ont le côté AO commun, le côté OS égal au côté OM, & l'angle compris égal à l'angle compris, ſont parfaitement égaux; (*N.* 100.) donc la droite AS eſt égale à la droite AM, & ainſi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Et il eſt viſible qu'on ne peut touver trois lignes menées du point A à la circonférence qui ſoient égales entr'elles; car il faudroit qu'il y en eût deux qui fuſſent d'un même côté par rapport à la plus grande AB, & ces deux là ſeroient inégales, puiſqu'elles ſeroient à des diſtances inégales de la plus grande; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Enfin, à cauſe que l'arc SM eſt diviſé en deux également par la droite BA qui paſſe par le centre; la corde SM qui joint les extrê-

mités des égales AS, AM, est coupée en deux également & perpendiculairement par la droite BA (*N.* 224.) ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

234. COROLLAIRE II. *Si un point* A *est entre le centre & la circonférence, la distance de ce point à la circonférence, est la droite* AC *prise sur le diametre qui passe par le point* A.

Par la Proposition précédente, la droite AC est la plus courte qu'on puisse mener du point A à la circonférence; donc cette droite mesure la distance du point A à la circonférence.

235. PROPOSITION LI. *De toutes les secantes* AB, AM, AN, &c. (Fig. 138.) *qu'on peut mener d'un point* A; *la plus grande est celle qui passe par le centre* O, *& les autres vont en diminuant à mesure qu'elles s'éloignent de la plus grande.*

Je mene le rayon OM; dans le triangle AOM, j'ai AO+OM plus grand que AM; mais OM=OB; donc AO+OB ou AB est plus grand que AM; c'est-à-dire la secante AB qui passe par le centre, est plus grande que AM qui n'y passe pas, & ainsi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon ON; les triangles AOM, AON ont le côté AO commun, le côté OM égal au côté ON; mais l'angle AOM compris dans le premier, est plus grand que l'angle AON compris dans le second; donc la base AM du premier est plus grande que la base AN du second; (*N.* 108.) c'est-à-dire la secante plus proche de la secante AB qui passe par le centre, est plus grande que la secante AN qui en est plus éloignée, & ainsi des autres; ce qu'il falloit démontrer.

236. COROLLAIRE. *Du point* A, *on peut mener des secantes égales deux à deux, tant qu'on voudra; mais jamais il ne s'en trouvera trois égales, & les lignes qui joignent les extrémités des égales sont coupées en deux également & perpendiculairement par la secante* AB *qui passe par le centre.*

Je prens l'arc BS égal à l'arc BM, & je mene les droites SA, SO; les angles SOB, MOB sont donc égaux à cause de l'égalité des arcs BS, BM qui les mesurent; donc leurs angles de suite SOA, MOA sont égaux aussi, de même que les triangles SOA, MOA qui ont le côté AO commun, le côté SO égal au côté MO, & l'angle compris SOA, égal à l'angle compris MOA, (*N.* 100.) & par conséquent le côté AS est égal au côté AM; c'est-à-dire les secantes également éloignées de la plus grande AB, sont égales, & ainsi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Toute autre fecante qu'on voudroit mener du point A, doit être ou plus proche ou plus éloignée de la fecante AB que les fcantes AS, AM qui en font également éloignées, & par conféquent, fera ou plus petite ou plus grande que chacune des fecantes AS, AM; donc on ne peut jamais trouver trois fecantes égales; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

L'arc SM eft divifé en deux également par la ligne BA qui paffe par le centre; donc BA coupe en deux également & perpendiculairement la corde SM (*N.* 224.) qui joint les extrêmités des fcantes égales, AS, AM; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

237. Proposition LII. *De toutes les parties extérieures* AC, AR, AT, &c. (Fig. 139.) *des fecantes* AB, AM, AN, &c. *qu'on peut mener du point extérieur* A, *la plus petite eft la partie dont la fecante* AB *paffe par le centre* O *& les autres* AR, AT, &c. *vont en augmentant à mefure qu'elles s'éloignent de* OC.

Je mene le rayon OR; dans le triangle ARO, j'ai AR+RO plus grand que AO ou AC+CO, & retranchant d'une part RO, & de l'autre CO=RO, le refte AR eft plus grand que AC; c'eft-à-dire la partie extérieure AC de la fecante AB qui paffe par le centre, eft plus petite que la partie extérieure AR de la fecante AM qui n'y paffe pas, & ainfi des autres; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je mene le rayon OT; les côtés AT, TO du triangle ATO pris enfemble font plus grands que les côtés OR, RA du triangle ARO; (*N.* 38.) retranchant donc d'une part la droite TO, & de l'autre, la droite RO=TO; le refte AT eft plus grand que le refte AR, c'eft-à-dire la partie extérieure AT de la fecante AN plus éloignée de la fecante AB qui paffe par le centre eft plus grande que la partie extérieure AR de la fecante AM, & ainfi des autres; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

238. Corollaire. *On peut toujours trouver des parties extérieures égales deux à deux, tant qu'on voudra; mais il n'y en aura jamais trois d'égales, & les droites qui joignent les extrémités des égales, font coupées en deux également & perpendiculairement par la fecante* AB *qui paffe par le centre.*

Je prens l'arc CS égal à l'arc CR, & je mene les droites SA, SO; l'angle SOC eft donc égal à l'angle ROC, à caufe de l'égalité des arcs CS, CR qui mefurent ces angles, & les triangles SOA, ROA font parfaitement égaux à caufe du côté SO égal au côté RO du côté AO commun, & de l'angle SOA égal à l'an-

gle ROA; (*N.* 100.) donc le côté AS est égal au côté AR; c'est-à-dire les parties extérieures AS, AR des secantes également éloignées de la secante AB qui passe pat le centre, sont égales, & ainsi des autres; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

On ne peut mener de partie extérieure du point A qui ne soit plus proche ou plus éloignée de la partie AC que les deux égales AS, AR, & qui par conséquent ne soit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux; donc on ne peut trouver trois parties extérieures égales: ce qu'il falloit 2°. démontrer.

La ligne AB qui passe par le centre coupe l'arc SR en deux également; donc elle coupe aussi en deux également & perpendiculairement la corde SR (*N.* 224.) qui joint les extrémités des égales AS, AR; ce qu'il falloit, 3°. démontrer.

Nota. Puisque de toutes les paties extérieures des secantes, qu'on peut mener d'un point extérieur A, la plus petite est la partie extérieure AC de la secante AB qui passe le cenrre; il s'ensuit que *la distance d'un point extérieur* A *à une ciconférence de cercle, est la partie* AC *d'une droite* AB *menée du point* A *au centre.*

239. PROPOSITION LIII. *Si une ligne droite* PQ (Fig. 140.) *touche une circonférence, elle ne la touche qu'en un point* Q.

Si on veut qu'elle la touche en un autre point H, je mene la droite HQ qui sera le prolongement de PQ, puisqu'on suppose que la même droite PQ coupe la circonférence en Q & H. Je mene aussi les rayons QO, HO, & à cause que le triangle HOQ est isoscele, la perpendiculaire menée du point O sur la base HQ, passera par le milieu L de cette base; (*N.* 107.) or cette perpendiculaire sera plus courte que les obliques OH, OQ; (*N.* 53.) donc son extrêmité L où elle coupe la droite HQ sera dans le cercle, c'est-à-dire entre le centre & la circonférence, & par conséquent la droite HQ ne sera poinr tangente, puisqu'elle aura un point L dans le cercle.

240. PROPOSITION LIV. *Si une ligne* MN. (Fig. 140.) *touche un cercle, & que du point dit d'attouchement* A *on mene un rayon* AO, *ce rayon est perpendiculaire sur la tangente.*

Puisque la tangente ne peut toucher la circonférence qu'au point A, tous ses autres points sont hors de la circonférence & plus éloignés du centre que le point A; ainsi les lignes menées de ces points au centre, sont toutes plus longues que AO, & par conséquent AO étant la plus courte de toutes celles qu'on

peut mener du point O sur MN, est perpendiculaire sur MN (*N.* 53.).

241. COROLLAIRE. *Il ne peut y avoir qu'une seule tangente qui touche un cercle à un point* Q (Fig. 140.).

PQ touche le cercle en Q; si on veut qu'une autre droite QH le touche au même point Q, je mene le rayon QO qui sera perpendiculaire sur PQ, (*N.* 240.) & par conséquent oblique sur QH; (*N.* 57.) donc la perpendiculaire qu'on meneroit du point O sur HQ, seroit plus courte que l'oblique QO, & par conséquent cette perpendiculaire couperoit HQ en dedans du cercle; donc HQ ne sauroit être tangente.

242. PROBLEME. *D'un point donné* A *sur la circonférence d'un cercle*, (Fig. 140.) *mener une tangente.*

Je mene le rayon AO, & sur son extrêmité A une perpendiculaire MN qui est la tangente demandée; (*N.* 240.) car OA étant la plus courte qu'on puisse mener du point O sur tous les points de MN; tous les points de MN à l'exception du point A, sont hors de la circonférence, & partant MN, est tangente.

243. PROPOSITION LV. *Deux cercles qui se touchent, ne se touchent qu'en un point.*

Si les centres O, H des deux cercles RMS, RTS (*Fig.* 141.) ne sont pas tous les deux dans un même cercle, & qu'on prétende que ces deux cercles se touchent aux point R, S, sans se couper; je mene les rayons OR, OS, HR, HS & la droite RS. Les rayons OR, OS étant égaux, le point O est également éloigné des extrêmités R, S de la ligne RS & par la même raison le point H est aussi également éloigné des extrêmités R, S; menant donc la ligne droite OH par les deux centres OH, cette ligne est perpendiculaire sur RS, (*N.* 58.) & la coupe en deux également; ainsi les deux rayons OR, HR étant ensemble plus grand que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent; leurs circonférences se coupent en R, S, (*N.* 59.) & par conséquent elle ne se touchent pas comme on le prétendoit.

Si les centres O, H des deux cercles sont dans un même cercle RMS, (*Fig.* 142.) & qu'on prétende que les deux circonférences se touchent en deux points R, S; je mene du centre O du petit cercle, les rayons OR, OS; & comme ce centre O est entre le centre H du grand & sa circonférence, les droites égales OR, OS ne sont pas la plus courte ligne qu'on peut mener du point O à la circonférence RMS; car cette plus courte ligne

OP

OP doit paſſer entre les égales OR, OS, & ſe trouver à égale diſtance de l'une & de l'autre; (*N.* 233.) donc le point P de la circonférence RMS du grand cercle, & plus proche du centre O du petit cercle que la circonférence RTS de ce petit cercle, & par conſéquent la circonférence RTS coupe la circonférence RMS, & ces deux circonférences ne ſe touchent pas comme on le prétendoit.

244. PROPOSITION LVI. *Lorſque la poſition de deux cercles eſt telle que les deux centres ne ſe trouvent pas tous les deux dans l'un des deux cercles, s'il arrive que la ligne* OH (Fig. 143.) *qui joint les deux centres ſoit plus grande que la ſomme des rayons* OR, HS, *les deux cercles ne ſe coupent ni ne ſe touchent. Si cette droite* OH (Fig. 144.) *eſt égale à la ſomme des rayons* OR, RH, *les deux cercles ſe touchent ſans ſe couper; enfin ſi la droite* OH (Fig. 145.) *eſt moindre que la ſomme des rayons* OR, HS, *les cercles ſe coupent.*

Dans le premier cas, (*Fig.* 143.) j'éleve en R & S les perpendiculaires MT, NV leſquelles ſont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & par conſéquent ne ſe coupent pas; or, MT eſt tangente du cercle RCD, (*N.* 242.) & NV eſt tangente du cercle SEL; ainſi ces deux cercles étant tous entiers hors des paralelles MT, NV ne peuvent ni ſe toucher ni ſe couper.

Dans le ſecond cas, (*Fig.* 144.) j'éleve en R la perpendiculaire MN, laquelle eſt tangente de l'un & de l'autre cercle, puiſqu'elle eſt perpendiculaire ſur le rayon OR de même que ſur le rayon HR; ainſi les deux circonférences étant toutes entiéres, l'une à gauche & l'autre à droite de MN, ſe touchent en R & ne ſe coupent pas.

Dans le troiſiéme cas, (*Fig.* 145.) les deux rayons OR, HS étant enſemble plus grands que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent; les deux circonférences doivent ſe couper (*N.* 59.).

245. COROLLAIRE. *Si deux cercles* RCD, REF (Fig. 144.) *ſe touchent extérieurement, la ligne* OH *qui joint les deux centres, paſſe par le point d'attouchement* R.

La ligne OH ne peut pas être plus grande que la ſomme des rayons; car autrement les deux cercles ne ſe couperoient ni ne ſe toucheroient; (*N.*244.) elle ne peut être non plus moindre que la ſomme des rayons; car autrement les cercles ſe couperoient; (*N.* 244.) donc il faut que OH ſoit égal à la ſomme des rayons; prenant donc ſur OH la partie OR égale au rayon du premier

cercle, le reste RH sera le rayon du second ; ainsi élevant en R la perpendiculaire MN qui sera tangente des deux cercles, ces deux cercles se couperont en R, & partant OH passera par le point d'attouchement R.

246. PROPOSITION. *Lorsque la position de deux cercles est telle que les deux centres se trouvent tous les deux dans l'un des cercles. S'il arrive que la ligne* HO (Fig. 146.) *qui joint les centres* H, O, *soit moindre que la différence des rayons* HS, OC, *les deux circonférences ne se touchent ni ne se coupent. Si la droite* HO (Fig. 147.) *est égale à la difference des rayons* HS, OS, *les deux circonférences se touchent sans se couper ; enfin si la ligne* HO (Fig. 148.) *est plus grande que la différence des rayons* HS, OR, *les deux circonférences se coupent.*

Dans le premier cas (*Fig.* 146.), je retranche du rayon HS la partie OH, & à cause que OH est moindre que la différence du rayon HS au rayon OC, il s'ensuit que le reste OS est plus grand que le rayon OC, ainsi le point S de la circonférence SEL est en dehors de la circonférence RCD du rayon CO; or à cause que le point O est entre le centre H du grand cercle, & sa circonférence SEL, & que la ligne SO prolongée passe par le centre H, la ligne SO est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point O à la circonférence SEL (*N.* 232.). Donc toutes les lignes qu'on pourroit mener du point O à la circonférence SEL, seroient, à plus forte raison, plus grandes que le rayon OS, & par conséquent tous les points de la circonférence SEL où ces lignes iroient aboutir, sont hors de la circonférence RCD, & les deux circonférences ne peuvent ni se couper ni se toucher.

Dans le second cas (*Fig.* 147.); je retranche du rayon HS la droite OH, & le reste OS est égal au rayon du petit cercle, puisque par la supposition, la droite OH est la différence de ces deux rayons. Donc les deux circonférences passent par le point S; or, à cause que le point O est entre la circonférence SEL du grand cercle, & son centre H, & que la droite SO prolongée passe par le centre H, cette droite SO est la plus courte qu'on puisse mener du point O à la circonférence SEL (*N.* 232.); donc toutes les lignes qu'on voudroit mener d'un point O à la circonférence SEL étant plus grande que le rayon SO du petit cercle, doivent sortir hors de la circonférence SCD du petit, & partant

les deux circonférences n'ayant de commun que le point S se touchent en ce point, & ne se coupent pas.

Dans le troisiéme cas (*Fig.* 148.), je retranche du rayon HS, la droite OH, & comme cette droite est plus grande que la différence des rayons HS, OR, le reste OS est plus petit que le rayon OR; ainsi la circonférence SEL du grand cercle, passe entre le centre O & la circonférence RCD du petit cercle. Or, comme nous supposons que le rayon HS du grand cercle est plus grand que le rayon OR du petit, & que le centre H du grand est en déçà du centre O du petit par rapport aux points S, R, il est clair que si l'on prolonge les rayons SH, RO en V & X, le rayon HV du grand cercle ira aboutir à un point V de sa circonférence plus éloigné du centre O du petit, que le point X de la circonférence du petit, où ira aboutir le rayon OX du petit; ainsi la circonférence SEL ayant un point S en dedans du petit cercle, & un point V en dehors, ces deux circonférences doivent nécessairement se couper.

247. COROLLAIRE. *Si deux cercles* SEL, SCD (Fig. 147.) *se touchent intérieurement, la droite menée* HS *par les deux centres, passe par le point d'attouchement* S.

La droite HO menée d'un centre à l'autre, ne peut pas être moindre que la différence des deux rayons, car si cela étoit les deux cercles ne se toucheroient ni ne se couperoient (*N.* 246.), ce qui est contre la supposition. La même droite HO ne peut pas non plus être plus grande que la différence des deux rayons, car autrement les deux cercles se couperoient (*N.* 246.), ce qui est encore contre la supposition. Donc cette droite HO doit être égale à la différence des deux rayons; donc en prolongeant HO en S, jusqu'à la circonférence du grand cercle, & retranchant du rayon HS du grand cercle la droite HO, le reste OS doit être le rayon du petit cercle, & par conséquent les deux circonférences passent par le point S de la droite HS.

248. PROBLEME. *Trouver la plus grande & la moindre distance de deux circonférences excentriques* SEL, RCD (Fig. 149. 150.) *qui ne se coupent ni ne se touchent.*

Je mene par les deux centres HO, une droite SV qui se termine de part & d'autre à la circonférence du grand cercle, & la partie SR de ce diamétre comprise entre les deux circonférences du côté du centre O du petit cercle, est la moindre distance des deux circonférenees, & la partie TV comprise entre

les deux circonférences du côté du centre H du grand cercle, est la plus grande distance ; ce que je prouve ainsi:

Du centre O du petit cercle, je mene à tous les points de la grande circonférence des droites ON, OE, &c. les points S, N, E, V de la grande circonférence étant tous extérieurs au petit cercle, leurs distances à la circonférence du petit cercle sont sur les droites SO, NO, EQ, &c. menées de ces points par le centre O (*par la note du N.* 238.) ; ainsi ces distances sont les droites SR, NP, EQ, &c. or, à cause que le point O est entre le centre H du grand cercle & sa circonférence SNEL, la droite OS est la plus petite qu'on puisse mener du point O à la circonférence SNEL, & les autres ON, OE, &c. vont en augmentant jusqu'à la derniere OV qui est la plus grande (*N.* 232.); donc si des lignes OS, ON, OE, OV, qui vont en augmentant; nous retranchons les droites OR, OP, OQ, OT, qui sont toutes égales à cause qu'elles sont toutes rayons du petit cercle, les restes SR, NP, EQ, TV iront encore en augmentant, & par conséquent SR sera la plus petite distance, & TV la plus grande.

Il est visible qu'on trouveroit la même chose du côté de la demi-circonférence SLV.

Les figures 149, 150 différent en ce que dans la premiere, les deux centres O, H sont compris tous les deux dans le petit cercle ; & dans la seconde au contraire, les deux centres O, H n'y sont pas compris tous les deux, mais la démonstration est la même pour l'un & l'autre cas.

249. Proposition LIV. *La plus grande de toutes les cordes d'un cercle, est le diamétre, & les autres sont d'autant plus petites qu'elles sont plus éloignées du centre* O (Fig. 151.).

Du centre O, je mene aux extrêmités de la corde CD, les rayons CO, OD, & dans le triangle COD, nous avons CO + OD plus grand que CD (*N.* 95.) ; or, le diamétre AB est égal aux deux rayons CO, OD pris ensemble ; donc le diamétre est plus grand que la corde CD, & ainsi des autres. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Soient les deux cordes CD, HR, dont la seconde HR est plus éloignée du centre O que la corde CD ; je mene les rayons OC, OD, OH, OR, & du centre O les perpendiculaires ON, OM sur les cordes, lesquelles par conséquent sont divisées chacune en deux parties égales (*N.* 224.) ; or, dans le triangle rec-

tangle NOC, j'ai $\overline{CO}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.); & le triangle rectangle MOR donne $\overline{OR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$, mais CO = OR; donc $\overline{CO}^2 = \overline{OR}^2$, & partant $\overline{CN}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$; mais par la ſuppoſition la diſtance NO de la corde CD au centre eſt plus petite que la diſtance MO de la corde RH au centre; donc $\overline{NO}^2$ eſt plus petit que $\overline{MO}^2$, & par conſéquent $\overline{CN}^2$ doit être plus grand que $\overline{RM}^2$, & CN plus grand que RM; donc le double CD de CN eſt plus grande que le double RH de RM; c'eſt-à-dire la corde CD plus proche du centre eſt plus grande que la corde RH qui en eſt plus éloignée, & ainſi des autres. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

250. COROLLAIRE Ier. *Les cordes également éloignées du centre ſont égales.*

Suppoſons que les cordes CD, RH ſoient également éloignées du centre; donc les perpendiculaires ON, OM ſeront égales, ainſi menant les rayons OC, OR, les triangles rectangles OCN, ORM auront l'hypothenuſe OC égale à l'hypothenuſe OR, & le côté ON égal au côté OM, & partant le troiſiéme côté CN ſera égal au troiſiéme RM (*N.* 102.); donc la corde CD double de CN ſera égale à la corde RH double de RM.

On prouvera de la même façon que *les cordes égales ſont également éloignées du centre*, car ſi nous ſuppoſons CD = RH, & que nous menions les perpendiculaires ON, OM, nous aurons CN = RM, ainſi les deux triangles rectangles auront l'hypothenuſe OC égale à l'hypothenuſe OR, & le côté CN égal au côté RM; c'eſt pourquoi le troiſiéme ON ſera égal au troiſiéme OM, & les cordes ſeront également éloignées du centre.

251. COROLLAIRE II. *Les plus grandes cordes ſoutiennent des plus grands arcs, & les plus grands arcs ſont ſoutenus par des plus grandes cordes, en entendant par le mot d'arcs ceux des petits ſegmens que les cordes coupent.*

Soient les cordes CD, HR (*Fig.* 151.), dont on ſuppoſe que la premiere CD eſt plus grande que la corde HR; je mene les rayons OC, OD, OH, OR, les triangles iſoſceles COD, HOR ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais la baſe CD du premier eſt plus grande que la baſe RH du ſecond; donc l'angle compris COD eſt plus grand que l'angle compris ROH (*N.* 109.);

donc l'arc CD mesure du premier angle est plus grand que l'arc RH mesure du second; mais l'arc CD ou CSD est l'arc du petit segment que la plus grande corde CD coupe & l'arc RH ou RTH est celui du petit segment coupé par la petite corde RH; donc, &c. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

De même si l'arc CSD est plus grand que l'arc RTH, les deux triangles isosceles COD, ROH auront deux côtés égaux chacun à chacun, mais l'angle compris COD mesuré par l'arc CSD sera plus grand que l'angle compris ROH mesuré par l'arc RTH; donc la base du premier, c'est-à-dire la corde CD sera plus grande que la base RH du second, ou que la corde RH, & ainsi des autres. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On prouvera de la même maniere *que les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & que les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales.*

252. PROPOSITION LVII. *Tout angle* ABC (Fig. 152.) *qui a son sommet* B *à la circonférence, vaut la moitié de l'arc* AC *que ses côtés embrassent.*

Du sommet B par le centre O, je mene le diamétre BR, & du centre O les deux rayons OA, OC; le triangle ABO étant isoscele, ses deux angles OAB, OBA sur la base AB sont égaux; donc l'angle AOR externe à ce triangle, & qui vaut les deux internes opposés (*N.* 97.) est double de l'angle ABO; par la même raison l'angle COR externe au triangle isoscele COB est double de l'angle CBO; donc les deux angles ensemble AOR, COR, c'est-à-dire l'angle AOC est double des deux ensemble ABO, CBO, ou de l'angle ABC; or, l'angle au centre AOC vaut l'arc ARC qu'il embrasse; donc l'angle à la circonférence ABC en vaut la moitié.

253. PROPOSITION LVIII. *Tout angle de segment, c'est-à-dire, tout angle* BAC (Fig. 153.) *fait par une tangente* AB, *& une corde* AC *menée du point d'attouchement vaut la moitié de l'arc* AHC *de son segment.*

Du point d'attouchement, je mene le rayon AO, & du centre O, la droite OH perpendiculaire sur la corde, & qui par conséquent coupe la corde & l'arc chacun en deux parties égales (*N.* 224.); l'angle BAO fait par la tangente, & le rayon est droit (*N.* 242.); & dans le triangle rectangle ARO, l'angle ARO étant droit, les deux autres RAO, ROA pris ensemble valent un droit (*N.* 97.); donc l'angle BAO est égal aux deux ensem-

ble RAO, ROA, & retranchant de part & d'autre l'angle RAO, il reste l'angle BAC du segment égal à l'angle ROA ou HOA, mais l'angle au centre HOA, vaut l'arc AH, moitié de l'arc AHC du segment; donc l'angle BAC du segment vaut la moitié de l'arc AHC de ce segment.

L'angle MAC du grand segment, & l'angle BAC du petit, valent ensemble deux droits (*N.* 49.), ou la moitié de la circonférence, c'est-à-dire la moitié de l'arc AHC du petit segment, plus la moitié de l'arc ANC du grand. Or, l'angle BAC vaut la moitié de l'arc AHC; donc l'angle MAC du grand segment, vaut la moitié de l'arc ANC de ce segment.

254. PROPOSITION LIX. *Tout angle* AB (Fig. 154.) *dont le sommet* B *est entre le centre, & la circonférence vaut la moitié de l'arc* AC *que ses jambes embrassent plus la moitié de l'arc* DE *qu'embrassent ses jambes prolongées au-delà du sommet.*

Je mene la droite EC; l'angle ABC externe au triangle BCE vaut les deux internes opposés BEC, BCE (*N.* 97.); or, BEC ou AEC ayant son sommet E à la circonférence vaut la moitié de l'arc AC (*N.* 252.), & par la même raison BCE ou DCE vaut la moitié de l'arc DE; donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

255. PROPOSITION LX. *Tout angle* ABE *dont le sommet* B *est hors du cercle* (Fig. 155.) *vaut la moitié de l'arc* AC, *que ses jambes embrassent moins la moitié de l'arc* DE *qu'elles coupent.*

Je mene la droite AE; l'angle AEC extérieur au triangle ABE vaut les deux internes opposés ABE, BAE (*N.* 97.); donc l'angle ABE ou ABC vaut l'angle AEC moins l'angle BAE; mais l'angle à la circonférence AEC vaut la moitié de l'arc AC (*N.* 252.); & l'angle à la circonférence BAE ou DAE vaut la moitié de l'arc DE; donc l'angle ABC, vaut la moitié de l'arc AC, moins la moitié de l'arc DE.

256. PROPOSITION LVI. *Tout angle* ABC (Fig. 156.) *fait par une corde* AB, *& par le prolongement* BC *d'une autre corde* EB *vaut la moitié des deux arcs* BA, BE *soutenus par les cordes.*

Par le point B, je mene la tangente MN qui coupe l'angle ABC en deux autres NBA, NBC; or, l'angle NBA étant l'angle du segment BA vaut la moitié de l'arc BA (*N.* 253.), & l'angle NBC étant égal à son opposé au sommet MBE qui est l'angle du segment BE, vaut la moitié de l'arc BE; donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc BA plus la moitié de l'arc BE.

257. PROPOSITION LVII. *Tout angle* ABC (Fig. 157.) *d'un ſegment eſt égal à l'angle* BRA *dans le ſegment oppoſé, c'eſt-à-dire dont le ſommet* R *eſt à la circonférence du ſegment oppoſé, & dont les jambes embraſſent l'arc* BSA *du petit ſegment.*

L'angle ABC du ſegment BSA vaut la moitié de l'arc BSA de ce ſegment; (*N.* 253.) or, l'angle BRA dans le ſegment oppoſé, étant à la circonférence, vaut auſſi la moitié de l'arc BSA qu'il embraſſe; donc &c.

258. PROBLEME. *Couper dans un cercle un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* MTN (Fig. 157.).

D'un point quelconque B du cercle, je mene une tangente BC, & je fais avec cette tangente au point B un angle CBA égal à l'angle donné MTN; tout angle qui aura ſon ſommet à la circonférence du ſegment BRA & qui embraſſera la corde BA, ſera égal à l'angle CBA du ſegment oppoſé, (*N.* 257.) & par conſéquent égal à l'angle MTN.

259. PROBLEME. *Inſcrire dans un cercle un triangle* BAC (Fig. 158.) *ſemblable à un triangle donné* MTN, *c'eſt-à-dire, faire que le triangle* BAC *ait les ſommets de ſes trois angles à la circonférence, & qu'il ſoit ſemblable à* MTN.

A un point quelconque A de la circonférence, je mene une tangente RS; je fais avec cette tangente au point A d'un côté l'angle CAS égal à l'angle M, & de l'autre l'angle BAR égal à l'angle N, & joignant les points B, C où les jambes de ces angles coupent la circonférence par la droite BC; le triangle ABC eſt ſemblable au triangle donné MTN.

Car l'angle ABC dans le ſegment ABC, eſt égal à l'angle SAC du ſegment oppoſé, (*N.* 257.) & par conſéquent égal auſſi à l'angle M; de même l'angle ACB dans le ſegment ACB eſt égal à l'angle RAB du ſegment oppoſé & partant égal à l'angle N; donc le troiſiéme angle BAC eſt égal au troiſiéme T, (*N.* 98.) & les deux triangles MTN, ABC ſont ſemblables.

260. PROBLEME. *Une droite* AB (Fig. 159.) *étant donnée, trouver le cercle dans lequel cette ligne étant miſe pour corde, coupe un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* T.

A l'extrêmité A de la droite AB, je fais un angle CAB égal à l'angle donné T; du point A j'éleve ſur la jambe CA une perpendiculaire indéfinie AR; du milieu S de la droite AB j'éleve la perpendiculaire SO qui coupe AR en O; & de ce point O pris

pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la diſtance du point O au point A, je décris le cercle demandé ABR.

Car à cauſe que la perpendiculaire SO coupe AB en deux également, le point O de cette perpendiculaire eſt également éloigné des extrêmités A, B de la droite AB; (*N.* 56.) donc la circonférence décrite avec le rayon OA paſſe par l'autre extrêmité B, & la droite AB eſt corde de ce cercle; or AC étant perpendiculaire ſur OA, eſt tangente; (*N.* 242.) donc l'angle CAB, eſt l'angle du petit ſegment, & cet angle eſt égal à tout angle ARB qui ſeroit dans le grand ſegment ARB; (*N.* 257.) mais l'angle CAB eſt égal à l'angle donné T, par la conſtruction; donc le ſegment ARC coupé par la droite AB, eſt capable de contenir un angle ARC égal à l'angle donné T.

261. Probleme. *Inſcrire un cercle dans un triangle donné* ABC (*Fig.* 160.) c'eſt-à-dire décrire un cercle qui touche les trois côtés du triangle; je diviſe les angles A, C chacun en deux également par les droites AO, CO; du point O où elles ſe coupent, j'abaiſſe ſur les trois côtés les perpendiculaires OT, OR, OS; de ce même point O pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à l'une des perpendiculaires OT; je décris un cercle TRS qui eſt le cercle demandé; ce que je prouve ainſi.

Les triangles rectangles AOT, AOR ont l'hypothénuſe AO commune; l'angle droit égal à l'angle droit, & l'angle OAT égal à l'angle OAT par la conſtruction; donc le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme, (*N.* 98.) & par conſéquent les deux triangles ſont parfaitement égaux; (*N.* 100.) ainſi la perpendiculaire OT eſt égale à la perpendiculaire OR; par les mêmes raiſons, les triangles rectangles COT, COS ſont parfaitement égaux, & la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT, & par conſéquent à la perpendiculaire OR; ainſi la circonférence décrite avec le rayon OT paſſe par les extrémités R, S des deux autres; or les trois côtés du triangle ABC étant perpendiculaires ſur les rayons OT, OR, OS ſont tangentes du cercle; (*N.* 242.) d'où il ſuit que le cercle eſt inſcrit comme on le demandoit.

262. Probleme. *Autour d'un cercle, circonſcrire un triangle* ABC (Fig. 161.) *ſemblable à un triangle donné* mnr, *c'eſt-à-dire décrire un triangle* ABC *ſemblable au triangle* mnr, *& dont les trois côtés touchent le cercle.*

Je prolonge de part & d'autre le côté *mr* du triangle *mnr*; du

centre O du cercle; je mene un rayon OH, & je fais en O avec ce rayon un angle TOH égal à l'angle extérieur *nmp*, & de l'autre côté un angle VOH égal à l'autre angle extérieur *nrq* : aux points T, H, V j'éleve des perpendiculaires AB, AC, BC qui en s'entrecoupant, forment le triangle demandé ABC; ce que je prouve ainsi.

Si les deux lignes TO, OH étoient en ligne droite les perpendiculaires BA, CA sur ces lignes, seroient paralelles; (*N.* 68.) donc puisque ces deux lignes s'inclinant entr'elles, les perpendiculaires s'inclinent aussi & doivent se couper en A, & on démontrera de même que les perpendiculaires BC, AC sur les droites OV, OH qui font un angle, doivent se couper en C; cela posé.

Le quadrilatere ATOH étant composé de deux triangles ATO, AHO, ses quatre angles valent ensemble quatre angles droits; (*N.* 97.) or, les deux ATO, AHO sont droits par la construction; donc les deux autres TOH, TAH valent deux droits; mais l'angle *nmp* & son angle de suite *nmr*, valent aussi deux droits; (*N.* 49.) donc les deux ensemble TOH, TAH sont égaux aux deux ensemble *nmp*, *nmr*, & retranchant d'une part l'angle TOH, & de l'autre l'angle *nmp* égal à l'angle TOH par la construction, il reste l'angle TAH égal à l'angle *nmr*.

Par un semblable raisonnement, on trouvera que dans le quadrialatere VOHC, l'angle VCH est égal à l'angle *nrm*, or, les angles *nmr*, *nrm* du triangle *nrm* valent ensemble moins de deux droits, puisque les trois angles de ce triangle n'en valent que deux; donc les angles TAH, VCH qui sont égaux chacun à chacun aux angles *nmr*, *nrm*, valent ensemble moins de deux droits, & par conséquent les côtés BA, BC de ces angles ne sont pas paralelles, (*N.* 72.) & doivent se couper en un point B; ainsi le triangle ABC ayant les deux angles sur la base AC égaux aux deux angles sur la base *mr* du triangle *nmr*; le troisiéme est égal au troisiéme, (*N.* 98.) & les deux triangles sont semblables, & il est visible que le triangle ABC est circonscrit puisque ses côtés touchent le cercle (*N.* 242.).

263. PROPOSITION LXV. *Si deux cordes* AB, CD (Fig. 162.) *sont paralelles, les arcs* AC, BD *compris entre ces deux cordes, sont égaux.*

Je mene du centre O un diametre RS perpendiculaire sur l'une des cordes AB, & ce diametre est aussi perpendiculaire sur l'autre

corde CD; (*N.* 68.) donc il coupe les cordes & leur arc en deux également, (*N.* 224.) & comme il coupe aussi la circonférence en deux également, l'arc SBDR est égal à l'arc SACR, & retranchant d'une part l'arc SB & l'arc DR, & de l'autre l'arc SA & l'arc CR égaux chacun à chacun aux deux précédents, il reste l'arc BD égal à l'arc AC.

264. COROLLAIRE I[er]. *Si deux cordes paralelles* AB, CD (Fig. 162.) *sont égales, les cordes* AC, DD *des arcs interceptés, sont aussi paralelles & égales.*

A cause de l'égalité des cordes AB, CD, les arcs AB, CD sont égaux, (*N.* 251.) & parce que ces cordes sont paralelles, le arcs compris AC, BD sont égaux; (*N.* 263.) or, ces quatre arcs valent ensemble la circonférence entiere; donc les deux AB, BD valent ensemble la demi circonférence de même que les deux DC, CA, & partant l'angle à la circonférence ACD qui embrasse les deux premiers AB, BD vaut la moitié de la demi-circonférence, (*N.* 252.) c'est-à-dire un angle droit; par la même raison, l'angle ABD est aussi droit; donc les cordes AC, BD étant perpendiculaires chacune sur l'une des paralelles; sont aussi perpendiculaires sur l'autre, (*N.* 68.) & par conséquent elles sont paralelles & égales.

265. COROLLAIRE II. *Si aux extrêmités* A, C *d'une corde* AC (Fig. 163.) *on éleve deux perpendiculaires indéfinies, ces perpendiculaires couperont le cercle aux points* B, D *& leurs parties* BA, DC *comprises dans le cercle, seront deux cordes paralelles & égales.*

Du centre O, je mene OH perpendiculaire sur AC & ROS paralelle à AC; les trois lignes AB, HO, CD perpendiculaires sur AC sont paralelles entr'elles, (*N.* 68.) & partant les lignes RS, AC paralelles entre ces trois lignes, sont égales & également inclinées, (*N.* 77.) c'est-à-dire RS égale à AC est perpendiculaire sur les trois, & de plus, elle est divisée en deux également en O par la droite OH qui divise la corde AC en deux également; (*N.* 153, 224.) or, la corde AC étant plus petite que le diametre, (*N.* 249.) sa moitié AH est moindre que le rayon; donc RO ou OS égale à AH est moindre que le rayon, & partant les droites AB, CD qui passent par les extrêmités R, S des droites RO, OS, sont dans le cercle & doivent le couper en B & D, & comme les distances OR, OS du centre à ces lignes, sont égales, il s'ensuit que AB, CD sont deux cordes paralelles & égales.

266. Corollaire III. *Si l'on coupe deux cordes* AB, CD *paralelles & égales par un diametre* POX *qui leur soit oblique*, (Fig. 163.) *les parties inégales* BT, TA *que ce diametre coupe sur l'une* AB, *sont égales chacune à chacune aux parties* CV, VD *qu'il coupe sur l'autre* CD.

Du centre O, je mene la droite RS perpendiculaire sur les cordes AB, CD, & qui par conséquent les coupe chacune en deux parties égales; (*N.* 224.) ainsi à cause de AB = CD nous avons BR ou RA = DS ou SC, & OR = OS; (*N.* 250.) les triangles rectangles ROT, SOV, étant semblables à cause de l'angle droit ORT égal à l'angle droit OSV, de l'angle ROT égal à l'angle SOV qui lui est opposé au sommet; & du troisiéme angle égal par conséquent au troisiéme, donnent OR. OS :: TR. VS; mais OR = OS, donc TR = VS, & ajoûtant à TR la moitié BR de la corde AB, & à VS la moitié SC de la corde CD, nous aurons BT = CV: donc à cause de AB = DC, nous aurons aussi AB — BT = CD — CV ou AT = VD.

267. Probleme. *D'un point extérieur* R (Fig. 164.) *mener une tangente à un cercle.*

Du point R je mene au centre O la droite RO que je divise en deux également en T; du point T pris pour centre, & avec une ouverture de compas égal à TR ou TO; je décris un cercle qui coupe le cercle donné ABCD en deux points A, C; (*N.* 244.) du point R, je mene aux points A, C les droites RA, RC qui sont l'une & l'autre tangentes du cercle.

Car menant le rayon OC, l'angle RCO à la circonférence du cercle RCOA, vaut la moité de l'arc ou demi circonférence OAR qu'il embrasse, (*N.* 252.) & par conséquent il est droit; donc la droite RC perpendiculaire sur l'extrêmité du rayon OC, est tangente du cercle ABCD au point C, (*N.* 242.) & on prouvera de même que AR est tangente en A.

268. Corollaire Ier. *D'un point extérieur* R, (Fig. 164.) *on ne peut mener que deux tangentes.* Toute autre ligne qu'on meneroit entre les tangentes RC, RA couperoient nécessairement ou le rayon OC, ou le rayon OA en un point plus près du centre O, & passeroit dans le cercle; & si on la menoit au-delà des tangentes, & il est clair qu'elle ne pourroit ni couper ni toucher le cercle.

269. Corollaire II. *Les deux tangentes* AC, RA (Fig. 164.) *qu'on peut mener d'un même point extérieur* R, *sont égales entr'elles.*

Les triangles rectangles ROC, ROA ont l'hypothénuse RO commune & le côté OC égal au côté OA ; donc ils sont parfaitement égaux, (*N.* 102.) & le côté RA est égal au côté RC.

270. COROLLAIRE III. *Si l'on joint par une droite* CA *les points d'attouchement* C, A (Fig. 164.) *de deux tangentes égales menées d'un même point extérieur* R, *cette droite* CA *sera coupée en deux également & perpendiculairement par la secante* ROD *menée du même point* R *par le centre* O.

Les tangentes RC, RA étant égales, le point R de la secante RD est également éloigné des extrêmités AC de la droite CA, & à cause des rayons égaux CO, AO, le point O de la secante est aussi également éloigné des mêmes extrêmités A, C; donc la droite ROD est perpendiculaire sur CA (*N.* 58.) & la coupe en deux également.

D'où il suit que la secante RD qui passe par le centre, & la tangente RC menée du même point R, étant données, on peut trouver le point A où l'autre tangente touche le cercle, en menant du point C une ligne droite CA qui soit perpendiculaire sur la secante.

271. PROPOSITION. LXVI. *Une secante* RD *& une tangente* RC (Fig. 165.) *étant menées d'un même point extérieur* R, *le rectangle* $RA \times RD$ *de la partie extérieure par la secante entiere, est égal au quarré de la tangente* RC.

Je mene les droites AC, CD; les triangles RAC, RDC ont l'angle R commun; l'angle RCA du segment AC égal à l'angle RDC dans le segment opposé; (*N.* 257.) donc le troisiéme angle est égal au troisiéme, & les deux triangles sont semblables; comparant donc les côtés opposés aux angles égaux, nous aurons RA. RC :: RC, RD ; ainsi faisant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne, nous aurons $RA \times RD = \overline{RC}^2$.

272. COROLLAIRE Ier. *Si du même point on mene au cercle tant de secantes qu'on voudra, tous les rectangles des secantes, par leurs parties extérieures, seront égaux*; ces rectangles seront égaux chacun au quarré de la tangente; donc, &c.

273. COROLLAIRE II. *La partie extérieure d'une secante, & la secante sont réciproques à la partie extérieure d'une autre secante & à cette seconde secante.* Le rectangle de la premiere par sa partie extérieure est égal au rectangle de la seconde par sa partie extérieure; donc, &c. (*N.* 185.).

274. COROLLAIRE III. *Si après avoir mené deux fecantes d'un même point* R *on joint les points où elles coupent le cercle par les droites* CS, MT (Fig. 166.) *ou par les droites* CT MS, (Fig. 167.) *on aura dans la figure 166 deux triangles* CRS, MRT *dont les bafes feront avec les côtés des angles égaux chacun à chacun; mais d'un fens oppofé; c'eft-à-dire l'angle fait par la bafe* CS *avec le côté* RS, *eft égal à l'angle fait par la bafe* TM *avec le côté* RM, *& l'angle fait avec le côté* RC *par la bafe* CS, *eft égal à l'angle fait par la bafe* MT *avec l'autre côté* RT, *& les mêmes chofes arriveront dans la figure 167.*

Dans la figure 166, l'angle R eft commun aux deux triangles RCS, RMT, & l'angle RSC fait par la corde CS, & le prolongement RS de la corde ST vaut la moitié des arcs CS, ST, ou de l'arc CT, (*N.* 256.) de même que l'angle à la circonférence CMT; (*N.* 252.) donc le troifiéme angle de l'un eft égal au troifiéme angle de l'autre, c'eft-à-dire l'angle RCS égal à l'angle RTM.

Dans la figure 167, les deux triangles RCT, RSM ont l'angle commun R; l'angle RTC a la circonférence égale à l'angle RMS, auffi à la circonférence, & qui embraffe le même arc CS; (*N* 252.) donc le troifiéme RCT eft égal au troifiéme RSM.

Nota. Que fi du point C (*Fig.* 165.) où une tangente RC touche un cercle, on mene deux droites CA, CD aux points A, D où une fecante RD qui part du même point R, coupe le cercle, on aura auffi deux triangles RAC, RDC, dont les bafes AC, CD feront avec les côtés des angles égaux chacun à chacun, mais d'un fens différent; car l'angle R eft commun; l'angle RCA étant angle du fegment CA vaut la moitié de l'arc CA, (*N.* 253.) de même que l'angle ADC ou RDC qui eft à la circonférence; (*N.* 252.) donc le troifiéme RAC eft égal au troifiéme RCD.

275. *REMARQUE.* Lorfqu'un angle eft coupé par deux bafes qui font avec les côtés des angles égaux chacun à chacun, mais d'un fens oppofé, ces bafes font dites *Antiparalelles*, par quelques Auteurs; elles peuvent avoir trois différentes difpofitions, car dans la Figure 166, les bafes CS, MT ne fe coupent point entre les côtés de l'angle MRT; dans la Figure 167, les bafes CT, SM fe coupent entre les côtés MR, RT, & dans la Figure 165, les bafes CA, CD partent d'un même point du côté RC.

Dans les dispositions des Figures 166, 167, le rectangle de la partie RC par le côté entier RM est égal au rectangle de la partie RS par le côté entier RT, car comparant les côtés homologues des triangles semblables RCS, RMT de la Figure 166, ou des triangles semblables RCT, RSM de la Figure 167, on aura RS, RC :: RM, RT; donc RS × RT = RC × RM.

Dans la disposition de la Figure 165, le rectangle de la partie RA par le côté entier RD est égal au quarré de l'autre côté RC, car la comparaison des côtés homologues des triangles semblables RAC, RCD, donne RA, RC :: RC, RD, & partant RA × RD = $\overline{RC}^2$. On se sert des bases antiparalelles pour résoudre les Problêmes suivans.

276. PROBLEME. *Couper deux lignes inégales données* RM, RT (Fig. 168.) *chácune en deux parties, de façon que le produit de la ligne* RM *par l'une de ses parties soit égal au produit de la ligne* RT, *par l'une de ces parties.*

Je fais un angle quelconque dont les lignes RM, RT soient les côtés; je mene la ligne MT, & au sommet T du plus grand des deux angles M, RTM; je fais avec RT un angle RTM égal à l'angle RMT. D'un point quelconque S pris sur RT, je mene une droite SC paralelle à TH, & qui coupe RM en C. Les lignes RM, RT sont coupées en C & S, comme on le demandoit. Ce que je prouve ainsi.

A cause que les côtés RM, RT du triangle RMT sont inégaux, l'angle RTM opposé au plus grand côté RM est plus grand que l'angle RTM opposé à l'autre côté RT. Ainsi on peut toujours retrancher de l'angle RTM un angle RTH égal à l'angle RMT par une droite TH qui coupera RM entre ses extrêmités R, M, & à plus forte raison la droite SC paralelle à TH coupera la même RM entre R & M. Cela posé.

Les angles CSR, HTR faits par les paralelles CS, HT du même côté avec la droite RT sont égaux (*N.* 71.); or, par la construction l'angle HTR est égal à l'angle RMT; donc l'angle CSR du triangle RCS est égal à l'angle RMT du triangle RMT, mais ces deux triangles ont aussi l'angle R commun; donc le troisiéme angle RCS est égal au troisiéme angle RTM, & par conséquent les bases CS, MT étant antiparalelles, nous avons RC × RM = RS × RT (*N.* 275.) ou RC, RM, réciproques à RS, RT.

Ce Problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, car il eſt libre de mener la paralelle SC de tel point S qu'on voudra de la droite RT, ce qui par conſéquent peut faire que les lignes RM, RT ſoient diviſées d'une infinité de façons différentes chacune en deux parties.

277. PROBLEME. *Une ligne* RM (Fig. 169.) *étant diviſée en deux parties inégales* RC, CM, *trouver une autre ligne auſſi diviſée en deux parties inégales, de façon que le rectangle de la partie* RC *par là toute* RM *ſoit égal au rectangle de l'une des parties de la ligne demandée par toute cette ligne.*

Je décris ſur la partie CM de la ligne RC un triangle iſoſcele quelconque COM ; c'eſt-à-dire des points C, M pris pour centres & avec une ouverture de compas, telle que je veux, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de CM, je décris deux arcs qui ſe coupent en un ſeul point O du même côté (*N.* 59.), du point O pris pour centre, & avec le rayon OC ou OM, je décris un cercle, & toutes les ſecantes RX, RT, &c. menées du point R au cercle reſoudront le Problême, car le rectangle de chacune d'elles par ſa partie extérieure ſera toujours égal au rectangle RC×RM (*N.* 271.).

Ce Problême eſt indéterminé non ſeulement, parce qu'on peut mener une infinité de ſecantes au cercle du rayon OC, mais parce que ce rayon OC pouvant être de telle grandeur qu'on voudra, pourvû qu'il ſoit plus grand que la moitié de CM, on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels RM ſera toujours ſecante, & dans leſquels auſſi on pourra mener du point R une infinité de ſecantes, qui toutes ſatisferont à la queſtion.

278. PROBLEME. *Deux lignes inégales* RM, RT (Fig. 168.) *étant données, & dont l'une* RM *eſt diviſée en deux parties* RC, CM, *couper l'autre* RT *en deux parties, de façon que le rectangle de l'une de ſes parties par la toute* RT *ſoit égal au rectangle de la partie* RC *par la toute* RM.

Je fais un angle quelconque à volonté, dont les côtés RM, RT ſoient égaux aux deux lignes données ; je mene la baſe MT, & au point C je fais avec RC un angle égal à l'angle RTM, ſi la jambe CS de cet angle coupe RT en un point S entre ſes extrêmités R, T, le Problême eſt reſolu ; mais ſi cette jambe paſſe par l'extrêmité T de RT ou qu'elle coupe RT prolongée au-delà de T en X, le Problême eſt impoſſible. Ce que je prouve ainſi.

Si

Si le point S est entre R & T, les triangles RCS, RMT ayant l'angle R commun, & l'angle RCS égal à l'angle RTM par la construction, le troisiéme angle RSC est égal au troisiéme RMT, & les bases SC, TM étant anti-paralelles, nous avons RC, RS :: RT, RM, donc $RC \times RM = RS \times RT$.

Si l'angle RCT est égal à l'angle RTM, les deux triangles RCT, RTM auront leurs bases TC, TM anti-paralelles, & partant $RC \times RM = \overline{RT}^2$. or comme toute partie de RT est moindre que RT, & que par conséquent le rectangle de RT par l'une de ces parties sera toujours moindre que $RT \times RT$ ou $\overline{RT}^2$; il est clair qu'on ne peut pas diviser RT comme on le demande.

Enfin, si l'angle RCX est égal à l'angle RTM, les triangles RCX, RTM auront les bases anti-paralelles, & partant $RC \times RM = RT \times RX$; or, à cause de RX plus grand que RT, nous aurons $RT \times RX$ plus grand que $RT \times RT$ ou $\overline{RT}^2$, & par conséquent le Problême est encore impossible.

Au reste, dans le cas où le Problême est possible, il n'y a qu'une seule solution, c'est-à-dire la partie RS de la droite RT ne peut être ni plus grande ni moindre, car le produit de RT par une partie plus grande que RS sera plus grand que le produit $RT \times RS = RC \times RM$, & le produit de RT par une partie moindre que RS sera plus petit que $RT \times RS = RC \times RM$. Ce Problême a été resolu d'une autre façon ci-dessus (*N.* 187.).

279. PROPOSITION LXVII. *Si deux cordes* AB, CD *d'un même cercle* (Fig. 171.) *se coupent, elles se coupent en parties réciproques, c'est-à-dire le rectangle* $AH \times HB$ *des parties* AH, HB *de l'une, est égal au rectangle* $DH \times HC$ *des parties de l'autre.*

Je joints les extrémités des cordes par les droites AD, CB, les triangles AHD, CHB, ont l'angle AHD égal à l'angle CHB qui lui est opposé au sommet, & l'angle à la circonférence DAH ou DAB égal à l'angle à la circonférence BCH ou BCD (*N.* 252.); donc le troisiéme angle est égal au troisiéme, & les deux triangles sont semblables, ainsi comparant les côtés homologues, nous aurons AH, HD :: HC, HB, & par conséquent nous aurons aussi $AH \times HB = HD \times HC$.

280. PROBLEME. *Trouver à deux lignes* AH, HB (Fig. 171.) *deux autres lignes qui leur soient réciproques.*

Je décris un cercle avec un rayon à volonté, égal ou plus

grand que la moitié des deux lignes AH, AB, dont je fais une ſeule ligne droite AB. Je prens avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte ſur la circonférence du cercle de A en B, du point H, je mene une corde CHD comme je veux, & les deux parties CH, HD de cette corde ſont les lignes demandées. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe que le rayon du cercle eſt ou égal ou plus grand que la moitié de la ſomme AB des droites AH, HB, cette ſomme AB pourra toujours être contenue dans la circonférence, & ſera ou diamétre ou corde, & comme les deux cordes AB, CD ſe couperont, nous aurons $AH \times HB = DH \times HC$ (*N.* 279.). Donc, &c.

Ce Problême eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, non-ſeulement à cauſe qu'on peut mener du point H une infinité de cordes au cercle, leſquelles ſatisferont toutes à la queſtion ; mais encore parce qu'on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels AB peut être contenue, & dans leſquels on pourra mener du point H une infinité de différentes cordes.

Mais ſi on donnoit les deux droites AH, HB, & la ſomme DC des deux autres, ou ce qui revient au même, ſi on donnoit la droite AB, & la droite DC, & qu'on propoſât de couper DC en parties réciproques aux parties AH, HB de AB, le Problême ſeroit abſolument déterminé, comme nous l'avons fait ci-deſſus (*N.* 187, 278.) où nous en avons donné la ſolution

281. PROPOSITION LXVIII. *Deux cordes* AB, CD *d'un même cercle* (N. 171.) *ne peuvent pas ſe couper toutes les deux en deux parties égales.*

Si cela étoit, la droite menée du centre A au point H, ſeroit perpendiculaire ſur la corde AB, puiſqu'elle ſeroit coupée en deux également (*N.* 224.), & par la même raiſon elle ſeroit perpendiculaire ſur la corde CD ; donc une même ligne AH ſeroit perpendiculaire ſur deux lignes AB, CD qui ſe coupent, ce qui eſt impoſſible (*N.* 57.).

282. PROPOSITION LXIX. *Dans tout quadrilatere formé par quatre cordes d'un même cercle, ſi l'on mene les deux diagonales la ſomme des rectangles des côtés oppoſés eſt égale au rectangle des deux diagonales.*

Cette propoſition contient pluſieurs cas que nous allons démontrer en particulier.

En premier lieu, ſi les quatre cordes forment un quarré ABCD (*Fig.* 174.), l'angle à la circonférence ABC étant droit, embraſſe

la demi-circonférence, & par conféquent la diagonale AC eft un diamétre. Par la même raifon la diagonale DB eft auffi un diamétre, & ces deux diagonales égales fe coupent au centre O, & divifent le quarré en quatre triangles rectangles ifofceles & égaux. Or, le triangle rectangle DOC étant femblable au triangle rectangle ABC à caufe que celui-ci eft auffi ifofcele, nous avons DO, DC :: AB, AC; donc DO × AC = DC × AB. De même les triangles femblables BOC, DAC donnent BO, BC :: DA, AC, donc BO × AC = BC × DA; & ajoutant les membres de cette équation aux membres de la précédente chacun à chacun, nous aurons DO × AC + BO × AC = DC × AB + BC × DA; mais DO × AC + BO × AC eft la même chofe que DO + BO ou DB multiplié par AC, donc DB × AC = DC × AB + BC × DA.

En fecond lieu, fi les quatre cordes forment un rectangle ABCD (*Fig.* 173.), la corde BC fera donc plus grande que la corde AB, car autrement la figure feroit un quarré, & l'arc BC fera plus grand que l'arc AB; donc l'angle à la circonférence BDC fera plus grand que l'angle à la circonférence BDA. Je fais en D avec la corde DC un angle CDE égal à l'angle BDA, & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDB égal à l'angle EDA. Les triangles ADE, BDC font femblables à caufe de l'angle à la circonférence DAC égal à l'angle à la circonférence DBC, puifqu'ils embraffent le même arc DC, & de l'angle ADE égal à l'angle BDC par la conftruction. Donc AE, AD :: BC, BD, & partant AE × BD = AD × BC; de même les triangles EDC, BAD font femblables à caufe de l'angle EDC égal à l'angle BDA par la conftruction, & de l'angle à la circonférence DCE ou DCA égal à l'angle à la circonférence ABD, car ces angles embraffent le même arc AD. Donc EC, DC :: AB, BD, ce qui donne EC × BD = DC × AB, & ajoutant les membres de cette équation à ceux de la précédente, nous aurons AE × BD + EC × BD = AD × BC + DC × AB, c'eft-à-dire, AC × BD = AD × BC + DC × AB.

En troifiéme lieu, les quatre cordes ne peuvent pas former un paralellogramme, car les deux grands arcs foutenus par les deux grands côtés paralelles feroient égaux, & les deux petits arcs foutenus par les deux petits côtés paralelles feroient auffi égaux, & comme ces quatre arcs compoferoient la circonférence, la fomme d'un grand & d'un petit vaudroit la demi-conférence, &

par conséquent l'angle à la circonférence fait par un grand côté & un petit embrasseroit la demi-circonférence & seroit droit, ce qui est contre la supposition.

En quatriéme lieu, si les cordes forment un trapezoïde ABCD (*Fig.* 175.), il n'arrivera jamais que les quatre angles soient divisés en deux également par les diagonales, car si les angles DAC, CAB étoient égaux, les arcs CD, CB seroient égaux entr'eux, & à l'arc DA égal à l'arc CB à cause des paralelles CD, BA (*N.* 263.), & si outre cela les angles CDB, BDA étoient égaux l'arc CB seroit égal à l'arc BA, & par conséquent les quatre arcs seroient égaux, & la figure seroit un quarré. Cela posé, supposons que l'angle BDA soit plus grand que l'angle CDB, je fais en D avec le côté AD un angle ADE égal à l'angle CDB, & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDE égal à l'angle ADB; ainsi les triangles ADE, CDB semblables à cause de l'angle ADE égal à l'angle CDB, & de l'angle EAD égal à l'angle CBD, donnent AE, AD :: BC, BD, d'où l'on tire $AE \times BD = AD \times BC$; or, les triangles CDE, DBA semblables à cause de l'angle CDE égal à l'angle BDA, & de l'angle ECD égal à l'angle DBA, donnent CE, CD :: BA, BD, d'où je tire $CE \times BD = CD \times BA$, & partant nous aurons comme ci-dessus $AE \times BD + CE \times BD = AD \times BC + CD \times BA$, c'est-à-dire $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

Enfin, si les quatre cordes forment un trapeze ABCD (*Fig.*172.) on démontrera encore plus aisément que dans le cas précédent que les quatre angles ne peuvent pas être divisés par les diagonales chacun en deux également, & par conséquent faisant la même construction, on trouvera encore $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

283. PROPOSITION LXX. *Si d'un point quelconque* R *d'une circonférence* (Fig. 176.) *on abaisse une perpendiculaire* RM *sur un diamétre* AB, *le quarré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des parties* AM, MB *du diamétre qu'elle coupe.*

Des extrêmités A, B du diamétre AB, je mene les cordes AR, BR; l'angle à la circonférence ARB vaut la moitié de la demi-circonférence qu'il embrasse (*N.*252.), & par conséquent est droit; donc le triangle ARB est rectangle; or, la droite RM est menée perpendiculairement du sommet R de l'angle droit sur l'hypothenuse; donc cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segmens AM, MB de l'hypothenuse (*N.* 169.); ainsi

nous avons AM, MR :: MR, MB; ce qui donne AM × MB $= \overline{MR}^2$.

284. COROLLAIRE II. *Le quarré de la même perpendiculaire* RM *est égal au quarré du rayon* OA *moins le quarré de la partie* OM *interceptée entre le centre* O *& le point* M.

Le diamétre AB étant divisé en deux également en O & en deux inégalement en M, nous avons AM × MB $= \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 146.); or, AM × MB $= \overline{MR}^2$ (*N.* 283.); donc $\overline{MR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$.

285. COROLLAIRE III. *La corde* AR *est moyenne proportionnelle entre le segment* AM *du diamétre & le diamétre, & l'autre corde* RB *est moyenne proportionnelle entre le segment* BM, *& le diamétre.* Le triangle ARC est rectangle, & la droite RM est menée du sommet de l'angle droit sur l'hypothenuse AB. Donc, &c. (*N.* 170.).

COROLLAIRE IV. *On peut donc au moyen de ceci trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, de deux façons différentes de celle que nous avons enseignée ci-dessus* (N. 182.).

Par exemple, si l'on demande une moyenne proportionnelle entre les deux lignes AM, MB, je les ajoute l'une à l'autre en ligne droite, je coupe la somme AB en deux également en O; du pont O pris pour centre, & avec le rayon OA ou OB je décris un demi-cercle ORB, & élevant en M la perpendiculaire MR, cette perpendiculaire est la moyenne proportionnelle demandée (*N.* 283.).

Que si l'on demande une moyenne proportionnelle entre AB & sa partie AM, je décris un demi-cercle ARB sur la grande AB prise pour diamétre; du point M, j'éleve la perpendiculaire MR & la corde AR, est la moyenne demandée (*N.* 285.).

286. PROPOSITION LXXI. *Les circonférences de cercles concentriques* ABC, *efh* (Fig. 177.) *sont paralelles.*

De tous les points de la circonférence *efh*, je conçois des lignes menées au centre O, & prolongées jusqu'à la circonférence ABC, les distances des points *e*, *f* &c. de la circonférence *efh* à la circonférence ABC seront donc les droites A*e*, B*f* (*N.* 234.); or, ces droites sont égales, puisqu'elles sont les différences des rayons égaux AO, BO, &c. aux rayons égaux *e*O, *f*O du petit cercle. Donc tous les points de la petite circonférence sont éga-

lement éloignés de la grande, & partant ces deux circonférences font paralelles.

287. PROPOSITION LXXII. *Tous les cercles font femblables entr'eux.*

Soient les deux cercles ABC, EFH (*Fig.* 177.), je les rends concentriques, c'eft-à-dire du centre O du grand, & avec un rayon O*e* égal au rayon OE, je décris une circonférence *efh*, & le cercle *efh* eft par conféquent le même que le cercle EFH, ainfi il s'agit de faire voir que les deux cercles concentriques ABC, *efh*, font femblables entr'eux.

Je conçois que la circonférence ABC foit divifée en une infinité de petits arcs égaux, tels que AB, & menant des points de divifion A, B, &c. des rayons au centre, ces rayons coupent la circonférence *efh* en un même nombre de petits arcs tous égaux entr'eux, tels que *ef*; je mene les cordes des arcs dans l'un & l'autre cercle, & à caufe des égalités des arcs, les cordes du premier cercle font toutes égales entr'elles, de même que les cordes du fecond, ce qui fait que dans le grand cercle tous les petits triangles ifofceles AOB, &c. faits par les rayons & les cordes font tous égaux entr'eux (*N.* 100.); de même que les petits triangles *e*O*f*, &c. faits par les rayons, & les cordes du petit, & que chaque triangle AOB du grand eft femblable à chaque triangle *e*O*f* du petit à caufe de l'angle commun O, & des bafes paralelles AB, *ef*; ainfi nous avons dans les deux cercles deux polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés, & partant femblables entr'eux; mais à caufe de l'infinie petiteffe des arcs AB, &c. du grand cercle, les cordes de ces arcs en font infiniment proches, & fe confondent avec eux, de façon que l'on peut prendre les cordes pour les arcs, & il en eft de même à l'égard du petit cercle; donc nous pouvons prendre les polygones pour les cercles mêmes. Or, dans les polygones femblables, les circuits font entr'eux comme les rayons (*N.* 165.); donc les circonférences ABC, *efh* qui font ici les mêmes que les circuits des polygones font entr'elles comme les rayons AO, *eo*, & par conféquent les cercles font femblables, & ainfi des autres.

288. COROLLAIRE I[er]. *Si l'on mene des tangentes* MN, RS (Fig. 177.) *à deux ou plufieurs cercles inégaux, les points d'attouchement* A, e *font proportionnels aux circonférences ou aux rayons.*

Les côtés des polygones femblables d'un nombre infini de côtés qui compofent les deux cercles, font infiniment petits,

donc chacun de ces côtés ou chaque arc est un point de sa circonférence. Or, les côtés des polygones semblables sont entr'eux comme leurs circuits ou comme leurs rayons ; donc les points A, *e* des circonférences sont aussi entr'eux comme leurs rayons.

Nota. On ne pourroit concevoir ceci, si l'on disoit comme Euclide, que les lignes n'ont point de largeur ; mais dès-lors que nous leurs en donnons une, quelque petite qu'elle soit, on s'apperçoit que les points des lignes menées de tous les points de la grande circonférence au centre, anticipent sur les points des lignes voisines de plus en plus à mesure qu'elles approchent du centre, & que par conséquent eu égard à ces anticipations, les points dans lesquels une petire circonférence est coupée, seront plus petits.

289. COROLLAIRE II. *Les segmens donc les arcs comprennent un même nombre de degrés de leurs circonferences sont semblables entr'eux, & il faut dire la même chose des secteurs.*

Soient les segmens ABC, *abc* (*Fig.* 178.) dont le centre commun est au point O. Il est clair que les arcs ABC, *abc* seront entr'eux comme leurs circonférences ou comme leurs rayons, (*N.* 287.) puisqu'ils contiennent un même nombre de degrés de leurs circonférences. Or, les triangles ACO, *ac*O ayant l'angle O commun & les bases paralelles sont semblables, & donnent AC, *ac* :: AO, *a*O ; donc les cordes AC, *ac* sont entr'elles comme les arcs ABC, *abc*, & par conséquent les lignes qui comprennent les segmens sont proportionnelles ; il ne reste donc plus qu'à faire voir que les angles faits par ces lignes, c'est-à-dire les angles mixtilignes faits par les cordes avec les arcs, sont égaux. Et pour cela :

Concevons que l'arc ABC soit divisé en une infinité de petits arcs tous égaux, & que des points de division soient menés au cenrre des rayons qui diviseront l'arc *abc* en un même nombre d'arcs égaux, qui vaudront chacun autant par rapport à leurs circonférences, que chaque petit arc de l'arc ABC par rapport à la sienne. Concevons encore que des points A, *a* soient menés des droites AH, AR, AB, &c. *ah*, *ar*, *ab*, &c. tous les angles que ces lignes feront entr'elles, & qui auront leurs sommets aux circonférences aux points A, *a*, seront égaux, puisqu'ils embrassent des arcs de même valeur. Ainsi, tous les angles CAH, HAR, &c. compris dans le segment ABC, seront égaux à tous

les angles *cah*, *har*, &c. compris dans le segment *abc*; mais tous les angles CAH, HAR, &c. composent ensemble l'angle mixtiligne CAB, & tous les angles *cah*, *har*, &c. composent l'angle mixtiligne *cab*; donc l'angle mixtiligne CAB, est égal à l'angle mixtiligne *cab*; & on prouvera la même chose des autres angles mixtilignes ACB, *acb*; d'où il suit que les segmens ABC, *abc*, ayant les côtés proportionnels & les angles égaux sont semblables.

Dans les triangles semblables AOC, *aOc* l'angle OAC est égal à l'angle O*ac*, ajoutant donc l'angle OAC à l'angle mixtiligne CAB, & l'angle O*ac* à l'angle mixtiligne *cab*, l'angle mixtiligne OAB du secteur OAC sera égal à l'angle mixtiligne O*ab* du secteur O*ac*, & par la même raison l'autre angle OCB mixtiligne est égal à l'angle mixtiligne O*cb*; or, les arcs & les rayons de ces secteurs sont proportionnels. Donc ces secteurs sont semblables.

290. COROLLAIRE IV. *Si on mene deux tangentes* MN, mn *à deux cercles inégaux* (Fig. 179.), *les angles mixtilignes* NAB, nab *faits par les tangentes, & les circonférences sont égaux.*

Je mene des points d'attouchement A, *a*, les diamétres AB, *ab*; les angles BAN, *ban* sont droits (*N.* 240.), & partant égaux. Or, les demi-cercles ATB, *atb* étant des segmens semblables (*N.* 289.), les angles mixtilignes BAT, *bat* sont égaux; donc retranchant de l'angle BAN l'angle BAT, & de l'angle *ban*, l'angle *bat*, il reste l'angle NAT égal à l'angle *nat*.

291. COROLLAIRE V. *Donc si plusieurs cercles inégaux touchent une même ligne* MN (Fig. 180.) *en un point* A, *tous les angles mixtilignes faits par cette tangente avec les circonferences, sont égaux entr'eux.*

Puisque les cercles touchent la même ligne MN au point A; la même perpendiculaire AS élevée sur le point A, passera par tous les centres (*N.* 242.), & coupera tous les cercles en deux parties égales. Ainsi on démontrera la même chose que dans le Corollaire précédent.

Nota. Ceci seroit impossible si les cercles touchoient la droite MN dans une égale partie. Mais comme les points des plus grands cercles sont plus grands que les points des petits; il arrive que les circonférences des grands cercles n'abandonnent pas si vîte la droite MN que les petites, & que par conséquent les angles mixtilignes qu'elles font avec la tangente, sont un peu à côté les uns

uns des autres, ce qui eſt aiſé de concevoir par la ſeule inſpection de la Figure 181, qui repréſente pluſieurs polygones réguliers ſemblables mais inégaux, qui touchent une même droite.

Et il ne faut pas dire qu'il s'enſuivra delà qu'un cercle peut toucher une ligne droite en plus d'un point, car quoiqu'un plus grand cercle touche une ligne droite en une partie plus grande que ne fait un petit cercle, cependant ce grand cercle ne touche que par un de ſes points, de même que le petit ne touche que par un des ſiens.

On peut encore expliquer ceci de cette façon : Concevons que pluſieurs polygones réguliers ſemblables mais inégaux, ayent tous un même angle commun A (*Fig.* 182.), & qu'à l'extrémité de la ligne AB qui diviſe cet angle en deux également, & qui paſſe par leurs centres, on éleve une perpendiculaire MN, il eſt viſible que cette perpendiculaire touchera tous les polygones, & que les angles qu'elle fera avec eux ſeront tous égaux ; or, cela arrivera à l'égard de tous les polygones ſemblables, quelque grand ou petit que ſoit leur nombre de côtés ; donc cela doit arriver auſſi à l'égard des cercles.

Et cette ſeconde explication reſout facilement une difficulté qu'on pourroit former, car puiſque tous les angles mixtilignes intérieurs des demi-cercles, qui touchent en A la droite MN (*Fig.* 180.) ſont égaux ; il s'enſuit néceſſairement, dira-t-on, que les angles curvilignes que les circonférences font en A, doivent être nuls, & cela eſt vrai ; car on voit dans la Figure 182, que les circuits des polygones ne font point d'angles entr'eux au point A, quoiqu'ils en faſſent après, à cauſe que les jambes de l'angle fait en A, changent enſuite de direction, & il en eſt de même à l'égard des cercles.

L'angle mixtiligne fait par la tangente & les circonférences, eſt nul au point A (*Fig.* 180.), car tous les petits côtés par leſquels les cercles touchent la droite MN, tombent les uns ſur les autres au point A, & ne font enſuite d'angles que parce qu'ils viennent à changer de direction, la Figure 181, fait voir cela clairement. D'ailleurs, on peut confirmer cette vérité par le raiſonnement ſuivant. Entre la perpendiculaire AS & la tangente, on ne peut mener de ligne droite du point A qui ne coupe toutes les circonférences, car autrement du même point A, on pourroit mener deux tangentes, ce qui eſt impoſſible (*N.* 241.). Or, on peut pourtant faire au point A avec AN une infinité d'an-

gles de plus petits en plus petits à l'infini, jusqu'à faire évanouir totalement l'angle, & il est clair que le plus petit de ces angles seroit encore plus grand que l'angle mixtiligne, puisqu'il couperoit les circonférences; donc l'angle mixtiligne en A doit être plus petit que tout ce qu'il y a de plus petit, & par conséquent il doit être nul.

Proprietés du Cercle, utiles pour l'intelligence des Sections Coniques.

292. PROPOSITION LXXIII. *Deux tangentes* AB, AC (*Fig.*183.) *étant menées d'un même point extérieur* A, *avec la secante* AD *qui passe par le centre* O, *& la droite* CB *qui joint les points d'attouchement ; je dis qu'on aura toujours* OR. OS :: OS. OA, *c'est-à-dire la distance du centre* O *au point* R, *ou la droite* CB *coupe la secante* AD, *est au rayon, comme le rayon est à la distance* OA *du centre* O *au point extérieur* A.

Du centre O au point d'attouchement, je mene le rayon OB; l'angle OBA étant droit (*N.* 240.), le triangle OBA est rectangle, & à cause que BC, coupe la secante AD perpendiculairement (*N.* 270.), la droite BR est une perpendiculaire menée du sommet A de l'angle droit sur l'hypothenuse AO; donc le côté OB du triangle rectangle OBA, est moyen proportionnel entre le petit segment RO, & l'hypothenuse entiere (*N.* 170.); & par conséquent nous avons OR. OB :: OB. OA; mais le rayon OB est égal au rayon OS, donc OR. OS :: OS. OA.

293. *REMARQUE.* Comme la perpendiculaire menée du point d'attouchement sur la secante AD qui passe par le centre, passe par l'autre point d'attouchement C de l'autre tangente; dans la suite, je ne mettrai qu'une tangente dans les Figures, & au lieu de dire *deux tangentes étant menées avec la secante, &c. & la ligne qui joint les points d'attouchement, je dirai pour abreger la tangente* AB, *la secante* AD *qui passe par le centre, & la perpendiculaire* BR *étant données*, &c.

294. PROPOSITION LXXIV. *La tangente* AB, *la secante* AD *qui passe par le centre & la perpendiculaire* BR *étant données, on aura toujours* AS. AR :: AO. AD.

Je mene le rayon OB, & à cause que dans le triangle rectangle OBA la droite BR menée de l'angle droit, est perpendiculaire sur l'hypothénuse AO; le côté AB est moyen proportionnel

entre le ſegment AR de l'hypothénuſe, & l'hypothénuſe entiere AO; ainſi AR. AB :: AB. AO, ce qui donne $\overline{AB}^2 = AR \times AO$; mais par la propriété de la ſecante nous avons $\overline{AB}^2 = AS \times AD$; (*N.* 271.) donc $AS \times AD = AR \times AO$; ce qui donne AS. AR :: AO. AD.

295. PROPOSITION LXXV. *Suppoſant toujours la tangente* AB (Fig. 184.), *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *données; je dis,* 1°. *Que ſi aux extrêmités* S, D *& au centre* O *du diametre, on éleve trois perpendiculaires* SH, OM, DN *qui ſe terminent ſur la tangente* AB *prolongée aux points* H, M, N, *les quatre lignes* SH, RB, OM, DN *ſont en proportion.* 2°. *Que le rectangle des deux perpendiculaires ou tangentes* SH, DN *eſt égal au quarré du rayon.*

Les quatre lignes SH, RB, OM, DN étant perpendiculaires ſur la ſecante AD ſont paralelles entr'elles, & par conſéquent les triangles ASH, ARB, AOM, ADN qui ont l'angle A commun & les baſes paralelles, ſont ſemblables entr'eux, & leurs baſes ſont entr'elles comme leurs côtés AS, AR, AO, AD; mais par la propoſition précédente nous avons AS. AR :: AO. AD; donc SH. RB :: OM. DN : ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Du point B, j'abaiſſe BP perpendiculaire ſur MO que je prolonge de l'autre côté en V. La droite MV eſt une ſecante qui paſſe par le centre, la droite MB eſt une tangente menée du même point M, & la droite BP eſt une perpendiculaire menée du point d'attouchement; donc nous avons OP. OE :: OE. OM; mais à cauſe des paralelles nous avons OP = RB; donc RB. OE :: OE. OM, & partant $RB \times OM = \overline{OE}^2$; mais nous venons de trouver SH. RB :: OM. DN, ce qui donne $RB \times OM = SH \times DN$ donc; $SH \times DN = \overline{OE}^2$.

296. PROPOSITION LXXVI. *Suppoſant encore la tangente* AB (Fig. 185. 186.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BR *données; je dis que la ſecante* AD *& toutes les autres ſecantes qu'on peut mener du même point* A, *ſont toutes diviſées harmoniquement en trois parties par la circonférence & la droite* BR; *c'eſt-à-dire que dans chaque ſecante, la partie extérieure eſt à ſa petite partie intérieure, comme la ſecante entiere eſt à l'autre partie intérieure.*

Des extrémités S, D du diametre, je mene des tangentes SH,

DN (*Fig.* 186.) qui se terminent sur la tangente AB prolongée en N ; ainsi, à cause que ces tangentes sont paralelles entr'elles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur le diametre ; les triangles ASH, ADN sont semblables, & donnent AH. SH :: AN. DN ; mais les tangentes SH, HB, étant menées d'un même point, sont égales de même que les tangentes DN, BN ; mettant donc dans la proportion que nous venons de trouver, la droite HB au lieu de son égale SH, & la droite BN au lieu de son égale DN, nous aurons AH. HB :: AN. BN : or, à cause des paralelles SH, RB, DN, la droite AD est divisée par ces paralelles en même raison que la droite AD ; donc AS. SR :: AD. RD ; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Maintenant, prenons une secante AV (*Fig.* 185.) qui ne passe pas par le centre, cette secante sera coupée en quelque point L par la perpendiculaire BRH, & il s'agit de prouver que AP. PL :: AV. LV, & que par conséquent AV est coupée en trois parties harmoniquement, & pour cela je décris sur la partie intérieure VP prise pour diametre, un cercle VTPQ ; du point L je mene une corde TQ perpendiculaire sur ce diametre, & du point T je mene au point A la droite TA ; si je fais voir que TA est tangente du cercle TPQV, il est clair que la droite AV étant une secante qui passe par le centre de ce cercle, & la droite TL étant perpendiculaire menée du point d'attouchement T, nous aurons, comme nous venons de voir dans le premier cas AP, PL, AV. LV : venons donc à la démonstration.

Dans le triangle rectangle ALR nous avons $\overline{AL}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2$ (*N.* 71.), & le triangle rectangle ATL donne $\overline{AT}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{TL}^2$ mettant donc dans cette derniere équation la valeur de $\overline{AL}^2$ nous aurons $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$; or, à cause que TL est perpendiculaire sur le diametre VP, nous avons $\overline{TL}^2 = VL \times LP$ (*N.* 283.), & parce que VP, HB sont deux cordes du grand cercle SBD & qui se coupent en L, nous avons $VL \times LP = HL \times LB$; (*N.* 275.) donc $\overline{TL}^2 = HL \times LB$ & mettant cette valeur de $\overline{TL}^2$ dans $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$, nous aurons $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + HL \times LB$; mais à cause que la ligne HB est divisée en deux également en R, & en deux inégalement en L, nous avons $HL \times LB + \overline{LR}^2 = \overline{HR}^2$

ou $\overline{RB}^2$; donc $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; or, dans le triangle ARB, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; donc $\overline{AT}^2 = \overline{AB}^2$; & comme par la propriété de la tangente AB & des secantes, nous avons $AP \times AV = \overline{AB}^2$, nous aurons aussi $AP \times AV = \overline{AT}^2$, c'est-à-dire que dans le cercle VTPQ le rectangle de la partie extérieure AP de la secante AV, par cette secante, est égal au quarré de la droite AT menée du même point A à la circonférence de ce cercle; mais dans ce même cercle le rectangle $AP \times AV$ est égal au quarré de la tangente menée du point A du côté du point T; donc le quarré de cette tangente est égal au quarré $\overline{AT}^2$, & partant la tangente & la droite AT sont égales; or, du même point A on ne peut mener à la circonférence VTPQ du même côté deux différentes lignes qui soient égales; (*N.* 235. 237.) donc AT est la tangente qu'on meneroit du point A à la circonférence VTPQ.

297. COROLLAIRE. *Si deux ou plusieurs secantes* AV, &c. (Fig. 187.) *menées d'un même point* A, *sont coupées harmoniquement par la circonférence, & par une droite* BH *perpendiculaire sur la secante qui passe par le centre, la tangente menée à l'une ou l'autre des extrémités de la corde* BH *passera par le point* A.

Si l'on prétend que la tangente menée du point B ne passe pas par le point A; je mene de ce point A une tangente qui touchera par conséquent le cercle en un point P différent du point B, à cause que deux tangentes ne peuvent toucher le cercle en un même point; (*N.* 241.) du point P, je mene PQ perpendiculaire sur la secante AD qui passe par le centre & qui coupe la secante AV en N; ainsi par la proposition précédente, la secante AV sera coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite PQ, & ses trois parties seront AF, FN, NV; mais par la supposition, la même secante AV est coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & ses trois parties sont AF, FL, LV, & la premiere AF de ces trois-ci, est la même que la premiere AF des trois précédentes; donc les deux dernieres FL, LV doivent être égales aux deux dernieres FN, NV chacune à chacune, (*N.* 206.) & partant FL, doit être égal à FN, & le point d'attouchement P, doit tomber sur le point d'attouchement B.

298. PROPOSITION LXXVII. *Posant encore que* AB (Fig. 188.) *la secante* AD *qui passe par le centre & la perpendiculaire* BRH *soient données; si d'un point quelconque* M *pris sur la circonférence; on mene*

une corde MN *qui passe par le point* R *où la perpendiculaire* BR *coupe la secante* AD, *& qu'après avoir mené des extrêmités* M, N *de cette corde, deux cordes* MT, NV *paralelles à* BR, *on mene les droites* VM, NT *par les extrêmités des cordes ; je dis que les droites* VM, NT *prolongées au-delà du cercle, seront deux secantes égales qui passeront par le point* A *& qui seront divisées harmoniquement par la circonférence & la perpendiculaire* BH.

A cause des cordes paralelles MT, VN, les arcs compris MV, TV sont égaux, (*N.* 263.) & ajoutant à chacun d'eux l'arc MT, les deux arcs VMT, MTN sont égaux, & les angles à la circonférence MVN, TNV qui embrassent ces arcs, sont aussi égaux; or, à cause que la corde MN ne passe pas par le centre O du cercle, & qu'elle coupe, par conséquent, la circonférence en deux parties inégales, l'arc MTN du petit segment, vaut moins qu'une demi circonférence, & l'angle MVN qui en vaut la moitié, est aigu, de même que son égal TNV; ainsi, puisque les deux lignes MV, TN font sur la droite VN les angles internes opposés, moindres ensemble que deux droits; ces lignes ne sont pas paralelles, (*N.* 72.) & venant à être prolongées du côté de A, elles doivent former avec la base VN, un triangle isoscele dont le sommet sera sur quelque point de la perpendiculaire AQ qui coupe la base VN en deux également (*N.* 107.).

Maintenant, comme nous ne sçavons pas encore si le point où les droites MV, NT, prolongées, coupent la perpendiculaire AQ, est le même que le point A; nommons ce point $= x$ quelque part où il soit. Le triangle MNV étant coupé par la droite BH paralelle à sa base, donne MR. RN :: ML. LV, (*N.* 158.) & dans les triangles semblables M*a*R, NQR, nous avons MR. RN. M*a*. NQ ou VQ, donc ML. LV :: M*a*. VQ; mais les triangles semblables *x*MA, *x*VQ, donnent M*a*. VQ :: *x*M. *x*V; donc *x*M. *x*V :: ML. LV ou *x*M. ML :: *x*V. LV, & partant la droite *x*V est divisé harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & il est visible qu'à cause des paralelles MT, HB, VN, l'autre côté *x*N du triangle isoscele M*x*N est aussi divisé harmoniquement par la circonférence & la droite HB; ainsi les deux lignes V*x*, N*x* étant deux secantes qui partent d'un même point *x*, & qui sont divisées harmoniquement par la circonférence & la droite HB perpendiculaire sur la secante AD qui passe par le centre; la tangente menée du point B, doit passer par le point *x*, (*N.* 297.) & ce point n'est pas différent du point A, puisque la

tangente BA qui coupe AD en A, ne peut la couper en un autre point.

299. COROLLAIRE Ier. *Si dans le trapezoide* MTNV (Fig. 188.) *fait par les quatre cordes* MT, TN, VN. MV, *on mene l'autre diagonale* VT, *cette diagonale passera aussi par le point* R. Car les angles MNV, TVN étant égaux à cause des arcs égaux MV, TN, les deux diagonales en se coupant, font un triangle isoscele, dont le sommet doit être sur la perpendiculaire AR qui coupe la base VN en deux également; or, la diagonale MN passe par le point R de cette perpendiculaire, & ne la coupe qu'en ce point; donc la diagonale VT doit passer par le même point.

300. COROLLAIRE II. *Si d'un même point* A (Fig. 188.) *d'où partent la tangente* AB, *la secante* AD, &c. *on mene deux secantes égales* AV, AN, *& qu'on joigne par des diagonales* MN, VT, *les quatre points où elles coupent la circonférence ; ces deux diagonales se couperont au point* R *de la perpendiculaire* BH.

Les secantes AV, AN donnent AV×AM=AN×AT; mais par la supposition AV=AN, donc, si d'une part l'on divise par AV, & de l'autre, par AN, nous aurons AM=AT; d'où il suit que les droites VN, MT menées par les extrêmités des secantes AV, AN & de leurs parties extérieures, sont perpendiculaires sur AD, (*N.* 236. 238.) & par conséquent paralelles à BH; ainsi les arcs VM, TN compris entre les paralelles MT, VN étant égaux, (*N.* 263.) les angles à la circonférence MNV, TVN qui s'appuyent sur ces arcs, sont aussi égaux; c'est pourquoi le triangle que les diagonales MN, TV forment du côté de VN en se coupant, est isoscele, & son sommet doit être sur la perpendiculaire AD qui coupe la base VN en deux également (*N.* 107.).

Or, comme nous ne sçavons pas encore si le point où ces deux diagonales se coupent sur AD est le point R; nommons ce point z, quelque part où il soit; les triangles semblables MAz, NQz donnent Mz. zN :: Ma. NQ ou QV, & à cause des triangles semblables MAa, VAQ, nous aurons Ma. QV :: MA. VA; donc Mz. zN :: MA. VA; or, à cause que la secante AV est coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH, nous avons MA. ML :: AV. LV ou MA. VA :: ML. LV; donc Mz. zN :: ML, LV : ainsi dans le triangle MNV les côtés MV, MN étant coupés proportionnellement aux point L, z, la droite Lz menée par ces deux points, est paralelle à la base VN; (*N.* 158.)

mais LR ou HB eſt auſſi paralelle à la baſe VN, & du point L on ne peut mener qu'une ſeule paralelle à une même ligne VN; donc la paralelle LR & la paralelle Lz ne ſont qu'une ſeule & même ligne, & le point z eſt le même que le point R.

301. COROLLAIRE III. Donc, ſi deux ſecantes égales AV, AN (*Fig.* 188.) ſont menées d'un même point, & qu'après avoir mené les diagonales MN, TV, on mene par le point R où elles ſe coupent, une droite HB paralelle à la droite VN qui paſſe par les extrêmités des ſecantes; les points H, B de la droite HB feront les points d'attouchement des deux tangentes égales qu'on peut mener du point A; car on prouvera comme ci-devant que les deux ſecantes AV, AN ſont coupées harmoniquement par le cercle & la droite HB, &c.

302. PROPOSITION LXXVIII. *Suppoſant toujours la tangente* AB (Fig. 189.) *la ſecante* AD *qui paſſe par le centre & la perpendiculaire* BRH *données; ſi du point* A *on mene une droite indefinie* XZ *paralelle à la perpendiculaire* BRH, *& que d'un point quelconque* C *pris ſur cette paralelle on mene une ſecante* CN *qui paſſe par le point* R, *cette droite* CN *ſera coupée harmoniquement par la circonférence & la droite* BH.

Des points M, N je mene les droites MT, NV paralelles, & par les points M, V, N, T les droites VA, NA qui feront deux ſecantes égales qui paſſeront par le point A, & qui feront diviſées harmoniquent par la circonférence & la perpendiculaire HB (*N.* 298.) ou, ce qui revient au même par les droites MT, HB; ainſi dans l'eſpace paralelle XZVN, la ſecante AV étant diviſée harmoniquement par les droites MT, HB paralelles aux paralelles XZ, VN, la droite CN compriſe dans ce même eſpace doit être coupé en même raiſon par les mêmes paralelles MT, HB, (*N.* 153.) & par conſéquent nous avons CM. MR :: CN. RN.

303. COROLLAIRE. *Si d'un point quelconque* C *du la droite* XZ (Fig. 190.) *paralelle à* BR, *on mene deux tangentes* CP, CQ *& la droite* PQ *qui joint leurs points d'attouchement; cette droite* PQ *paſſe par le point* R.

Car menant la ſecante CN qui paſſe par le point R, cette droite eſt coupée harmoniquement en M, R, N; (*N.* 302.) & ſes trois parties CM, MR, RN; or, ſi on veut que la droite PQ ne paſſe pas par le même point R, cette droite coupera donc la ſecante CN en un autre point quelconque *x*, & comme PQ eſt la même

que

que la perpendiculaire qu'on meneroit du point d'attouchement P sur la secante qui partant du point C, passeroit par le centre, (*N.* 293.) la droite seroit aussi divisée harmoniquement aux points C, x, N, & ses trois parties seroient CM, Mx, xN ; mais la premiere partie CM de ces trois, est la même que la premiere partie CM des trois précédentes ; donc les deux autres Mx, xN doivent être égales chacune à chacune aux deux autres MR, RN, & par conséquent le point R & le point x ne peuvent être différens & la droite PQ doit passer par le point R.

Nota. On peut prouver avec la même facilité l'inverse de cette Proposition, c'est-à-dire que *si par le point* R *on mene une corde quelconque* QP, *& que de ses extrêmités* P, Q *on mene deux tangentes* QC, PC, *ces tangentes se couperont en un point* C *de la ligne* XZ. Car si elles se coupoient en un point a en deçà ou en delà de RZ ; la secante aN menée du point a par le point R, seroit coupée harmoniquement par la circonférence & la droite PQ qui joint les points d'attouchement P, Q, & ses trois parties seroient aM, MR, RN. Or comme cette même secante aN couperoit XZ en quelque points C, & que la ligne CN seroit aussi coupée en trois parties harmoniquement CM, MR, RN, nous aurions deux lignes aN, CN coupées toutes les deux harmoniquement, & qui auroient deux parties MR, RN communes, & dont cependant les deux troisiémes aM, CM ne seroient pas égales ; ce qui est impossible : (*N.* 207.) donc, afin que aN soit divisée harmoniquement, en sorte que MR, RN soient deux de ses parties ; il faut nécessairement que aM soit égal à CM, & que les points a, C, ne soient qu'un même point de la ligne XZ.

304. PROPOSITION LXXIX. *Supposant encore la tangente* AB ; (Fig. 191.) *la secante* AD *qui passe par le centre & la perpendiculaire* BRH *données ; si l'on mene deux secantes inégales* AV, AN, *& qu'on joigne leurs points de divisions par des droites* TM, EL, NV ; *ces droites étant prolongées se couperont en un même point sur la perpendiculaire* BH *prolongée de part & d'autre.*

Les lignes TM, EL, NV ne sont pas paralelles entr'elles ; car les deux TM, NV seroient perpendiculaires sur la droite AD qui passe par le centre, à cause que EL est perpendiculaire sur AD ; d'où il suivroit que TM, NV seroient divisées chacune également par AD de même que leurs arcs ; & que par conséquent les secantes AV, AN seroient égales ; (*N.* 236.) ce qui est contre la supposition ; cela posé.

Puisque les secantes AN, AV sont divisées harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & qu'elles ont un point commun A, les droites TM, EL, NV qui joignent leurs autres points de division, sont paralelles entr'elles ou doivent se couper toutes en un même point lorsqu'on viendra à les prolonger; (*N.* 211.) or nous venons de voir qu'elles ne sont pas paralelles; donc elles se coupent en même point; mais cela ne peut se faire à moins que les deux TM, NV prolongées, ne coupent en un même point la ligne EL prolongée; donc, &c.

305. PROPOSITION LXXX. *Posant toujours que la tangente* AB (Fig. 192.), *la secante* AD *qui passe par le centre & la perpendiculaire* BH *soient données; si l'on prolonge* BH *de part & d'autre, & que d'un point quelconque* I *de ses prolongemens, on mene deux tangentes* IM, IV, *la ligne* VM *qui joint les points d'attouchement étant prolongée, passera par le point* A.

Je mene du point A une autre secante APQ; du point I, par le point P, où cette secante coupe le cercle, je mene la droite IPT qui est aussi une secante; enfin du point A, par le point T, je mene une secante ATN. Les deux secantes AQ, AN sont divisées harmoniquement par le cercle & par la droite BH, & comme elles ont un point commun A, & que les deux lignes TP, BH, qui joignent quatre de leurs points de division se coupent en un point I; la ligne droite NQ qui joint leurs extrêmités N, Q, doit passer par le même point I, cela posé. Les secantes IT, IN, sont coupées harmoniquement par le cercle & par la droite MV qui joint les points d'attouchement des tangentes IM, IV qui partent du même point I, (*N.* 316.) & les droites PQ, NT qui passent par quatre de leurs points, se coupent au point A; donc la droite VM qui passe par les points V, M, passe aussi par le point A.

Nota. On peut prouver très-facilement l'inverse de cette proposition; c'est-à-dire que *si des points* M, V *de la partie intérieure* MV *d'une secante* VA *qui passe par le point* A, *on mene deux tangentes, ces tangentes se couperont sur la perpendiculaire* BH *prolongée.* Car, supposons pour un moment que le point I où les tangentes VI, MI se coupent, ne soit point sur le prolongement de BH, je mene par ce point I une secante IPT qui coupe le cercle en P & T, & qui est coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite VM qui joint les points d'attouchement V, M. Du point A, par les points P & T, je mene deux autres secantes

AQ, AN, & par l'extrêmité N de la derniere AN, je mene la droite NI; les deux secantes IT, IN sont coupées harmoniquement par le cercle & la droite VMA qui joint les points d'attouchement V, M des tangentes IM, IV menées du même point I; & comme les droites VMA, NTA qui joignent quatre points de division de ces deux secantes IT, IN, passent par le point A, la ligne QP qui joint les points Q, P, passe aussi par le même point A; (*N.* 211.) ainsi les droites APQ, ATN étant deux secantes qui partent du point A, sont divisées harmoniquement par la circonférence & la droite BR; & à cause que les lignes TP, NQ qui joignent quatre de leurs points, passent par le point I, la ligne BH qui joint deux autres de leurs points doit passer aussi par le point I, & par conséquent le point I où les deux tangentes MI, VI se coupent, ne peut pas être hors de la droite BH prolongé, comme on le supposeroit.

306. PROPOSITION LXXXI. *Supposant encore la tangente* AB (*Fig.* 193. 194.) *la secante* AD *qui passe par le centre & la perpendiculaire* BH *données; si d'un point quelconque* M *de la partie extérieure* AS *de la secante prolongée, si l'on veut au-delà du point* A, *on mene une droite* MP *paralelle à la tangente* AB, *& qui se termine sur la droite* BH, *prolongée s'il le faut au-delà du point* B; *le quarré de cette droite* PM *sera toujours plus grand que le rectangle de la secante* MD *qu'elle coupe par sa partie extérieure* MS.

Du point B, je mene aux extrémités du diamétre SD, les droites BS, BD & du point P, les droites PV, PN paralelles à BS, BD; je prolonge AB, en Z & MP en X.

Les triangles semblables ABD, MPN donnent AB. AD :: MP. MN; & à cause des triangles semblables ABS, MPV, nous avons AB. AS :: MP. MV, multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons $\overline{AB}^2$. AD × AS :: $\overline{MP}^2$. MN × MV; mais $\overline{AB}^2$ = AD × AS (*N.* 271.); donc $\overline{MP}^2$ = MN × MV. Ainsi, il ne s'agit plus que de faire voir que MN × MV est plus grand que MD × MS, & premierement dans la Figure 193.

L'angle du segment ABS vaut la moitié de l'arc BS (*N.* 253.) & l'angle à la circonférence SBH vaut la moitié de l'arc BH (*N.* 252.) égal à l'arc SB, à cause du diamétre SD perpendiculaire sur la corde (*N.* 224.); donc ces deux angles sont égaux; or, l'angle ABQ est égal à son alterne BQP; donc les angles

QBP, BQP font égaux, & dans le triangle isoscele BQP, nous avons BP = QP. De même l'angle du segment ZBD est égal à l'angle à la circonférence HBD, & à cause que l'angle ZBD est égal à son alterne BXP, le triangle BXP est isoscele, & donne BP = XP, donc XP = QP; ainsi les trois lignes MQ, MP, MX étant en progression Arithmétique, à cause que leurs différences XP, QP sont égales, la premiere est plus petite par rapport à la seconde, que la seconde par rapport à la troisiéme (*N.* 216.), c'est-à-dire, MQ, MP < MP, MX; mais les triangles semblables MQS, MPV, donnent MQ. MP :: MS. MV, & dans les triangles semblables MPN, MXD, nous avons MP, MX :: MN, MD, mettant donc dans MQ, MP < MP, MX, la raison MS, MV, au lieu de son égale MQ, MP, & la raison MN, MD, au lieu de son égale MP, MX, nous aurons MS, MV < MN, MD; or, si ces quatre termes étoient en proportion, le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens; donc puisque MS est plus petit qu'il ne faut pour faire qu'il y ait proportion, le produit MS × MD des extrêmes, est plus petit que le produit MN × MV des moyens, c'est-à-dire, plus petit que le quarré de MP.

Dans la Figure 194, menant les droites BS, BD, PV, PN, comme ci-devant, nous trouverons par les mêmes raisonnemens $\overline{PM}^2$ = MV × MN, & il ne s'agira plus que de prouver que MV × VN est plus grand que MS × MD. Ce qu'on fera en prolongeant SB en X, & DB en Q, car les angles *a*BD, HBD étant égaux, comme on vient de voir, leurs opposés aux sommets QBA, QBP sont aussi égaux, & à cause que QBA est égal à son alterne BQP, le triangle BQP est isoscele, & donne PB = PQ. De même les angles ABS, SBH étant égaux, leurs opposés au sommet *a*BX, XBP le sont aussi, & à cause de l'angle *a*BX égal à son alterne BXP, le triangle BXP est isoscele, & donne PB = PX; donc PQ = PX, & les trois lignes MQ, MP, MX, sont en progression Arithmétique, ce qui donne MQ, MP < MP, MX, & le reste de la Démonstration s'achevera comme auparavant.

CHAPITRE VII.

De l'Inſcription des Polygones réguliers dans un Cercle, & de leur Circonſcription autour du Cercle.

307. Un Polygone régulier eſt *inſcrit* dans un cercle, lorſque tous ſes angles ſont à la circonférence de ce cercle; & il eſt *circonſcrit*, lorſque tous ſes côtés touchent la circonférence.

308. Probleme. *Inſcrire un triangle équilatéral dans un cercle* (Fig. 195.)

Je mene un diamétre BD, dont je coupe la moitié OD en deux également en R; par le point R, je mene une corde AC perpendiculaire ſur le diamétre, & des extrêmités A, C de cette corde, je mene à l'extrêmité la plus éloignée du diamétre les droites AB, BB, ce qui donne le triangle équilatéral ABC demandé.

Pour le prouver, je mene la corde DC; l'angle à la circonférence BCD étant droit (*N.* 252.) le triangle BCD eſt rectangle; & à cauſe de la perpendiculaire CR, nous avons RD. DC :: DC. DB (*N.* 170.); or, RD $= \frac{1}{4}$ DB par la conſtruction, donc $\frac{1}{4}$ DB. DC :: DC. DB, d'où l'on tire $\frac{1}{4}\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$, & tirant la racine quarrée, nous aurons $\frac{1}{2}$ DB $=$ DC, c'eſt-à-dire, DC eſt double de RD; mais les triangles ſemblables DRC, BRC donnent DR. DC :: RC. BC. Donc BC eſt double de RC, de même que CD eſt double de RD; or, AC eſt auſſi double de RC (*N.* 224.), donc BC $=$ AC, mais BC $=$ BA à cauſe de BD perpendiculaire ſur le milieu de AC (*N.* 56.); donc les trois côtés AB, BC, AC du triangle ABC ſont égaux.

309. Corollaire. *Le côté de l'Exagone inſcrit dans un cercle eſt égal au rayon.* L'arc ADC eſt coupé en deux également par le diamétre BD perpendiculaire ſur le côté AC du triangle équilatéral ABC inſcrit au cercle; ainſi l'arc DC eſt la ſixiéme partie de la circonférence, & la corde DC de cet arc eſt le côté de l'exagone qui feroit inſcrit au cercle. Or, nous venons de trouver DC $= \frac{1}{2}$ DB $=$ OD. Donc, &c.

310. COROLLAIRE. *Autour d'un cercle donné* ABC (Fig. 196.) *circonſcrire un triangle équilatéral.*

Je mene le diamétre que je prolonge de part & d'autre, faiſant RM = RO & AN = AO du point O, & avec le rayon ON, je décris un cercle NQMP; du point A, je mene la corde PQ perpendiculaire ſur MN, & des points P, Q je mene les droites PM, QM qui forment avec PQ le triangle demandé.

Car à cauſe de OA = NA, on démontrera comme ci-deſſus (*N.* 308.), que le triangle PQM eſt équilatéral & inſcrit au cercle PNQM; ainſi les cordes PQ, QM, MP étant égales, les perpendiculaires OA, OB, OC menées du centre O ſur ces cordes ſeront égales; or, la perpendiculaire OA eſt le rayon du cercle donné ABC, donc la circonférence de ce cercle paſſe par les autres points B, C, & les trois côtés PQ, QM, MP du triangle, touchent ce cercle aux trois points A, B, C.

311. PROBLEME. *Inſcrire un quarré dans un cercle & le circonſcrire autour du cercle* (*Fig.* 197.).

Je mene deux diamétres AC, BD qui ſe coupent à angles droits, & je joins leurs extrêmités par les droites AB, BC, CD, DA, qui forment le quarré inſcrit demandé; car ces quatre droites ſoutenant des arcs égaux ſont égales, & les angles ABC, BCD, &c. ſont chacun droits à cauſe qu'ils embraſſent chacun une demi-circonférence.

Par les extrêmités A, B, C, D des deux diamétres, je mene des tangentes, qui en s'entrecoupant, forment un quarré HMNR circonſcrit au cercle; car les droites HM, RN étant perpendiculaires ſur BD ſont paralelles à AC, & à cauſe qu'elles ſont compriſes entre les droites HR, MN perpendiculaires ſur AC, elles ſont égales à AC; par la même raiſon les droites HR, MN ſont paralelles & égales à BD; ainſi les quatre côtés HM, MN, &c. de la figure HMNR étant égaux entr'eux, & les angles qu'ils forment étant droits, cette figure eſt un quarré.

312. PROBLEME. *Inſcrire un exagone dans un cercle, & le circonſcrire autour d'un cercle* (Fig. 198.).

Je porte le rayon OA ſur la circonférence de A en B, de B en C, &c. & joignant les points de diviſion par les droites AB, BC, &c. J'ai l'exagone inſcrit ABCDEF, ce qui eſt évident, après ce qui a été dit ci-deſſus (*N.* 309.).

A tous les ſommets A, B, C, &c. des angles de l'exagone inſcrit, je mene des tangentes au cercle, & ces tangentes en

s'entrecoupant forment l'exagone circonſcrit GHLMNR ; car les cordes AB, AF, de même que leurs arcs étant égales, les angles de ſegment HAB, HBA, GAF, GFA, ſont tous égaux entr'eux, d'où il ſuit que les triangles iſoſceles FGA, AHB ſont parfaitement égaux, & par la même raiſon les autres triangles iſoſceles BLC, CMD, DNE, ERF ſont égaux entr'eux, & aux deux précédens FGA, AHB ; ainſi les côtés de la figure circonſcrite étant composés chacun de deux côtés égaux de ces triangles iſoſceles, ſont égaux entr'eux ; de même que les angles qu'ils forment, & partant la figure eſt un exagone circonſcrit.

313. *Remarque.* Lorſqu'un polygone eſt inſcrit dans un cercle, on peut toujours circonſcrire, à ce même cercle, un polygone ſemblable de la façon que nous venons de faire pour l'exagone. C'eſt pourquoi je n'en parlerai plus.

314. Proposition LXXXII. *Le quarré du côté du pentagone inſcrit dans un cercle eſt égal à la ſomme des quarrés du côté de l'exagone, & du côté du décagone inſcrits dans le même cercle.*

Soit AB (*Fig.* 199.) le côté du pentagone ; je diviſe ſon arc en deux également en C, & les cordes AC, CB, ſont égales chacune au côté du décagone ; je mene les rayons AO, BO, chacun deſquels eſt égal au côté de l'exagone : du centre O, je mene ſur AC la perpendiculaire OR qui diviſe l'arc AC, & ſa corde en deux également (*N.* 224.) ; ainſi menant SC, le triangle ASC eſt iſoſcele, & ſemblable au triangle iſoſcele ACB à cauſe de l'angle CAB commun ; donc AS. AC :: AC. AB, d'où je tire $AS \times AB = \overline{AC}^2$.

L'angle SOB embraſſe les trois quarts de l'arc du pentagone, & vaut par conſéquent 54 degrés ; car l'arc du pentagone en vaut 72 ; or, l'angle ABO étant l'un des angles ſur la baſe du pentagone, vaut auſſi 54 degrés ; donc le triangle SOB eſt iſoſcele & ſemblable au triangle OAB, à cauſe de l'angle commun SBO ; ainſi SB. BO :: BO. AB, d'où je tire $SB \times AB = \overline{BO}^2$, & ajoutant chaque membre de cette équation à chaque membre de la précedente $AS \times AB = \overline{AC}^2$, j'ai $AS \times AB + SB \times AB = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$; or, $AS \times AB + SB \times AB = AB \times \overline{AS + SB}$, & $AS + SB = AB$; donc $AB \times AB$ ou $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$.

315. Proposition LXXXIII. *Le côté* AB *du décagone inſcrit*

dans un cercle (Fig. 200.) *est égal à la mediane* OR *du rayon* OB *divisé en moyenne & extrême raison.*

Dans le décagone l'arc AB est la dixiéme partie de la circonférence, & vaut par conséquent 36 degrés; donc des extrêmités A, B menant les rayons AO, BO, l'angle AOB vaut 36 degrés, & les deux autres angles OAB, OBA du triangle isoscele OBA, valent chacun 72 degrés, & sont doubles de l'angle AOB du sommet; or, dans tout triangle isoscele dont chaque angle de la base est double de l'angle du sommet, la base AB est égale à la mediane du côté OB divisé en moyenne & extrême raison (*N.* 196.). Donc, &c.

316. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inscrire un décagone* (Fig. 201.).

Je mene un diamétre AB; du centre O j'éleve le rayon OC perpendiculaire sur AB, je coupe le rayon AO en deux également en R; du point R pris pour centre, & d'un rayon égal à la distance RC, je décris l'arc CH qui coupe le rayon OB en H, & la droite OH est le côté du décagone : ainsi en portant ce côté dix fois sur la circonférence, j'aurai le décagone.

Car par la construction, si je portois OH sur le rayon CO, de O en S, ce rayon seroit coupé en S en moyenne & extrême raison, & la droite SO seroit sa médiane (*N.* 190.), donc SO ou OH étant la médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raison, doit être le côté du décagone (*N.* 315.).

317. COROLLAIRE. *Toute ligne* AH *composée du côté* AO *de l'exagone, & du côté* OH *du décagone, est coupée en moyenne & extrême raison en* O.

Si je portois OH sur AO le rayon AO seroit coupé en moyenne & extrême raison, & OH seroit sa mediane; donc si à ce rayon AO, j'ajoute sa mediane la ligne entiére AH est encore coupée en moyenne & extrême raison (*N.* 191.).

318. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inscrire un pentagone* (Fig. 201.).

Je fais la même construction que j'ai faite dans le Problême précédent pour le décagone; & du point C au point H, je mene la droite CH qui est le côté du pentagone demandé.

Car le triangle rectangle COH donne $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OH}^2$ (*N.* 171.); mais CO est le côté de l'exagone, & OH est le côté du décagone; donc CH doit être le côté du pentagone (*N.* 314.).

319. PROBLEME. *Dans un cercle donné, inſcrire un pentadécagone, c'eſt-à-dire une figure de 15 côtés* (Fig. 202.).

J'inſcris d'abord un pentagone ABCDE, enſuite j'inſcris dans le même cercle un triangle équilatéral LDH; donc le ſommet D de l'un des angles ſoit le même que le ſommet D de l'un des angles du pentagone, & la corde AL eſt le côté du pentadécagone demandé; ce que je démontre ainſi:

Du point D, je mene le diamétre DM qui coupe le cercle; & les deux polygones chacun en deux également; ainſi le côté AB du pentagone, & le côté LH du triangle étant coupés chacun en deux également par DM, ſont perpendiculaires ſur DM, & paralelles entr'eux; donc AL = BH (*N. 263.*); or l'arc AB du pentagone étant de 72 degrés, ſa moitié AM eſt de 36; de même l'arc LMH du triangle étant de 120 degrés, ſa moitié LM eſt de 60, retranchant donc de l'arc LM, l'arc AM, le reſte AL ſera de 24 degrés; ainſi diviſant la valeur 360 de la circonférence entiere par 24, le quotient 15 fera voir que l'arc AL eſt contenu 15 fois dans la circonférence. Donc, &c.

320. *REMARQUE.* Si l'on coupe en deux parties égales les arcs des polygones qu'on vient de trouver, on aura des polygones qui auront un nombre de côtés doubles. Par exemple, le quarré donnera l'octogone; l'octogone donnera le polygone de 16 côtés; celui-ci donnera le polygone de 32 côtés, & ainſi des autres. Mais quant aux polygones de 7 côtés, de 9, de 11, &c. il faut néceſſairement avoir recours à la Géométrie compoſée, & ce que cette Géométrie nous enſeigne, n'eſt guéres facile à mettre en pratique. A la vérité quelques Auteurs nous donnent des Méthodes faciles qui ne ſont que des approximations; & d'autres nous apprennent à conſtruire des courbes nommées *Quadratrices*, par le moyen deſquelles, il ſemble qu'on peut aiſément inſcrire tel polygone que l'on voudra: Cependant, ſi l'on y prend garde de près, tout cela n'avance de rien, les approximations ſont toujours imparfaites, & les quadratrices ne pouvant être décrites que par pluſieurs points, ſont toujours peu exactes, à cauſe qu'il n'eſt pas poſſible de trouver abſolument tous leurs points. Ainſi, ce que je vois de plus ſûr dans ces occaſions, c'eſt de tâtonner juſqu'à ce qu'on ait trouvé exactement le polygone qu'on demande, ou de ſe ſervir du compas de proportion, ainſi que nous l'enſeignerons dans la ſuite, ce qui vaut encore mieux.

CHAPITRE VIII.

De la Trigonométrie, de la Longimétrie & du Nivellement.

321. LA *Trigonométrie* eſt la ſcience de connoître tous les côtés & les angles d'un triangle par la connoiſſance de quelques-unes de ces choſes.

322. Il faut obſerver que parmi les choſes connuës, il doit y avoir tout au moins un côté, car j'ai démontré (*N.* 101.) que deux ou pluſieurs triangles peuvent avoir les angles égaux chacun à chacun ſans avoir les côtés égaux.

323. Un angle aigu ABC étant donné (*Fig.* 203), ſon angle de ſuite ABE, ſe nomme *Complement* à deux droits de l'angle ABC, & l'angle DBA qui manque à l'angle ABC pour valoir un droit, ſe nomme *Complement* à l'angle ABC. Il faut prendre garde de ne pas confondre ces deux ſortes de complemens.

324. Le ſommet B de l'angle ABC étant au centre d'un cercle, la perpendiculaire AS tirée de l'extrêmité A de l'une de ſes jambes ſur l'autre BC, ſe nomme *Sinus droit*, ou ſimplement *Sinus* de l'angle ABC ou de l'arc AC, la partie SC, que cette perpendiculaire coupe du côté de la circonférence, eſt le *Sinus verſe*; le côté BA ou BC, eſt le *Sinus total*, ou le rayon, la perpendiculaire RC élevée à l'extrêmité C du rayon BC, juſqu'à la rencontre du rayon BA prolongé, ſe nomme la *Tangente*, & la droite BR eſt la *Secante*.

325. Il faut donc diſtinguer la *Secante* qu'on employe dans la Trigonométrie, d'avec celle dont nous avons parlé dans le Chapitre du Cercle; car l'une s'arrête au centre du cercle, & l'autre coupe la circonférence en deux points.

326. Si l'on prolonge le ſinus AS d'un angle ABC, juſqu'à ce qu'il coupe la circonférence en T, la corde AT ſera double du ſinus AS, à cauſe que la perpendiculaire BC menée du centre, la coupe en deux également, & ſon arc ACT ſera double de l'arc AC; ainſi l'on doit dire que *le ſinus* AS *d'un angle* ABC, *eſt la moitié de la corde* AT *qui ſoutient un arc double.*

327. De-là il ſuit 1°. que le ſinus de l'angle ABE complement a deux droits de l'angle ABC eſt le même que le ſinus de l'angle

ABC, car la corde AT ſoutient l'arc AET double de l'arc AE de l'angle ABE, & par conſéquent la moitié AS de cette corde eſt le ſinus de l'angle ABE. 2°. Que le ſinus de l'angle droit DBC eſt le rayon DB; car ce ſinus étant prolongé ſoutiendroit la demi-circonférence, laquelle eſt double de l'arc DC, que l'angle droit embraſſe.

328. Le ſinus de l'angle ABD complement à un droit de l'angle ABC étant la perpendiculaire AN (*N.* 324.), laquelle eſt paralelle & égale à BS, il eſt clair que ſi du rayon BC on retranche le ſinus verſe SC de l'angle ABC, le reſte BS ou AN ſera le ſinus du complement de l'angle ABC.

329. On a calculé les ſinus, tangentes & ſecantes de tous les degrés du quart de cercle, & de leurs minutes par des voyes aſſez ſimples & faciles qu'on trouve à la tête de toutes les Trigonométries, & dont il ſeroit inutile de parler ici. Or, comme on ne pouvoit faire ces calculs ſans employer la Régle de Trois qui donne ſouvent des fractions, ou l'extraction de la racine quarée qui ne peut pas toujours ſe faire exactement, on a ſuppoſé le rayon diviſé en dix millions de parties, afin de pouvoir négliger les fractions ou les reſtes, leſquels étant au-deſſous de l'unité, ne peuvent jamais valoir la dixiéme millioniéme partie du rayon, ce qui peut être compté pour rien: Ces calculs faits, on a diſpoſé en colonnes d'une part les ſinus, tangentes & ſecantes, depuis un degré juſqu'à quarante-cinq, en y joignant les ſinus, tangentes & ſecantes des minutes de chacun de ces degrés, & de l'autre, on a mis auſſi en colonnes les ſinus tangentes & ſecantes des complemens des degrés, depuis un juſqu'à quarante-cinq, en y joignant auſſi les ſinus tangentes & ſecantes de leurs minutes, ce qui eſt d'une grande utilité à cauſe qu'on a ſouvent beſoin des complemens.

Or, il faut obſerver que quoique les Meſures dont nous nous ſervons pour meſurer un rayon, un ſinus, &c. ſoient différentes de celles qu'on a employé en calculant les Tables des ſinus, tangentes & ſecantes, cela n'altére en rien leur rapport. Suppoſons par exemple, que le rayon étant diviſé en cent millions de parties, il ſe trouve une tangente qui n'en contienne que cinquante millions, & qui par conſéquent ne ſoit que la moitié du rayon, il eſt clair que ſi je diviſe le rayon & la tangente en pieds ou en pouces, le nombre de pieds que la tangente contiendra ne ſera que la moitié du nombre de pieds contenus dans le rayon. Ainſi

quand les Tables nous auront fait connoître le rapport de deux lignes, si nous connoissons la valeur de l'une des deux en toises, pieds ou pouces ; nous trouverons aisément la valeur de l'autre en toises, pieds ou pouces, par le moyen d'une simple regle de Trois. Par exemple, si la Table nous donne pour la tangente cinq millions, & que le rayon soit de dix toises ; je dirai comme dix millions valeur du rayon, selon les Tables, est à cinq millions valeur de la tangente, selon les mêmes Tables, ainsi 10 toises valeur du rayon en toises, est à un quatriéme terme qui sera la valeur de la tangente en toises, & ce quatriéme terme sera cinq toises, & ainsi des autres.

330. PROPOSITION LXXXIV. *Dans tout triangle* ABC (Fig. 204.) *les côtés sont entr'eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.*

L'angle ABC étant à la circonférence, vaut la moitié de l'arc ARC qu'il embrasse ; or, le côté AC opposé à l'angle ABC soutient l'arc entier ARC, ou le double de l'arc qui mesure l'angle ABC, donc la moitié du côté AC est le sinus de l'angle ABC. Par la même raison la moitié du côté BC est le sinus de l'angle opposé A, & la moitié du côté AB, est le sinus de l'angle opposé C ; or, les côtés AC, AB, BC sont entr'eux comme leurs moitiés ; donc ils sont entr'eux comme les sinus des angles qui leurs sont opposés.

331. PROPOSITION LXXXV. *Dans tout triangle scalene* ABC (Fig. 205.) *la somme de deux côtés* AB, BC *est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles* BAC, BCA *faits sur le troisiéme côté* AC, *est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles.*

Du sommet B pris pour centre, & avec un rayon égal au côté BC, qui est le plus grand des deux côtés AB, BC ; je décris un cercle, je prolonge le petit côté AB de part & d'autre jusqu'à la circonférence, ce qui donne AD égal à la somme AB plus BC des côtés AB, BC, & AE égal à la différence de ces mêmes côtés ; l'angle DBC externe au triangle ABC est égal à la somme des deux angles internes opposés BAC, BCA, & l'angle à la circonférence DEC, étant la moitié de l'angle au centre DBC, vaut par conséquent la moitié de la somme des angles BAC, BCA ; or, l'angle BAC externe au triangle ACE, vaut les deux internes opposés AEC, ACE, donc la différence de l'angle BAC à l'angle AEC est le petit angle ACE ; mais dans le triangle isoscele EBC, l'angle BEC étant égal à l'angle BCE, la diffé-

rence de l'angle BEC à l'angle BCA eſt encore le petit angle ACE ; donc puiſque l'angle BAC ſurpaſſe l'angle AEC du petit angle ACE, & que l'angle AEC ſurpaſſe l'angle BCA encore du petit angle ACE ; il s'enſuit que la différence des angles BAC, BCA eſt double de l'angle ACE, & que par conſéquent la moitié de cette différence eſt l'angle ACE.

Du point E pris pour centre, & avec la droite EC priſe pour rayon, je décris un arc CN, & je mene la tangente DC qui va aboutir à l'extrêmité de la droite ED, à cauſe que l'angle droit ECD doit embraſſer une demi-circonférence ; du point C pris pour centre, & avec la même droite EC priſe pour rayon, je décris l'arc EI, & je mene ſa tangente EF ; ainſi en prenant EC pour rayon, l'arc NC eſt la meſure de l'angle DEC, & la droite DC eſt ſa tangente ; de même l'arc EI eſt la meſure de l'angle ECI, & la droite EF eſt ſa tangente ; or, les tangentes DC, EF étant paralelles entr'elles à cauſe qu'elles ſont perpendiculaires ſur EC, l'angle FED eſt égal à ſon alterne EDC, mais l'angle FAE eſt égal à l'angle DAC qui lui eſt oppoſé ; donc les deux triangles DAC, FAE ſont ſemblables, & nous avons DA. AE :: DC. EF, c'eſt-à-dire, la ſomme des côtés AB, BC eſt à leur différence AE comme la tangente DC de la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA eſt à la tangente EF de la moitié de la différence de ces deux angles.

332. Proposition LXXXVI. *Dans tout triangle ſcalene* ABC (Fig. 206.) *le plus grand côté* AC *eſt à la ſomme* AB + BC *des deux autres, comme la difference de ces côtés eſt à la difference des ſegmens* AR, RC *du grand côté* AC *faits par la perpendiculaire* BR, *menée de l'angle oppoſé.*

Du point B pris pour centre, & avec le rayon BC, je décris le cercle CDSE, & je prolonge le côté AB juſqu'à la circonférence en D ; ainſi j'ai BD = BC = BS, & partant AB — SB ou AS eſt la différence des côtés AB, BC, & AB + BD ou AD en eſt la ſomme ; de même à cauſe de la corde EC diviſée en deux également par la perpendiculaire BR, j'ai ER = RC, & par conſéquent AR — ER ou AE eſt la différence des ſegmens AR, RC ; or, les ſecantes AC, AD donnent AC. AD :: AS. AE (*N.* 273.) ; donc le grand côté AC eſt à la ſomme AD des deux autres, comme leur différence AS eſt à la différence AE des ſegmens AR, RC.

De la Résolution des Triangles Rectangles.

333. PROBLEME. *Connoissant l'hypothenuse* AB *de 636 toises, & le côté* BC *de 386, trouver les angles* (Fig. 207.).

L'angle ACB opposé à l'hypothenuse étant droit, son sinus est égal au rayon & vaut, selon les Tables 10000000; or, l'hypothenuse AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle droit ACB opposé à l'hypothenuse est au sinus de l'angle CAB opposé au côté CB (*N.* 330.); je dis donc, par regle de Trois; 636 est à 386, comme 10000000 est à un quatriéme terme, lequel en faisant la régle est 6069135, & cherchant ce nombre dans la colonne des sinus marquée dans les Tables; je trouve qu'il appartient à l'angle de 37 degrés 22 minutes; ainsi l'angle CAB est de 37 degrés 22 minutes; or, cet angle joint à l'angle CBA vaut un droit ou 90 degrés. Retranchant donc de 90 degrés, 37 degrés 22 minutes, le reste 52 degrés 28 minutes, est la valeur de l'angle CBA.

334. *REMARQUE.* Pour abreger le calcul, on retranche du rayon, des sinus, des tangentes & des secantes, deux caractéres à droites en observant que si les deux caractéres qu'on retranche valent plus de 50, on ajoute 1 au dernier caractére restant; & en voici la raison.

Soit le sinus 3786486; supposons d'abord qu'il soit 3786400, tandis que son rayon est 10000000, il est clair qu'en retranchant deux zeros de part & d'autre, c'est comme si j'avois divisé l'un & l'autre par 100, & par conséquent le rapport du sinus au rayon est le même après la division qu'il l'étoit avant la division. Mais si le sinus est 3786486, & que je divise le sinus & le rayon par 100, le quotient du sinus sera 37864 avec un reste $\frac{86}{100}$, qui n'est pas bien éloigné de valoir 1. Ainsi, si je néglige ce reste, je néglige près d'une unité, & comme le rayon divisé par 100 est 100000, l'unité négligée est un cent milliéme du rayon, & quoique ce cent milliéme soit peu de chose; cependant pour plus d'exactitude, on fait fort bien d'ajouter une unité au reste du sinus, & de dire que ce sinus est 37865, plutôt que 37864; au contraire, si les deux derniers caractéres qu'on retranche du sinus, sont au-dessous de cinquante, alors ces deux caractéres valent moins qu'une demi-unité du rayon ou la moitié d'un cent milliéme, & par conséquent on peut négliger cette valeur sans crain-

dre que le rapport du rayon au finus en foit fenfiblement alteré.

335. PROBLEME. *Connoiffant le côté* AC *de* 456 *toifes, & l'angle oppofé* B *de* 33 *degrés* 48 *minutes, trouver l'hypothenufe* AB (Fig. 208.).

Je dis, comme le finus de l'angle B qui eft dans les Tables 55630 en retranchant deux caractéres eft au finus de l'angle droit C, qui eft 100000 en retranchant auffi deux caractéres, ainfi le côté AC de 456 toifes, eft à un quatriéme terme, qui eft l'hypothenufe, & la régle faite, je trouve que cette hypothenufe vaut 820 toifes.

336. PROBLEME. *Connoiffant le côté* AC *de* 456 *toifes, & l'angle* BAC *de* 56 *degrés* 12 *minutes, trouver le côté* BC *oppofé à cet angle* (Fig. 209.).

Du point A pris pour centre, & avec un intervalle égal au côté AC, je décris l'arc CD, ainfi prenant AC pour rayon, le côté CB eft la tangente de l'angle A; c'eft pourquoi prenant dans les Tables la valeur 149378 de la tangente de l'angle A: je dis, le rayon AC de 100000, felon les Tables, eft à la tangente CB de 149378, felon les mêmes Tables, comme le même rayon AC de 456 toifes, eft à un quatriéme terme qui fera la valeur en toifes de la tangente CB, & la regle faite, je trouve 681 pour la valeur de CB.

337. PROBLEME. *Connoiffant les côtés* AC, CB, *connoître les angles* (Fig. 210.).

Je décris l'arc CD, & par conféquent CB eft la tangente de l'angle A & AC eft le rayon; je dis donc, comme le rayon AC en toifes eft à la tangente CB auffi en toifes, ainfi le rayon AC de 100000, felon les Tables, eft à un quatriéme terme qui fera la tangente CB exprimée en parties égales à celles du rayon, & cherchant dans les Tables cette tangente, je trouverai à quel angle elle appartient.

338. PROBLEME. *Les côtés* AC, CB *étant connus, connoître l'hypothenufe* (Fig. 211.).

Je cherche d'abord l'angle A par le Problême précédent, après quoi, je trouverai l'hypothenufe AB, comme ci-deffus (*N.* 335.).

De la Résolution des Triangles Obliquangles, ou qui ne sont pas Rectangles.

339. PROBLEME. *Connoissant deux angles* C, B (Fig. 212.) *& le côté* AB *opposé à l'un des angles connus* C, *trouver les deux autres côtés.*

Je cherche dans les Tables les sinus des angles C & B, & je dis, comme le sinus de l'angle C opposé au côté connu AB, est au sinus de l'angle B opposé au côté inconnu AC; ainsi le côté AB est au côté AC, & faisant la régle, je trouve la valeur de AC.

Les angles C & B étant connus, le troisiéme est aussi connu, puisqu'il est le complement à deux droits de la somme des angles C & B; ainsi je dis, le sinus de l'angle C opposé au côté connu AB est au sinus de l'angle A opposé au côté inconnu BC, comme le côté AB est au côté cherché BC, &c.

340. PROBLEME. *Connoissant le côté* AB (Fig. 213.) *de 469 toises, le côté* BC *de 584, & l'angle compris* B *de 68 degrés, trouver les autres angles & le côté* AC.

Par la proposition 85 (*N.* 331.), la somme des côtés AB, BC est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles A, C est à la tangente de la moitié de leur différence. J'ajoute donc les deux côtés 469 & 584, & la somme est 1053, je retranche le petit du plus grand, & la différence est 115. Or, les trois angles pris ensemble étant de 180 degrés, si j'en retranche l'angle B = 68, le reste 112 est la somme des deux angles; j'en prens la moitié 56, & je trouve dans les Tables que la tangente de 56 degrés est 148256; je dis donc, la somme 1053 des côtés AB, BC est à leur différence 115, comme la tangente 148256 de la moitié de la somme des angles A, C est à un quatriéme terme, & la régle me donne 16196, qui est la tangente de 9 degrés 12 minutes; ainsi j'ai la tangente de la moitié de la différence des angles A, C; or, je sçais que la moitié de la somme de deux grandeurs inégales, plus la moitié de leur différence est égale à la grande, & que la moitié de la somme moins la moitié de la différence est égale à la petite (*Livre premier, N.* 200.); ajoutant donc à 56 degrés, 9 degrés 12 minutes, la somme 65 degrés 12 minutes, fera la valeur de l'angle A opposé au plus grand des deux côtés BC, & retranchant 9 degrés 12 minutes

minutes de 56, le reſte 46 degrés 48 minutes, ſera la valeur de l'angle C oppoſé à l'autre côté AB.

Les angles étant ainſi trouvés. Je dis : le ſinus de l'angle A eſt au côté CB qui lui eſt oppoſé, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté oppoſé AC.

341. PROBLEME. *Connoiſſant le côté* AC (Fig. 213.) *de* 348 *toiſes, le côté* AB *de* 236, *& le côté* BC *de* 314, *connoître les angles.*

Par la propoſition 86 (*N.* 332.), le plus grand côté AC eſt à la ſomme des deux autres AB, BC, comme la différence de ces côtés eſt à la différence des ſegmens AE, EC coupés par la perpendiculaire menée de l'angle B ſur le grand côté AC ; or, la ſomme des côtés AB, BC eſt 550, & leur différence eſt 78. Je dis donc : le côté AC = 348 eſt à la ſomme AB + BC = 550, comme la différence 78 eſt à un quatriéme terme, & la régle me donne 123 pour la différence des ſegmens AE, EC, mais la ſomme des ſegmens eſt 348, ajoutant donc la moitié de cette ſomme à la moitié de la différence 123, la ſomme 235 ½ ſera le grand ſegment EC, & retranchant de la moitié de la ſomme la moitié de la différence, le reſte 112 ½ ſera le petit ſegment.

Cela fait, j'ai deux triangles rectangles ABE, BEC dans chacun deſquels, je connois l'hypothenuſe & un côté ; ainſi je trouverai les angles de ces deux triangles, de même que ci-deſſus (*N.* 333.).

342. *REMARQUE.* Je n'entrerai pas dans un plus grand détail pour laiſſer aux Commençans le plaiſir de reſoudre eux-mêmes les autres cas qui peuvent ſe preſenter, mais je ferai obſerver que ſi au lieu des ſinus, des tangentes, &c. & des grandeurs exprimées en toiſes, on met leurs logarithmes, on abregera beaucoup le calcul, & la difficulté des opérations. En voici un exemple :

Soit le triangle rectangle ABC (*Fig.* 210) dont je connois l'angle BAC de 56 degrés 12 minutes, & le côté AC de 456 toiſes ; ſi je veux trouver l'autre côté, je dois faire cette proportion (*N.* 336.), le rayon AC de 100000, ſelon les Tables, eſt à la tangente CB de 149378, ſelon les mêmes Tables, comme le même rayon de 456 toiſes eſt à un quatriéme terme, & la régle me donne 681 toiſes pour la valeur de CB. Or, pour faire cette régle, il faut que je multiplie 149348 par 456, & que je diviſe le produit par 100000, ce qui ne laiſſe pas que de faire des opé-

rations un peu longues, & qui quelquefois deviennent fort ennuyantes.

Pour éviter donc cet embarras, je cherche le logarithme du rayon qui est 100000000, & celui de la tangente 149378, qui est 101742873; ces logarithmes, dans les Tables de M. Ozanam, se trouvent à côté de leurs sinus, & de leurs tangentes, ce qui est d'une grande commodité. Je cherche aussi dans la Table des logarithmes des nombres, laquelle se trouve à la suite des Tables des sinus, le logarithme 26589648 de 456; or, lorsqu'on opére par les logarithmes, il faut faire par l'addition & la soustraction, ce qu'on seroit obligé de faire par la multiplication & la division (*Livre premier*, *N.* 344.); c'est pourquoi, j'ajoute ensemble les deux derniers logarithmes que je viens de trouver, & leur somme est 128332521, j'en retranche le logarithme 100000000, & le reste est le logarithme 28332521, lequel étant cherché dans les Tables des logarithmes, appartient au nombre 681, & par conséquent le côté cherché BC est de 681 toises, & ainsi des autres.

De la Longimétrie.

343. La *Longimétrie* est la science de mesurer sur le terrein les longueurs, les hauteurs & les profondeurs accessibles ou inaccessibles; on employe pour cela les triangles, & on en mesure les angles par le moyen du *Graphométre*, qui est un demi-cercle, sur lequel tous les degrés sont marqués, & au centre duquel est une régle tournante, armée à ses extrémités de deux *Pinules* ou plaques de cuivre fenduës par le milieu, afin de pouvoir viser plus sûrement un objet; cet instrument est si commun qu'il seroit inutile d'en faire une plus ample description.

344. Comme on ne mesure ordinairement les longueurs sur le terrein que pour les rapporter sur le papier, & que le papier est toujours beaucoup plus petit que le terrein qu'on veut representer; il faut nécessairemenr se servir d'une mesure qui soit à proportion plus petite que celle que l'on a employé pour mesurer, & c'est ce qu'on fait par le moyen d'une *Echelle* ou d'une ligne droite que l'on divise & soudivise proportionnellement aux divisions & soudivisions de la mesure dont on s'est servi. Quand l'étendue que l'on veut representer, est extrêmement grande comme seroit une grande campagne, on se contente de diviser une ligne en grand nombre de parties égales qui representent des toi-

ſes, & l'on néglige les pieds, les pouces & les lignes, parce que ces ſoudiviſions ne ſçauroient être ſenſibles ſur le papier ; mais ſi ce qu'on veut repreſenter n'eſt pas d'une grande étendue, comme ſeroit le plan d'une maiſon, d'un jardin, &c. alors il ne faut point négliger les pieds, ni les pouces. &c. & pour une plus grande exactitude, on fera l'échelle ainſi qu'on va voir dans le Problême ſuivant.

345. PROBLEME. *Conſtruire une Echelle qui repreſente des toiſes, pieds, pouces & lignes* (Fig. 214.).

Je prens une ligne AB que je diviſe en parties égales, par exemple, en 4, qui repreſentent quatre toiſes; je diviſe la quatriéme IIIB en 6 parties égales, qui repreſentent des pieds, car la toiſe contient 6 pieds; je conſtruis ſur AB un rectangle ABEH, en lui donnant une hauteur AH à volonté. De tous les points de diviſion de la ligne AB, je mene des paralelles à la ligne AH, & par cette conſtruction il ſe trouve ſur la quatriéme toiſe IIIB ſix petits rectangles tous égaux. Je mene la diagonale IIIR du premier de ces rectangles, & diviſant ſa hauteur IIIN en douze parties égales, je mene par les points de diviſions des paralelles à AB, ainſi le triangle IIINR étant coupé par 12 baſes paralelles, c'eſt comme ſi l'on avoit douze triangles ſemblables qui auroient leurs ſommets au point III, & qui par conſéquent auroient leurs baſes proportionnelles à leurs hauteurs ; or, les hauteurs ſont 1. 2. 3. 4, &c. juſqu'à 12, donc la premiere baſe du côté du ſommet eſt 1 ; la ſeconde eſt 2, la troiſiéme eſt 3, & ainſi de ſuite, juſqu'à la derniere NR qui eſt douze ; or, NR vaut un pied, & par conſéquent douze pouces, donc la premiere baſe du côté du ſommet vaut un pouce, la ſeconde en vaut deux, la troiſiéme en vaut trois, &c. Que ſi je veux repréſenter des lignes, je prolonge HE en S juſqu'à ce que ES ſoit de la grandeur d'un pouce, c'eſt-à-dire de la grandeur de la premiere baſe des douze triangles précédens, & du point S menant la droite SB, j'ai un autre triangle ESB, lequel en prolongeant les paralelles à AB ſe trouvera coupé par 12 autres baſes paralelles, & comme un pouce vaut 12 lignes ; on prouvera, comme ci-deſſus, que la premiere des baſes du côté du ſommet B vaut une ligne, que la ſeconde en vaut deux, &c.

Cette Echelle étant conſtruite, ſi je veux prendre, par exemple, 2 toiſes trois pieds, quatre pouces. Je mets la pointe du compas ſur le point I de la droite AB, & je l'ouvre juſqu'à ce

que l'autre pointe tombe sur le point 3 marqué sur la quatriéme toise IIIB ; ainsi j'ai 2 toises 3 pieds ; je porte le compas ainsi ouvert, de sorte que l'une de ses pointes tombe sur le nombre 4 marqué sur la ligne IIIN, & que l'autre tombe sur quelque point V de la ligne 4V, & fixant la pointe en V, j'ouvre le compas jusqu'à ce que l'autre pointe tombe en X, & j'ai la grandeur VX qui vaut 2 toises 3 pieds 4 pouces, & ainsi des autres.

346. Corollaire. Il est aisé de voir que par le moyen d'une Echelle on peut représenter sur le papier telle longueur, & telle étendue de terrein que l'on voudra, ce qui se fait en réduisant cette étendue en triangles, & transportant ensuite ces triangles sur le papier. Car supposons que les cotés d'un triangle que j'ai mesuré sur le terrein soient l'un de deux toises, l'autre de 3, & le troisiéme de 4, si je prens sur mon Echelle trois grandeurs, dont l'une vaille 2 parties ou toises de cette Echelle, l'autre 3, & la troisiéme 4, & qu'avec ces trois côtés, je décrive un triangle, ce triangle sera semblable à celui du terrein, puisque les côtés du triangle mesuré sur le terrein seront entr'eux comme les côtés du triangle dessiné sur le papier, & ainsi des autres.

347. Probleme. *Mesurer une longueur qui n'est accessible que par l'une de ses extrémités.*

Soit la muraille ABCD (*Fig.* 215.) dont on ne peut approcher que du côté de A, je prens sur le terrein deux points, dont l'un R soit en ligne droite avec les points A, B de la muraille, & l'autre S soit hors de l'alignement & assez écarté de R ; je pose mon Graphométre en S, ensorte que le plan de l'instrument soit horizontal ; je vise en R, où je fais mettre un piquet, & visant ensuite à l'extrêmité de la muraille en M, j'écris le nombre de degrés que ces deux rayons visuels embrassent. Je me transporte en R, en mesurant la distance SR, & posant le Graphométre en R, je vise en S & en M, & j'écris le nombre de degrés compris par les deux rayons visuels. J'ai donc un triangle, dans lequel je connois la base RS, & les deux angles sur la base, donc l'angle au sommet est aussi connu, à cause qu'il est le complement des deux angles sur la base, & par conséquent je n'ai qu'à dire : le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle S, comme la base RS est au côté RB, & ce côté étant connu, si j'en retranche la distance RA, le reste AB sera la longueur cherchée de la muraille.

Si je ne veux point employer la Trigonométrie, je fais une

Echelle, & par fon moyen, je tranfporte fur le papier la bafe RS; enfuite avec un *Rapporteur* ou petit demi-cercle gradué, je fais en R & en S les angles que j'ai trouvé fur le terrein, ce qui me donne le petit triangle *rbs* femblable au triangle RBS, je retranche de *rb* la valeur *ra* de RA, & portant le refte *ab* fur mon Echelle, je trouve la valeur de la longueur de la muraille.

Si je n'ai point de Graphométre, ou que je veuille m'en paffer. Je prens fur l'alignement RS, une partie RZ de quatre toifes ou de cinq, &c. & une partie SV égale à RZ; de même fur RB, je prens RX = RZ, & fur SB je prens ST = SV; je mefure XZ, & VT, & par conféquent je connois les côtés des deux triangles ZRX, VST; je tranfporte fur le papier la bafe RS par le moyen de mon Echelle, je prens fur *rs* la partie *rz* & la partie *su*, chacune de quatre toifes de mon échelle; enfuite avec *rz*, & deux autres lignes *rx*, *zx* qui contiennent chacune autant de toifes de mon Echelle que les droites RX, ZX en contiennent fur le terrein, je conftruis le triangle *rzx* qui fe trouve femblable au triangle RZX; je fais de la même façon le triangle *ust*, femblable au triangle VST, & prolongeant les côtés *rx*, *st* jufqu'à ce qu'ils fe coupent en *b*, le triangle *rbs* eft femblable au triangle RBS, puifque les angles *r*, *s* font égaux chacun à chacun aux angles R, S, ainfi retranchant de *rb* la droite *ra* d'un même nombre de toifes que RA, le refte *ab* porté fur mon Echelle donne le nombre de toifes de la muraille AB.

Cette derniere méthode me paroît la plus commode, nonfeulement parce qu'elle difpenfe d'avoir des inftrumens; mais encore, parce qu'on n'eft point obligé de mefurer les angles qu'il n'eft pas toujours aifé de prendre avec la derniere exactitude.

548. *Remarque.* J'ai dit qu'il falloit que le plan du Graphometre fût horizontal, car comme cet inftrument eft toujours élevé fur un piquet au-deffus du terrein; il eft vifible que fi l'on vifoit au pied de la muraille, les rayons vifuels feroient plus longs que les diftances SB, RB, & que les angles changeroient; c'eft pourquoi s'il falloit vifer néceffairement en B, comme lorfqu'il s'agit de mefurer une longueur fans hauteur, on feroit mettre fur l'alignement du rayon vifuel, quelques piquets; après quoi remettant l'inftrument dans fa pofition horizontale, on viferoit felon cet alignement, & felon l'alignement RS pour mefurer l'angle fait en S, & il faudroit faire la même chofe en R. On fe peut tromper fouvent faute de faire attention à ceci.

349. PROBLEME. *Mesurer une longueur* AB *inaccessible de toutes parts* (Fig. 216.).

Je prens une base RS sur le terrein; du point S je vise en R, en A, en B, & je mesure les angles RSA, ASB; du point R je vise en S, en B & en A, & je mesure les angles SRB, BRA; ainsi dans le triangle RAS, la base RS & les angles sur la base, étant connus, la Trigonométrie me fera connoître aisément les côtés RA, AS, & je connoîtrai de la même façon les côtés RB, SB du triangle RBS, & par conséquent dans le triangle ARB, les côtés AR, RB étant connus de même que l'angle compris ARB, il sera facile de connoitre la base AB (*N.* 340.).

Sans trigonométrie, je transporte la base RS sur le papier, & les angles ARS, BRS, BSR, ASB; ce qui me donne les triangles ARS, BRS semblables à ceux du terrain, après quoi, menant la ligne AB, je connois par mon échelle la valeur de cette ligne.

Sans instrument, je fais sur RS transporté sur le papier, des triangles ARS, BRS semblables aux triangles qui sont sur le terrain en employant la troisiéme méthode ci-dessus, (*N.* 347.) & je trouve AB de même qu'auparavant.

350. PROBLEME. *Mesurer une hauteur accessible ou inaccessible* (Fig. 217.).

Je prens un point R dans la campagne, & mettant le Graphometre dans une situation perpendiculaire à l'horison, en sorte que son diamétre soit horizontal; je vise par le diametre au point M, & tournant la regle, je vise au sommet B, & je mesure l'angle BHM. Supposant donc que je puisse approcher de la hauteur AB, j'ai un triangle HMB dans lequel je connois le côté HM & l'angle aigu BHM, & par conséquent l'autre angle HBM m'est aussi connu d'où je connoîtrai aisément le côté BM, (*N.* 336.) & ajoûtant à ce côté la hauteur HR ou MA de l'instrument, j'aurai la valeur de BA.

Si je dois agir sans Graphometre, je plante un piquet TS entre R & A à trois ou quatre toises de distance, & visant horizontalement en M, & ensuite en B, j'observe les points N, S ou les rayons visuels coupent le piquet TS, & je mesure NS; je porte HM sur un papier, par le moyen de mon échelle; je prens sur cette ligne une partie égale à la distance RT ou HN, & j'éleve en N la perpendiculaire NS égale à la valeur que j'ai trouvée sur le piquet, après quoi je mene HSB qui coupe la perpendiculaire MB en B,

& portant MB sur l'échelle, je trouve sa valeur, à laquelle ajoutant la valeur de MA, j'ai la hauteur entiere AB.

Si le pied de la hauteur AB n'est pas accessible, je prens un autre point Z qui soit en ligne droite avec les points A, R, & après avoir fait en R les opérations qu'on vient de dire, je porte le graphometre en Z, & visant en M, puis en B, je mesure l'angle BFM & la base FH; or l'angle FHB étant le complement à deux droits de l'angle BHM, est aussi connu; donc, dans le triangle BFH dont la base & les deux angles sur la base sont donnés, je puis aisément connoître le côté BH, & par le moyen de ce côté BH & de l'angle aigu BHM; je puis cônnoître aussi le côté BM, &c.

On peut aisément se servir de la troisiéme méthode ci-dessus, pour ce cas ci, de même que pour les précédents.

351. PROBLEME. *Mener une ligne paralelle à une ligne* AB *inaccessible* (Fig. 218.).

Je cherche la longueur AB ainsi que ci-dessus, (*N.* 349.) & & faisant en R l'angle VRO égal à l'angle RAB que j'ai connu par le moyen du triangle RAB; la ligne RO est la paralelle demandée, à cause que les angles VRO, RAB du même côté sont égaux.

Si je ne me sers point d'instrument, je transporte sur le papier, la base RS & les triangles RAS, RBS; je mene ensuite la droite AB, & du point R la droite RO paralelle à AB; je prens sur RO & RS les parties RY, RT égales entr'elles, & de quatre ou cinq toises chacune, & je mesure par le moyen de mon échelle, la droite TY; je prens sur le terrain la partie RT de quatre toises, & mettant un piquet en R & un autre en T ausquels j'attache des cordeaux; je fais le cordeau RY de quatre toises, & le cordeau TY égal au nombre de toises que j'ai trouvé pour la valeur de TY; je tens les deux cordeaux jusqu'à ce que leurs extrémités se touchent en Y, & le triangle RYT est semblable au triangle RYT, sur le papier; ainsi RY sur le papier étant paralelle à AB, la même RY sur le terrain sera aussi paralelle à AB.

352. PROBLEME. *Lever le plan d'une grande Campagne* (Fig. 219.).

Je prens une base AB, d'où j'observe plusieurs points tels que C, D, E, H, &c. ausquels je vise par les extrêmités AB de ma base; ainsi je puis connoître aisément les distances CD, DE, HG, GF de tous les points qui sont à gauche ou à droite de ma

base, & leurs distances aux extrêmités de la base; c'est pourquoi j'aurai les positions de tous ces points. Quand au point L qui est en ligne droite avec la base AB, je prens une autre base AM, & de ses extrêmités A, M, je vise aux points C, L, & par conséquent je connoîtrai comme ci-dessus la droite LC, la droite LM, &c. ce qui me donnera la position du point L; & je ferois la même chose s'il se trouvoit du côté de B un point qui fût en ligne droite avec AB; tout ceci est si facile qu'il suffit d'en indiquer les voyes.

353. PROBLEME. *Lever le plan d'un endroit fermé dans lequel on ne sauroit entrer* (Fig. 220.).

Je mesure le côté AB, & le prolongeant ensuite en R, je mesure l'angle extérieur RBC, & le côté BC; ce qui me donne la position des deux côtés AB, BC; je prolonge BC en S, & je mesure l'angle SCD & le côté CD; ce qui me donne la position CD, & j'acheve le reste de la même façon.

Comme la muraille BC pourroit empêcher de prendre l'angle RBC avec le graphometre, il faut, sur le prolongement BRN, prendre un point R, d'où l'on menera une droite RH paralelle à BC, & l'on mesurera l'angle NRH qui est égal à l'angle RBC, & ainsi des autres.

Si je veux agir sans instrument, je prens sur le prolongement BR & sur le côté BC les parties BP, BM de la valeur d'environ quatre ou cinq toises; je mesure la droite MP, & transportant le tout sur le papier, par le moyen de mon échelle; j'ai la position des deux côtés AB, BC, & je fais la même chose à l'égard des autres côtés.

354. PROBLEME. *Lever le plan d'un lieu hors duquel on ne peut sortir, & dans le milieu duquel on ne sauroit pénétrer* (Fig. 221.).

Je mesure les côtés EA, AB & l'angle compris A, & le tout étant transporté sur le papier, j'ai la position des deux côtés EA, AB, & ainsi des autres.

Du Nivellement.

355. Une ligne droite est dite *de Niveau*, lorsque tous ses points sont également éloignés du centre de la terre; & comme la figure de la Terre approche beaucoup de la figure Sphérique; il s'ensuit qu'une ligne de niveau est une ligne circulaire.

356. Si

356. Si l'on plante à plomb sur la surface de la terre, un piquet AO (*Fig.* 222.) à l'extrêmité duquel on ait mis une lunette ou une regle 1, 5, qui lui soit perpendiculaire, & qu'on vienne à travers la lunette ou par les pinules mises aux extrêmités de la regle, un objet éloigné D; le rayon visuel AD sera tangente de la ligne de niveau AC, & s'en écartera d'autant plus qu'il sera plus long; cependant comme cette ligne AD nous paroît horizontale, on la nomme ligne de *Niveau apparent*, & on la prend même pour la ligne de vrai niveau AB, lorsque sa longueur AD n'est pas au-dessus de 100 ou de 110, parce que la circonférence de la terre étant extrêmement grande à l'égard de 100 ou 110 toises, le haussement BD du point D du niveau apparent au-dessus de B n'est pas sensible; mais lorsque AD devient plus longue, la différence BD commencera à se faire sentir, & l'on doit nécessairement la corriger comme on verra bien-tôt.

357. Le niveau dont on se sert le plus communément, lorsqu'il ne s'agit que d'une distance de 100 ou 110 toises, est le niveau d'eau; il est composé d'un tuyau de fer blanc ABCD (*Fig.* 223.) recourbé à ses extrêmités, à chacune desquelles on met un autre petit tuyau de verre. Au milieu O, est un autre tuyau de fer blanc qui lui est perpendiculaire & dans lequel on enchasse un piquet qu'on plante à plomb sur le terrein. Quand on veut se servir de cet instrument, on le remplit d'eau, & alors la surface d'eau RS qui paroît à travers le tuyau de verre mis en A, se met de niveau avec la surface d'eau TX qui paroit en D; l'expérience nous apprend que les liquides qui agissent librement, se mettent toujours de niveau; ainsi, si l'on vise de R en X, le rayon visuel R aura ses extrêmités R, X de niveau, & si l'on vise en Z, la ligne RZ sera une ligne de niveau apparent.

358. Les autres niveaux dont on se sert pour les distances plus grandes que 100 ou 110, ne différent presque de celui-ci, qu'en ce qu'on employe des verres de lunette au lieu d'eau, pour voir plus distinctement les objets; on en trouve les descriptions dans le Traité de Nivellement de Mr. *Picard* mis au jour par Mr. *de la Hire*, & dans celui de *Bullet*.

359. Le Nivellement se nomme simple lorsqu'il peut se faire d'un seul coup de niveau, & on le nomme composé lorsqu'il est nécessaire de donner plusieurs coups de niveau pour parvenir à ce qu'on cherche.

360. PROBLEME. *Deux points* A, B (Fig. 224.) *étant donnés sur*

le terrain, trouver si ces deux points sont de niveau, ou lequel des deux est plus éloigné du centre de la terre, & de combien.

Supposons d'abord que la distance AB ne soit pas au-dessus de 100 ou 110 toises, je mets le niveau en A, & j'envoye en B un homme à qui je donne une double toise qu'il doit mettre à plomb en B, & un carton sur lequel est une grande ligne noire, & je lui ordonne de faire glisser ce carton le long de la double toise, ensorte que la ligne noire soit toujours perpendiculaire sur la toise. Je vise par les surfaces R, S de l'eau, & lorsque je m'apperçois que la ligne noire du carton passe par l'extrêmité T du rayon visuel RST, je fais signe à mon aide de s'arrêter, afin qu'il mesure la hauteur TB, & je mesure en même tems la hauteur VA du rayon visuel. J'ordonne a mon Aide de revenir, & si la hauteur TB qu'il a trouvée se trouve égal à la mienne AV, les deux points A, B sont de niveau; car les points V, T étant également éloignés du centre de la terre; si de ces distances égales je retranche les parties égales VA, TB, les points AB seront aussi également éloignés du même centre; que si la hauteur TB est moindre que la hauteur VA, je retranche TB de VA, & le reste HA fait voir que le point A est plus proche du centre de la terre que le point B de la quantité HA; & il est aisé de voir ce qu'il faudroit faire si TB étoit plus grand que VA.

Si la distance AB (*Fig.* 225.) est au-dessus de 100 toises, sans être au-dessus de 200; je coupe cette distance en deux parties égales AC, CB, & mettant le niveau en C; je vise d'abord du point R par le point S au point T; ensuite je vise du point S par le point H, & si je trouve que les deux hauteurs AH, BT soient égales, les points AB seront de niveau; mais si l'une est plus grande que l'autre, je retranche la moindre de la plus grande, & le reste me fait voir de combien l'un des points est plus élevé que l'autre, ou de combien il est plus éloigné du centre de la terre.

Que si la distance AM est au-dessus de 200 toises, je la coupe en parties égales, dont chacune ne soit pas au-dessus de 100 : par exemple, en trois AC, CB, BM, puis mettant mon niveau en C, je nivelle les deux points A, B, après quoi mettant le niveau en B, j'éleve les points B, M & ainsi des autres.

361. *Remarque.* Cette méthode est excellente pour se passer du calcul qu'il faut nécessairement faire lorsqu'il est question de corriger l'erreur des coups de niveau trop étendus; mais comme

elle oblige à multiplier les opérations ; nous allons voir de quelle maniere se doivent faire les corrections dont nous venons de parler.

362. PROBLEME. *Corriger les erreurs du Niveau apparent.*

Supposons que le cercle ADI (*Fig.* 226.) représente la surface de la terre, & que la distance AD des deux points A, D qu'on veut niveler, soit de 500 toises, le niveau apparent AB sera la tangente, & la droite BOI menée par le centre, sera la secante; ainsi nous aurons BD. BA :: BA. BI ; (*N.* 271.) or, la partie DB de la secante étant extrêmement petite, à l'égard du diamétre DI de la terre, on ne peut la négliger; & par conséquent DB. BA :: BA. DI, d'où je tire $DB \times DI = \overline{BA}^2$ & $DB = \frac{\overline{BA}^2}{DI}$; c'est-à-dire que si on divise le quarré de la distance AB par le diametre de la terre, le quotient sera le haussement du niveau apparent audessus du vrai.

Or, selon Messieurs *Picard* & *de la Hire*, le diamétre de la Terre est de 653894 toises ; faisant donc le quarré 250000 de la distance BA = 500 toises, & le divisant par 653894, je trouve 2 pouces 9 lignes pour le haussement BD, ainsi après avoir nivelé à l'ordinaire, je dois retrancher 2 pouces 9 lignes de la hauteur que je trouve du côté de B lorsque je vise de A en B.

363 REMARQUE. Quoique cette méthode ne paroisse pas de la derniere exactitude, cependant elle est extrêmement juste ; car si au quarré de AB on ajoûte le quarré de AO, ces deux quarrés ensemble seront égaux au quarré de l'hypothénuse BO, & tirant la racine quarrée, on aura la valeur de BO, de laquelle retranchant DO = AO, on trouvera que la valeur de BD est effectivement 2 pouces 9 lignes, comme ci-dessus.

364. COROLLAIRE. *Les haussemens* BD, EH &c. *de différents points* B, E, &c. *du Niveau apparent, sont comme les quarrés de leurs distances* AB, AE &c. *au point* A *où se fait le nivellement.*

Nous avons $BD = \frac{\overline{AB}^2}{DI}$ (*N.* 362.) & par la même raison $EH = \frac{\overline{AE}^2}{DI}$; donc nous avons BD. EH :: $\frac{\overline{AB}^2}{DI}$. $\frac{\overline{AE}^2}{DI}$; or, les deux derniers termes étant divisés par la même grandeur DI, sont entre eux comme s'ils n'étoient pas divisés ; donc BD. EH :: $\overline{AB}^2$. $\overline{AE}^2$.

165. Corollaire II. *Connoissant donc le haussement* BD *d'un point* B *de niveau apparent, on peut connoître les haussemens de tous les autres points* E, &c. *de ce niveau dont on connoît les distances* AE, &c.

Car je n'ai qu'à dire par regle de Trois, comme le quarré de AB est au quarré de AE ; ainsi le haussement connu BD est à un quatriéme terme qui sera le haussement cherché EH ; & ainsi des autres.

C'est de cette maniere que Mr. *Picard* a calculé les haussemens des points de niveau apparent au-dessus du vrai niveau, depuis la distance de 50 toises, jusqu'à celle de 4000.

Table des Haussemens du Niveau apparent.

Distances.	*Haussemens.*			*Distances.*	*Haussemens.*		
Toises.	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*	*Toises.*	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*
50	0	0	$\frac{1}{3}$	750	0	6	3
100	0	0	$1\frac{1}{3}$	800	0	7	1
150	0	0	3	850	0	7	$11\frac{1}{2}$
200	0	0	$5\frac{1}{3}$	900	0	8	11
250	0	0	$8\frac{1}{3}$	950	0	10	0
300	0	1	0	1000	0	11	0
350	0	1	$4\frac{1}{3}$	1250	1	5	$2\frac{1}{2}$
400	0	1	$9\frac{1}{3}$	1500	2	0	9
450	0	2	3	1750	2	9	$8\frac{1}{2}$
500	0	2	9	2000	3	8	0
550	0	3	6	2500	5	8	9
600	0	4	0	3000	8	3	0
650	0	4	8	3500	11	2	9
700	0	5	4	4000	14	8	0

366. Probleme. *Niveler deux termes dont on ne connoît pas la distance.*

Je mets le niveau en A (*Fig.* 227.) & je vise en B ; je transporte le niveau en B & je vise en A. Je mesure les hauteurs CA, SB ; j'en retranche de part & d'autre la hauteur AR ou BT de l'instrument, & si les restes CR, ST sont égaux, je dis que les points A, B sont de niveau ; car le haussement du niveau apparent, lorsque je vise de A en B, est le même que le haussement lorsque je vise de B en A ; donc les points C, S doivent être également éloignés du centre de la terre ; & par conséquent à cause

de CA = SB, les points A, B en doivent être aussi également éloignés.

Si les restes ST, CR (*Fig.* 228.) sont inégaux, je retranche le moindre CR du plus grand ST, & la moitié du reste marque de de combien le point A est au-dessus du niveau du point B; car supposons que le point A se trouvât en un point F qui fût de niveau avec le point B; le niveau au lieu d'être en R, seroit en X, & les hauteurs LT, CX seroient égales; or, le point A venant à s'élever, le niveau s'éleve aussi de X en R; ce qui fait augmenter la hauteur LT de la quantité LS; & de l'autre côté, la hauteur CX diminuë d'une quantité égale à LS; ainsi CR = LT — LS; retranchant donc de la hauteur ST, la hauteur CR ou LT — LS, le reste ST — LT + LS est égal à 2LS ou à deux fois la hauteur SL ou AF du point A au-dessus du point F; donc la moitié de ce reste est la hauteur AF.

Et il ne faut pas dire que la hauteur AF ou RX n'est pas égale à la hauteur SL, à cause que les lignes RF, SB ne sont pas paralelles, puisqu'elles vont aboutir au centre de la terre; la distance des points F, B au centre de la terre étant extrêmement grande à l'égard des lignes RF, SB & de leur distance FB qui est aussi très-petite par rapport à la circonférence de la terre; les deux lignes FR, SB peuvent passer pour paralelles; ce qui rend les parties RX, SL sensiblement égales.

Enfin, si je trouve d'une part la hauteur SB (*Fig.* 229.) plus grande que la hauteur BT, & de l'autre, la hauteur AX moindre que la hauteur AR du même niveau; j'ajoûte l'excédent ST au défaut RX, & la moitié de la somme est la hauteur du point A au-dessus de niveau du point B; car supposons que le point A s'abbaisse en F où il soit du niveau avec le point B, le niveau au lieu d'être en R, descendra en V, & les hauteurs HT, XV seront égales. Or, le niveau montant en R, la hauteur HT augmente d'une partie SH égale à AF, & le point X au lieu d'être au-dessus du niveau, comme il étoit auparavant, se trouve au-dessous, en sorte que la partie XV dont il surpassoit le niveau jointe à la partie RX dont il en est surpassé, sont ensemble égales à SH; donc RX = SH — HT; & par conséquent ajoûtant ST ou SH + HT avec RX ou SH — HT, la somme 2SH est le double de SH ou de la hauteur AF du point A au-dessus du point B.

Cette méthode est excellente pour niveler des termes dont il seroit trop embarassant de trouver la distance.

367. PROBLEME. *Niveler deux termes* A, R (Fig. 230.) *entre lesquels il se trouve des hauteurs & des descentes.*

Je donne plusieurs coups de niveau en montant de A en S, puis en descendant de S en X; ensuite en remontant de X en Z, & enfin en redescendant de Z en R; je fais une colonne de toutes les hauteurs que j'ai trouvées en montant de A en S & de X en Z, & une colonne de celles que j'ai trouvées en descendant de S en X & de Z en R; puis faisant les sommes de chacune de ces colonnes, je retranche la petite de la grande, & le reste marque la hauteur du point A au-dessus du point R; ce qui n'a pas besoin de démonstration.

CHAPITRE IX.

De la Planimétrie ou Mesure des Surfaces planes, & de leur rapport entr'elles.

368. NOus nommerons *Elémens* d'une surface plane les lignes infiniment proches dont on conçoit qu'elle est composée; toute ligne CR (*Fig.* 231.) qui coupera perpendiculairement tous les Eléments, sera la ligne qui exprimera leur multitude ou la somme de leur épaisseur, ou leur épaisseur totale.

369. PROPOSITION LXXXVII. *Les paralellogrammes* ABCD, EBCF (Fig. 232.) *qui ont la même base* BC *& qui sont entre deux paralelles* AF, BH, *sont égaux entr'eux.*

A cause des paralellogrammes, nous avons AB = DC, BE = CF, & AD = EF; ajoûtant donc à ces deux dernieres, la partie DE, nous aurons AE = DF; donc les deux triangles AEB, DCF ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux; (*N.* 100.) je retranche de part & d'autre le petit triangle DOE, & j'ai ADOB = OEFC, & ajoûtant de part & d'autre le petit triangle BOC, je trouve ABCD = EBCF; donc, &c.

370. COROLLAIRE Ier. *Les paralellogrammes* ABCD, EMHF *qui sont entre deux paralelles* AF, BH, *& qui ont les bases égales* BC, HM, *sont égaux.*

Je mene les droites BE, CF; j'ajoûte aux deux droites égales AD, EF, la partie commune DE, & j'ai AE = DF, & AB = DC; or, l'angle EAB = FDC; donc les triangles EAB, FDC

ayant les côtés EA, AB égaux chacun à chacun aux côtés ED, DC, & l'angle compris égal à l'angle compris, sont parfaitement égaux, & l'angle AEB est égal à l'angle DFC, ainsi les droites BE, CF étant égales & également inclinées entre les paralelles AF, BH, sont paralelles entr'elles, & par conséquent EBCF est un paralellogramme; or, EBCF = ABCD; (*N. 369.*) & par la même raison EBCF=EMHF; donc ABCD = EMHF.

371. COROLLAIRE II. *Tout paralellogramme* EBCF *est égal au produit de sa base* BC *multipliée par sa hauteur ou par la perpendiculaire* ER *menée de son sommet sur sa base.* Supposons que le paralellogramme ABCD soit rectangle, le produit de la base BC multipliée par la hauteur AB sera valeur de ce rectangle; or, le paralellogramme EBCF est égal au rectangle; donc le paralellogramme EBCF est aussi le produit de sa base BC par ER ou par son égale AB.

373. COROLLAIRE III. *Les paralellogrammes* BEFC, MEFH *qui ont les bases & les hauteurs égales, sont égaux.* Ils sont chacun égaux à un rectangle BADC qui auroit même base & même hauteur qu'eux, ou qui ayant la base égale à la base seroit entre mêmes paralelles; donc, &c.

373. COROLLAIRE IV. *Les paralellogrammes qui ont les bases inégales & les hauteurs égales, sont entr'eux comme les bases; ceux qui ont les hauteurs inégales & les bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs, & ceux qui ont les hauteurs réciproques à leurs bases sont égaux entr'eux.*

Supposons que la base BC du paralellogramme BADC soit plus grande que la base MH du paralellogramme EMHF, & que les hauteurs AB, ER soient égales; le paralellogramme BADC est donc le produit de sa base BC par sa hauteur BA, & le paralellogramme MEFH est aussi le produit de sa base MH par sa hauteur ER ou par son égale BA; mais nous sçavons que si deux grandeurs inégales BC, MH sont multipliées par une même grandeur BA, les produits sont entr'eux comme les grandeurs inégales BC, MH; donc les deux paralellogrammes sont entr'eux comme leurs bases inégales BC, MH.

Si l'on suppose que les bases BC, MH sont égales & leurs hauteurs BA, ER inégales, on démontrera de la même façon que les deux paralellogrammes sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Enfin, si les hauteurs sont réciproques aux bases, on démontrera comme ci-dessus (*N.* 184.) que les paralellogrammes sont égaux.

374. COROLLAIRE V. *Les triangles* ABC, AEC (Fig. 233.) *qui ont même base & qui sont entre deux paralelles sont égaux.*

Je mene CR paralelle à AB, & CH paralelle à AE, ce qui me donne les deux paralellogrammes égaux ABRC, AEHC; (*N.* 369.) mais BC étant la diagonale du paralellogramme ABRC, le triangle ABC est la moitié de ce paralellogramme, & par la même raison, le triangle AEC est la moitié du paralellogramme AEHC; donc ces deux triangles sont égaux à cause que les moitiés sont entr'elles comme leur tout.

375. COROLLAIRE VI. *Tout triangle est égal au produit de sa base multiplié par la moitié de sa hauteur.* Car tout triangle est la moitié d'un paralellogramme de même hauteur & de même base; mais le paralellogramme est le produit de sa base par sa hauteur; donc le triangle est le produit de la base par la moitié de sa hauteur.

376. COROLLAIRE VII. *Donc,* 1°. *Les triangles qui ont des bases égales & qui sont entre mêmes paralelles ou qui ont des hauteurs égales, sont égaux,* 2°. *Ceux qui ont des bases inégales & des hauteurs égales, sont entre eux comme leurs bases,* 3°. *Ceux qui ont des hauteurs inégales, sont entr'eux comme leurs hauteurs,* 4°. *Ceux qui ont les hauteurs réciproques aux bases, sont égaux.* Tout cela est évident, par la raison que les triangles sont moitiés des paralellogrammes de même base & de même hauteur qu'eux.

377. COROLLAIRE VIII. *Tout polygone régulier* EFCGH (Fig. 234.) *est égal à un triangle* ABC; *dont la base* BC *est égale au circuit du polygone, & la hauteur* AB *est égale à l'apothême* OR.

Supposons que le polygone soit un pentagone; du centre O je mene des rayons à tous les angles, ce qui le divise en cinq triangles de même hauteur & de même base; or le triangle OHG est égal à sa base HG multipliée par la moitié de sa hauteur OR; (*N* 375.) donc le pentagone est égal à 5HG multiplié par $\frac{1}{2}$ OR; mais le triangle ABC est égal à BC multiplié par $\frac{1}{2}$ AB, (*N.* 375.) & par la supposition, nous avons BC $=$ 5HG, & AB $=$ OR; donc le triangle ABC est égal au polygone.

378. COROLLAIRE IX. *Tout cercle est égal à un triangle qui auroit*

roit pour baze une ligne égale à la circonférence, & pour hauteur une ligne égale au rayon.

Le cercle eſt un polygone d'une infinité de côtés dont le circuit eſt la circonférence, & dont l'apothéme n'eſt pas différent du rayon, à cauſe que les côtés ſont infiniment proches de la circonférence. Donc, &c.

Ceci peut ſe démontrer encore en cette ſorte : ſoit le cercle BQM (*Fig.* 235.) dont le rayon eſt OB ; je conçois que du même centre O, & par tous les points infiniment proches du rayon, ſoient décrites des circonférences CRS, DHN, &c. qui ſeront les élemens du cercle, enſorte que leur ſomme ne différera pas du cercle même. Du point B, j'éleve la perpendiculaire BA que je conçois égale à la circonférence BQM. Du point A, je mene au centre la droite AO ; & de tous les points de diviſion, je conçois des droites CF, DG, & paralelles à la droite BA, & qui ſe terminent ſur AO ; les cercles BQM, CRS étant ſemblables (*N.* 287.), nous avons BQM. CRS :: OB. OC, & à cauſe des triangles ſemblables OBA, OCF, nous avons auſſi BA. CF :: OB. OC ; donc BQM. CRS :: BA. CF ; mais par la ſuppoſition BQM = BA, donc CRS = CF ; & on prouvera de même que la circonférence DHN eſt égale à la droite DG ; d'où il ſuit que tous les élemens DG, CF, BA du triangle OBA ſont égaux chacun à chacun à tous les élemens du cercle BQM, & que par conſéquent ce cercle eſt égal au triangle OBA, qui a pour baſe la droite BA égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon OB.

379. COROLLAIRE X. Donc *tous les cercles de differens rayons, tels que* BQM, CRS, DHN, &c. *peuvent ſe changer en triangles ſemblables* OBA, OCF, ODG, &c.

380. COROLLAIRE XI. *Toute couronne, c'eſt-à-dire, tout eſpace compris entre deux circonférences* BQM, CRS *concentriques & inégales, eſt égale à un trapezoïde* BCFA, *dont les côtés paralelles & inégaux* BA, CF *ſont égaux chacun à chacun aux deux circonférences, & dont la hauteur* CB *eſt la différence des rayons* OB, OC. Car la couronne n'eſt autre choſe que le cercle BQM moins le cercle CRS ; or, le cercle BQM eſt égal au triangle OBA, & le cercle CRS eſt égal au triangle OCF, donc la couronne eſt égale au triangle OBA, moins le triangle OCF, c'eſt-à-dire au trapezoïde BCFA.

381. *REMARQUE.* De tout ce que nous venons de dire, il pa-

roit s'ensuivre qu'on peut trouver la quadrature du cercle, c'est-à-dire une figure rectiligne égale au cercle; mais la difficulté consiste à trouver une ligne droite égale à la circonférence, & c'est à quoi il n'y a pas d'apparence qu'on parvienne si-tôt.

Comme les côtés des polygones inscrits & circonscrits au cercle, approchent d'autant plus de la circonférence que leur nombre est plus grand, il est sûr qu'à force d'inscrire & de circonscrire des polygones semblables, on en trouveroit à la fin deux dont les côtés se confondroient avec la circonférence, mais parce qu'il faudroit pour cela faire des calculs à l'infini, ce qui n'est pas possible. *Archiméde* n'a poussé le sien que jusqu'aux polygones inscrit & circonscrit de 96 côtés; & il a trouvé que le diamétre étoit au circuit du polygone circonscrit, comme 1 est à $3\frac{1}{7}$, ou comme 7 à 22, & que le même diamétre étoit au circuit du polygone inscrit, comme 1 à $3\frac{10}{71}$, ou comme 7 à $21\frac{70}{71}$, de sorte qu'en réduisant le diamétre 7, & les deux circuits 22, & $21\frac{70}{71}$ au même dénominateur 71, ce qui donne $\frac{497}{71}$ pour le diamétre, & $\frac{1562}{71}$, $\frac{1561}{71}$ pour les deux circuits, la différence des deux circuits est un, c'est-à-dire, une partie du diamétre divisé en 497 parties ou $\frac{1}{497}$e du diamétre. Or, comme la circonférence du cercle approche beaucoup plus du circuit du polygone circonscrit, que de celui de l'inscrit, il est clair que la différence de la circonférence du cercle au circuit du polygone circonscrit doit être moindre que la moitié de la 497e partie du diamétre, c'est-à-dire moindre que la 994e partie du diamétre, & c'est pourquoi on se sert plutôt du rapport de 7 à 22, pour exprimer le rapport du diamétre du cercle à sa circonférence, que du rapport de 7 à $21\frac{70}{71}$; cependant quoique le rapport de 7 à 22 soit assez juste dans la pratique, les Géométres qui se piquent de grande exactitude, employent ordinairement des nombres plus grands pour diminuer la différence; celui qui me paroit le plus commode pour l'usage, c'est le rapport de 1000 à 3141, parce que dans les Régles de Trois qu'il faut faire le nombre 1000, épargne quelquefois une multiplication, & quelquefois une division.

382. **Probleme.** *Trouver l'aire d'un cercle dont on connoît le rayon* OB (Fig. 236.).

Soit le rayon OB de 3 toises; le diamétre en contiendra 6; ainsi je n'ai qu'à dire par Régle de Trois 1000 est à 3141, comme 6 est à un quatriéme terme, & ce quatriéme terme sera la circonférence, laquelle étant multipliée par la moitié du rayon don-

nera l'aire du triangle OBA, lequel eſt égal à la ſurface du cercle.

383. COROLLAIRE. Si on connoiſſoit la circonférence du cercle, & qu'on cherchât le rayon pour trouver enſuite la ſurface du cercle; on diroit par Régle de Trois: 3141 eſt à 1000, comme la circonférence donnée eſt à un quatriéme terme, qui ſeroit le diamétre de la circonférence donnée, & par conſéquent la moitié de ce diamétre ſeroit le rayon cherché.

384. COROLLAIRE II. *Tout ſecteur* ABC (Fig. 236.) *eſt égal au produit de ſon arc* AC *multiplié par la moitié du rayon* AB. Le cercle ARC étant un polygone régulier d'une infinité de côtés eſt compoſé d'une infinité de triangles qui ont tous pour hauteur le rayon, & dont la ſomme des baſes eſt égale à la circonférence, & par la même raiſon le ſecteur ABC eſt compoſé d'une infinité de petits triangles qui ont auſſi pour hauteur le rayon AB, & dont la ſomme des baſes eſt égale à l'arc RC; mais la ſomme des triangles qui compoſent le cercle eſt égale à la ſomme totale des baſes ou à la circonférence multipliée par la moitié du rayon; donc la ſomme des triangles qui compoſent le ſecteur, eſt égale à la ſomme totale des baſes, c'eſt-à-dire à l'arc AC multiplié par la moitié du rayon.

385. COROLLAIRE III. *L'aire d'un ſegment* ASC *eſt égale au ſecteur* ABCS, *moins le triangle* ABC. Ce qui eſt évident.

386. PROBLEME. *Meſurer un Trapezoïde* ABCD (Fig. 237.).

J'ajoûte enſemble les deux baſes AD, BC, & multipliant leur ſomme par la moitié de la hauteur ou de la perpendiculaire AB, menée entre les deux baſes, le produit eſt la valeur du trapezoïde. Ce que je démontre ainſi:

Je diviſe l'un des côtés non-paralelles DC en deux également en O, & du point A par le point O, je mene la droite AR qui coupe BC prolongé en R. Les triangles ADO, OCR ayant l'angle AOD égal à l'angle COR qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle ADO égal à ſon alterne OCR, & le côté DO égal au côté OC, ſont parfaitement égaux (*N.* 100.), & le côté AD eſt égal au côté CR; ajoutant donc de part & d'autre la partie commune AOCB, nous aurons le trapezoïde ADCB égal au triangle ABR; mais le triangle ABR eſt égal au produit de ſa baſe BR ou BC + AD multipliée par $\frac{1}{2}$ AB (*N.* 375.); donc le trapezoïde eſt égal au même produit.

Ou bien je coupe les côtés non-paralelles AB, DC (*Fig.* 238.)

chacun en deux également en R, S, & menant la droite RS qui sera paralelle à AD ou BC, je multiplie cette ligne RS par la hauteur AB, ce qui donne la valeur du trapezoïde, & pour le prouver :

Du point S, je mene FE perpendiculaire sur BC, & qui rencontre AD prolongé en E ; les triangles DSE, CSF ayant l'angle DSE égal à l'angle CSF qui lui est opposé au sommet, l'angle EDS égal à son alterne FCS, & le côté DS égal au côté SC sont parfaitement égaux. Ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune ADSFB, nous aurons le rectangle AEBF égal au trapezoïde ADCB ; mais le rectangle est égal au produit de BF ou RS par la hauteur AB, donc le trapezoïde est égal au même produit.

387. PROBLEME. *Mesurer une bande à retours* ABCDEFG (Fig. 239.).

Je coupe les droites AH, BG, CF, DE, chacune en deux également, & par les points de division, je mene la ligne ORST, laquelle étant multipliée par la largeur AH de la bande, donne la surface de cette bande ; car le trapezoïde ABGH est égal au produit de OR multiplié par AH (*N.* 386.) le trapezoïde BCFG est égal à RS × AH, & le trapezoïde CDEF est égal à ST × AH ; mais ces trapezoïdes composent la bande ; donc cette bande est égale à OR × AH + RS × AH + ST × AH ou ORST × AH.

388. COROLLAIRE. Une couronne ABCDEFGN (*Fig.* 240.) étant égale au trapezoïde EART, dont les bases paralelles AR, ET sont égales chacune à chacune aux deux circonférences, & dont la hauteur est la différence AE des deux rayons ; il est clair que si du centre O & du point H qui divise AE en deux également, on décrit une circonférence, la couronne sera égale à cette circonférence multipliée par AE, car cette circonférence sera égale à la droite HS qui coupe en deux également les côtés non-paralelles AE, RT du trapezoïde, &c.

389. PROBLEME. *Mesurer une figure irrégulière* ABDEC (Fig. 241.).

De l'un des angles C, je mene des droites aux angles opposés, ce qui divise la figure en triangles ; je mesure chacun de ces triangles, & leur somme me donne la valeur de la figure.

390. PROPOSITION LXXXVIII. *Les Rectangles, les Paralellogrammes & les Triangles, sont en raison composée de la raison de leurs hauteurs, & de celle de leurs bases.*

Soient comme dans la Figure 242, deux rectangles, dont la

hauteur de l'un est *a*, la base *b*, la hauteur de l'autre *c*, & la base *d*; je compare la hauteur du premier à la hauteur du second, & la base à la base, ce qui me donne les deux Raisons *a*, *c*; *b*, *d*, je fais la raison composée de ces deux rayons, & j'ai *ab*, *cd*. Or, le premier terme *ab* de cette raison, étant le produit de la hauteur du premier rectangle par sa base, est égal à ce rectangle, & par la même raison le second terme *cd* est égal au second rectangle; donc les deux rectangles sont en raison composée de la raison de leurs hauteurs, & de celle de leurs bases.

Les paralellogrammes étant égaux aux rectangles de même base & de même hauteur, sont donc aussi en raison composée de la raison de leurs hauteurs, & de celle de leurs bases; & il faut dire la même chose des triangles, à cause qu'ils sont moitiés des rectangles de même hauteur & de même base.

391. PROBLEME. *Sur un côté donné* ab, *construire une Figure semblable à une Figure donnée* ABCDE (Fig. 243.).

De l'un des angles A de la Figure donnée, je mene des droites AC, AD aux angles opposés; aux extrémités *a*, *b* de la droite donnée *ab*, je fais les angles *cab*, *cba* égaux chacun à chacun aux angles CAB, CBA, & par conséquent le triangle *cab* est semblable au triangle CAB; je fais aux extrémités *a*, *c* de la droite *ac* les angles *dac*, *dca*, égaux chacun à chacun aux angles DAC, DCA, & le triangle *dac* est aussi semblable au triangle DAC. Enfin, je fais aux extrémités *a*, *d* de la droite *ad* les angles *ead*, *eda*, égaux chacun à chacun aux angles EAD, EDA, & le triangle *ead* est semblable au triangle EAD; ainsi les Figures *abcde*, ABCDE étant composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, sont semblables entr'elles (*N*. 164.).

392. PROPOSITION LXXXIX. *Les Figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou des lignes semblablement posées.*

Soient comme dans la Figure 244, deux rectangles semblables, ensorte qu'on ait *a*. *b* :: *c*. *d*; je fais le quarré *aa* de la hauteur *a* du premier, & le quarré *cc* de la hauteur *c* du second. Or, le quarré *aa* ayant même hauteur que le premier rectangle *ab*; ces deux Figures sont entr'elles comme leurs bases *a*, *b* (*N*. 373.); donc *aa*. *ab* :: *a*. *b*; & par la même raison, nous avons *cc*. *cd* :: *c*. *d*; mais les raisons *a*, *b*; *c*, *d*, sont égales à cause des rectangles semblables *ab*, *cd*, donc les raisons *aa*, *ab*, & *cc*, *cd* sont aussi égales, & partant nous avons *aa*. *ab* :: *cc*. *cd*, ou *aa*. *cc* :: *ab*. *cd*;

ce qui fait voir que les rectangles *ab*, *cd* sont entr'eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs côtés homologues *a* & *c*.

Or, à cause de la similitude des Figures *ab*, *cd*, nous avons *a*. *c* :: *b*. *d*, donc *aa*. *cc* :: *bb*. *dd*, mais les deux rectangles sont entr'eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs hauteurs; donc ils sont aussi comme les quarrés *bb*, *dd* de leurs bases, & on démontrera de la même façon qu'ils sont comme les quarrés des lignes semblablement posées, à cause que ces lignes sont entr'elles comme les bases, ou comme les hauteurs (*N*. 165.).

Les paralellogrammes semblables étant égaux aux rectangles de même hauteur & de même base, sont donc aussi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou des lignes semblablement posées, & il faut dire la même chose des triangles semblables, à cause qu'ils sont moitiés des rectangles de même hauteur & de même base.

Quant aux Polygones semblables réguliers ou irréguliers; il est clair que ces Figures étant composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, tous ces triangles seront entr'eux comme les quarrés de leurs bases, &c. Par exemple, dans la Figure 243 les triangles ABC, *abc* seront entr'eux comme les quarrés de leurs bases BC, *bc*, de même les triangles ACD, *acd* seront entr'eux comme les quarrés de leurs bases CD, *cd*, ou comme les quarrés des bases BC, *bc* à cause de BC. *bc* :: CD. *cd*, & ainsi de suite, & par conséquent les Figures seront aussi entr'elles comme les quarrés de BC, *bc*, ou de CD, *cd*, &c.

Enfin, les Cercles étant des polygones, sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres, &c.

393. PROPOSITION XC. *Si trois lignes* a, b, c, (Fig. 245.) *sont en proportion continue, le quarré de la premiere est au quarré de la seconde, comme la premiere est à la troisiéme.*

Je fais le rectangle *ab* de la premiere par la seconde, & j'y ajoute le quarré *aa* de la premiere. Je fais de même le rectangle *bc* de la seconde par la troisiéme, & j'y ajoute le quarré *bb* de la seconde. Le quarré *aa* & le rectangle *ab* ayant même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases *a* & *b*, donc *aa*. *ab* :: *a*. *b*, & par la même raison *bb*. *bc* :: *b*. *c*; mais les raisons *a*, *b*, & *b*, *c* sont égales par la supposition; donc *aa*. *ab* :: *bb*. *bc*, ou *aa*. *bb* :: *ab*. *bc*; & les rectangles *ab*, *bc*, ayant une dimension commune *b* sont entr'eux comme leurs dimensions inégales *a*, *c*; donc

ab. bc :: *a. c*, & par conféquent *aa. bb* :: *a. c*, ce qui fait voir que le quarré de la premiere ligne *a* eft au quarré de la feconde, comme la premiere eft à la troifiéme.

394. *Remarque*. J'aurois pû démontrer ces propofitions de la même façon que je l'ai fait dans l'Algebre ; mais j'ai été bien aife de faire voir qu'on peut tirer les vérités Géométriques des principes les plus fimples de cette fcience d'une maniere même plus naturelle qu'on ne le feroit par l'Algebre.

395. Proposition XCI. *Si fur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC (Fig. 247.) *on conftruit trois Figures femblables, la Figure* AHLC *faite fur l'hypothenufe* AC *eft égale aux deux autres* ADEB, BFGC *faite fur les deux autres côtés* AB, BC.

Les trois Figures étant femblables, font entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AC, AB, BC, mais le quarré de AC eft égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (*N.* 171.), donc la Figure AHLC eft égale aux deux autres.

396. Corollaire. *Si fur les trois côtés* AC, AB, BC (Fig. 247.) *du triangle rectangle* ABC, *on décrit des demi-cercles* AEBRC, AHB, BSC, *le triangle* ABC *eft égal aux deux portions de cercles* AHBE, BSRC, *qu'on nomme communément* Lunules.

Les demi-cercles étant femblables, font entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres (*N.* 392.), & par conféquent le demi-cercle AEBRC eft égal aux deux autres, & retranchant de part & d'autre les fegmens communs AEB, BRC, il refte le triangle ABC égal aux deux Lunules.

397. Corollaire II. *Si le triangle rectangle* ABC (Fig. 248.) *eft ifofcele, chaque Lunule eft égale à la moitié du triangle* ABC, *c'eft-à-dire qu'en abaiffant du fommet* B *la perpendiculaire* BT, *la Lunule* AHBE *eft égale au triangle* ABT, *& la Lunule* BSCR *égale au triangle* BTC. Les deux demi-cercles AHB, BSC font égaux à caufe des diamétres égaux AB, BC, & les fegmens AEB, BRC font auffi égaux à caufe des cordes égales AB, BC; retranchant donc des deux petits demi-cercles les deux fegmens, les deux Lunules reftantes feront égales. Or, ces deux Lunules font égales au triangle ABC, donc chacune d'elles vaut la moitié de ce triangle.

398. *Remarque*. Ce n'eft que dans le cas où le triangle rectangle ABC eft ifofcele, qu'on peut trouver en particulier la valeur de chaque Lunule, & alors l'une ou l'autre de ces Lunules fe nomme Lunule d'*Hypocrate*, fameux Mathématicien, qui

vivoit du tems des Grecs, & qui le premier en a trouvé la quadrature; or, dans cette Lunule, il faut obſerver que le quart de cercle BTCR eſt égal au demi-cercle BSC, car le triangle BTC étant égal à la Lunule BSCR; ſi on ajoute de part & d'autre le ſegment BRC, on aura le quart de cercle BTCR égal au demi-cercle BSC. Et de-là, *Wiſthon*, célébre Anglois, a trouvé le moyen de diviſer la Lunule d'Hypocrate en telles parties qu'on voudra, ainſi qu'on va voir dans le Problême ſuivant.

399. PROBLEME. *Diviſer la Lunule d'Hypocrate* BSCR *en tel nombre de parties que l'on voudra* (Fig. 249.).

Du centre T du quart de cercle, je mene par le centre O du demi-cercle la droite TS qui diviſe la Lunule en deux parties BSR, RSC; ainſi ſuppoſé qu'on veuille la diviſer en quatre parties égales, je diviſe le diamétre BC en quatre parties égales, & des points de diviſion, j'éleve des perpendiculaires MP, ZY, puis des points P, Y, menant les droites PT, YT, qui coupent la circonférence du quart de cercle aux points H, V, je dis que les parties de Lunule SRHP, SRVY en ſont chacune le quart, ce que je démontre ainſi:

Je mene les droites OP, TM, & à cauſe des paralelles PM, ST, les triangles PMO, PMT qui ont la même baſe PM, & qui ſont entre deux paralelles ſont égaux (*N.* 374.), & retranchant de part & d'autre la partie commune PXM, il reſte le triangle POX égal au triangle MXT.

Dans le triangle iſoſcele POT, l'angle extérieur POS étant égal aux deux intérieurs oppoſés, eſt par conſéquent double de l'angle OTP; or, à cauſe que le quart de cercle BTCR eſt égal au demi-cercle BSC, il s'enſuit que le cercle entier du rayon BT eſt double du cercle entier du rayon OB, & que par conſéquent le ſecteur SOP du demi-cercle eſt égal au ſecteur RTH du quart de cercle, à cauſe de l'angle SOP double de l'angle RTH. Retranchant donc de ces deux ſecteurs la partie commune ORL, le reſte SRLP eſt égal au reſte LOTH, & ajoutant PLH de part & d'autre, j'ai SRHP égal au triangle POT, ou aux deux triangles POX, OXT, & enfin mettant au lieu du triangle POX, le triangle XMT qui lui eſt égal; nous avons SRHP égal au triangle OTM; mais le triangle OMT ayant la même hauteur OT que le triangle BTC, n'eſt que le quart de ce triangle, à cauſe que ſa baſe OM eſt le quart de la baſe BC (*N.* 376.), donc la partie SRHP eſt égale au quart du triangle PTC

PTC, ou au quart de la Lunule BSCR, laquelle est égale au triangle BTC.

400. PROBLEME. *Trouver un quarré égal à plusieurs quarrés donnés, ou une Figure semblable & égale à plusieurs Figures semblables* (Fig. 250.).

Supposons que les droites AB, BC soient les côtés des deux premiers quarrés donnés; je leur fais faire un angle droit ABC, & menant la droite AC, j'ai le triangle rectangle ABC, dans lequel le quarré de AC est égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (*N.* 171.); je prens le côté CD du troisiéme quarré donné, & lui faisant faire un angle droit ACD avec AC; je mene la droite AD, ce qui me donne un autre triangle rectangle ACD, dans lequel le quarré de AD est égal aux quarrés de AC & de DC, mais le quarré de AC est égal aux quarrés de AB, BC, donc le quarré de AD est égal aux trois premiers quarrés donnés, & continuant de la même façon, je trouverai le quarré de AE égal aux quatre premiers quarrés donnés; faisant donc le quarré de AE, j'aurai ce qu'on demande, & ainsi des autres.

Et si l'on demandoit une Figure semblable & égale à plusieurs Figures semblables, je mettrois au lieu des droites AB, BC, CD, DE, & les côtés homologues de ces Figures, après quoi la Figure semblable faite sur AE seroit égale aux quatre Figures données, &c. à cause que les Figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

401. PROPOSITION XCII. *Si l'on mene dans un cercle* (Fig. 251.) *deux diametres* AC, BD *qui fassent entr'eux un angle aigu, & que de leurs extrêmités* A, B *on mene des tangentes* AV, BR, *qui se terminent aux diametres, & qui se coupent en* H. *Je dis 1°. que les triangles* AVO, BRO *faits par les deux diametres, avec chacune des tangentes sont égaux. 2°. Que les triangles* AHR, BHV *faits par les tangentes avec chaque diamétre sont aussi égaux.*

A cause des tangentes perpendiculaires sur les diamétres aux points A, B les triangles AVO, BRO sont rectangles, & à cause de l'angle aigu O commun, & du côté AO égal au côté BO, ces deux triangles sont égaux (*N.* 100.). Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Retranchant donc des deux triangles égaux AVO, BRO le trapezoïde commun AHBO, le reste VHB est égal au reste RHA. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

402. COROLLAIRE. *Si des extrêmités* A, B *des diamétres, on mene*

des perpendiculaires AX, BF *sur les diamétres opposés, le triangle* AVX *fait entre les diamétres par l'une des perpendiculaires* AX, *& la tangente* AV *menée du même point* A *est égal au trapezoïde* AXBR *fait entre les diamétres par la même perpendiculaire* AX, *& l'autre tangente* BR.

Par la Proposition précédente, le triangle VHB est égal au triangle AHR, ajoutant donc à chacun de ces triangles le trapezoïde commun AHBX, on aura AVX = BRAX.

403. PROPOSITION XCIII. *Posant que les deux diamétres* AC, BD (*Fig.* 252.) *soient donnés avec leurs tangentes* AV, BR; *si d'un point quelconque* S *pris sur la circonférence, on mene entre les diamétres deux droites* LZ, MT *paralelles aux tangentes* AV, BR; *le triangle* LST *fait par ces deux paralelles avec l'un des diamétres* DB *prolongé en* V, *est égal au trapezoïde* BRMT *fait par la tangente* BR *de ce diamétre* DBV, *& sa paralelle* MT; *& le triangle* MSZ *fait par les mêmes paralelles avec l'autre diamétre* CAR *est égal au trapezoïde* AVLZ *fait par la tangente* AV *de ce diamétre & sa paralelle.*

Du point A, je mene AX perpendiculaire sur DB, & j'ai AVX = BRAX (*N.* 402.). Or, à cause de la perpendiculaire AX paralelle à la tangente RB, & à sa paralelle MT, & de LZ paralelle à AV, les triangles VAX, LST sont semblables & sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues (*N.* 392.); donc VAX. LST :: $\overline{AX}^2. \overline{ST}^2$. Mais par la proprieté du cercle, nous avons $\overline{AX}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$ (*N.* 284.), & $\overline{ST}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$; donc VAX. LST :: $\overline{BO}^2 - \overline{XO}^2. \overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$; or, les triangles BRO, TMO, XAO étant semblables sont entr'eux comme les quarrés $\overline{BO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{XO}^2$ de leurs côtés homologues BO, TO, XO (*N.* 393.); mettant donc les triangles au lieu des quarrés, nous aurons VAX. LST :: BRO — XAO. BRO — TMO ou VAX. LST :: BRAX. BRMT; mais l'antecédent VAX est égal à l'antecédent BRAX, donc le conséquent LST est égal au conséquent BRMT, & on prouvera la même chose toutes les fois que la paralelle ST coupera le diamétre BD entre le centre O & le point B.

Mais si le point Q d'où l'on mene les droites QL, QE paralelles aux tangentes AV, BR est tellement posé que la paralelle

QE coupe le diamétre BD en dessous de O. Je mene à l'extrémité D la tangente DF qui coupe RC prolongé en F, & comme le triangle LQP fait par les deux paralelles avec le diamétre BD est encore semblable au triangle VAX ; j'ai de même VAX. LQP :: $\overline{AX}^2$. $\overline{QP}^2$ :: $\overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$. $\overline{OD}^2 - \overline{OP}^2$, & au lieu des quarrés mettant les triangles BRO, AXO, ODF, OPE, qui sont entr'eux comme ces quarrés, nous aurons VAX. LQP :: BRO — AXO. ODF — OPE, c'est-à-dire VAX. LQP :: BRAX. DFEP, mais VAX = BRAX, donc LQP = DFEP ; ainsi le triangle LQP fait avec le diamétre BD par les paralelles QL, QE menées du point Q, est toujours égal au trapezoïde DFEP fait par ces mêmes paralelles avec la tangente DF, & ce seroit encore la même chose si le point d'où l'on mene les paralelles aux tangentes, étoit pris sur la demi-circonférence BCD. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Maintenant pour démontrer que le triangle MSZ fait avec l'autre diamétre AC par les paralelles LZ, MT est égal au trapezoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diamétre & sa paralelle LZ. Je n'aurois qu'à mener du sommét B de l'autre diamétre une perpendiculaire B3 sur AC, & achever le reste, comme ci-dessus ; mais comme cette démonstration ne réussiroit pas par rapport aux Sections Coniques que ceci concerne ; voici une autre démonstration qui sera commune aux Sections Coniques, & au Cercle.

Nous avons VAX = BRAX (*N*. 402.), & retranchant de VAX le triangle LST, & de BRAX, le trapezoïde BRMT égal au triangle LST, comme on vient de voir ; nous aurons AVLSTX = MTXA, & retranchant la partie commune STX2, nous aurons AVL2 = MS2A, & ajoutant de part & d'autre le triangle A2Z, nous aurons enfin AVLZ = MSZ.

Si le point Q d'où les paralelles QL, QE aux tangentes sont menées, est tellement posé que la paralelle soit en-dessous du centre O, je mene du point D une tangente KDF qui coupe AC prolongé en F, & la tangente AV prolongée en K ; les triangles rectangles BRO, DOF sont semblables & égaux à cause de BO = OD, & des angles sur BO égaux chacun à chacun aux angles sur DO. Or, le triangle BRO est égal au triangle AVO (*N*. 401.) ; donc AVO = FOD, & ajoutant de part & d'autre le trapeze AKDO, nous avons VKD = AKF, & retran-

chant de VKD le triangle LQP, & de AKF le trapezoïde PEFD égal au triangle LQP, comme on a vû ci-dessus ; il reste VLQPDK = AEPDK ; enfin retranchant de part & d'autre la partie commune AKDPQZ, nous aurons VAZL = ZQE, c'est-à-dire le triangle ZQE fait par les paralelles menées du point Q, avec le diamétre AC égal au trapezoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diamétre & sa paralelle.

Si le point Q d'où l'on mene des paralelles aux tangentes étoit sur la demi-circonférence BCT (*Fig.* 253.), de façon que la paralelle QT coupât le diamétre BD en-dessus de O, la similitude des triangles QTL, VAX, feroit conclure comme auparavant que le triangle TLQ fait avec le diamétre BD est égal au trapezoïde BRMT, puis menant du point C la tangente CK qui coupe BD en *t*, & MA en K, on trouveroit aisément, comme on vient de voir, que le triangle QME fait avec l'autre diamétre est égal au trapezoïde EL*t*C fait par la tangente C*t* de ce diamétre, & sa paralelle.

Enfin, la Figure 254 fait voir que si le point Q étoit sur la demi-circonférence BCD, & que la paralelle QT coupât BD en-dessous de O, il faudroit faire de ce côté ce qu'on a fait de l'autre dans la Figure 252. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Remarque. Cette Proposition & la précédente, sont essentielles pour les Sections Coniques, & j'avertis d'avance que pourvû qu'on sçache bien ceci, & ce que nous avons dit touchant le Cercle, on sera surpris quand on viendra aux Sections Coniques, de voir que l'étude de ces Courbes ne sera plus qu'une application naturelle des principes les plus simples.

Du changement des Figures & de leur réduction de grand en petit & de petit en grand.

404. *Une Figure quelconque* ABCDEF (Fig. 282.) *étant donnée, faire un triangle qui lui soit égal.*

Je retranche de la Figure un triangle ABC par la diagonale AC ; du sommet B, je mene la droite BP paralelle à AC, jusqu'à ce qu'elle coupe en P, l'un des côtés AF prolongé, ce qui me donne un quadrilatere PBCA, dans lequel menant l'autre diagonale PC, j'ai deux triangles égaux BAC, CPA à cause qu'ils ont la même base CA, & qu'ils sont entre les deux paralelles CA, BP. Retranchant donc de la Figure donnée, le triangle

BAC, & substituant en sa place le triangle PAC, j'ai la figure PCDF égale à la figure donnée, & qui a une angle de moins.

Je coupe le triangle DEF par la diagonale DF; du sommet E de ce triangle, je mene EH paralelle à DE, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté AF prolongé en H; ce qui me donne le quadrilatere FDEH, dans lequel menant l'autre diagonale DH, j'ai deux triangles égaux FED, FHD, à cause qu'ils ont la base commune FD, & qu'ils sont entre deux paralelles; retranchant donc de la figure PCDF le tiangle FDE, & mettant en sa place le triangle FDH, j'ai la figure PCDH égale à la figure donnée & qui a deux angles de moins.

Je retranche de cette figure le triangle CDH par la diagonale CH, & du sommet D de ce triangle, je mene DR paralelle à CH jusqu'à ce qu'elle rencontre AF prolongé en R, & menant la droite CR, les triangles CDH, CHR qui ont la même base CH & qui sont entre deux paralelles, sont égaux; ainsi mettant CHR au lieu de CDH, j'ai le triangle PCR égal à la figure donnée.

405. PROBLEME. *Faire un rectangle égal à un triangle donné* ABC (Fig. 255.)

Du sommet B j'abaisse la perpendiculaire BS sur la base AC; je coupe BS en deux également en R, & avec la base AC & la hauteur SR, je fais le rectangle AEDC, lequel est égal au triangle donné ABC; car le triangle ABC est égal à sa base AC mulripliée par la moitié de sa hauteur BS, c'est-à-dire par SR, (*N.* 375.) & le rectangle AEDC est égal au même produit.

Ou bien je coupe la base AC du triangle en deux également en R, (*Fig.* 256.) & avec la moitié AR & la hauteur BS du triangle, je fais un rectangle AEDR lequel est égal au triangle donné. Car le rectangle AEFC de même hauteur & de même base que le triangle, est double du triangle; or, les rectangles AEDR, AEFC ayant même hauteur AE, sont entr'eux comme leurs bases AR; AC (*N.* 373.) donc AEDR étant la moitié de AEFC, est par conséquent égal au triangle.

406. PROBLEME. *Un triangle* ABC *étant donné*, (Fig. 257.) *faire un paralellogramme qui lui soit égal, & qui ait un angle donné.*

Du sommet B, je mene EF paralelle à la base AC; je fais en A un angle CAE égal à l'angle donné, & achevanr le paralellogramme AEFC, je coupe AC en deux également en P; d'où je

mene PB paralelle à AE, ce qui donne le triangle ABC égal au paralellogramme AEBP; car les paralellogrammes AEBP, AEFC ayant la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases AP, AC; c'est-à-dire le paralellogramme AEBP est la moitié du paralellogramme AEFC; or, le triangle ABC est aussi la moitié du paralellogramme AEFC; donc, &c.

Ou bien je coupe le côté AE en deux également en H, d'où je mene HR paralelle à AC, ce qui me donne le paralellagramme AHRC égal au triangle, à cause que l'un & l'autre sont la moitié du paralellogramme AEFC.

407. PROBLEME. *Une figure quelconque étant donnée, faire un rectangle ou un paralellogramme qui lui soit égal.*

Je change la figure en un triangle qui lui soit égal, (*N.* 404.) & de ce triangle je fais le rectangle ou le paralellogramme requis (*N.* 405. 406.)

408. PROBLEME. *Faire un quarré égal à un paralellogramme ou à un triangle ou à une figure quelconque donnée.*

Pour faire un quarré égal au paralellogramme ABCD, je prens (*Fig.* 258.), je prens une moyenne proportionnelle AE entre la hauteur AB & la base AD, & le quarré AF fait sur cette proportionnelle est égal au rectangle; car puisque nous avons AB. AE :: AE. AD, nous avons aussi $\overline{AE}^2 = AB \times AD$; or $AB \times AD$ est le paralellogramme; donc le quarré AF est égal à ce paralellogramme.

Si la figure donnée est un triangle, je prens une moyenne proportionelle enrre la moitié de sa hauteur & sa base, & le quarré de cette moyenne proportionnelle étant égal au produit des extrêmes, est par conséquent égal au triangle donné.

Enfin si la figure est un polygone régulier, je la réduis en triangles, & j'acheve le reste comme il vient d'être dir.

409. PROBLEME. *Changer un triangle en un autre qui ait une hauteur donnée ou une base donnée.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 259.) qu'on demande de changer en un autre qui ait la hauteur EH. Je cherche une quatriéme proportionnelle à la hauteur donnée EH, à la hauteur BD du triangle ABC & à sa base AC; à l'extrémité H de la hauteur EH, j'éleve la perpendiculaire RP, que je fais égale à la quatriéme proportionnelle trouvée, & menant les lignes RE, PE, le triangle REP dont la hauteur est EH, est égal au triangle donné ABC; car

par la conftrnction, les hauteurs EH, BD de ces deux triangles font réciproques aux bafes AC, RP; donc les deux triangles font égaux (*N.* 376.).

Si on demande que le triangle ABC foit changé en un autre qui ait la bafe RP; je cherche une quatriéme proportionnelle à cette bafe RP, à la bafe AC & à la hauteur BD, & élevant fur RP une perpendiculaire HE que je fais égale à la quatriéme proportionnelle trouvée; je mene les droites RE, EP qui me donnent le triangle REP égal au triangle ABC, à caufe des bafes RP, AC réciproques aux hauteurs BD. EH par la conftruction.

410. COROLLAIRE. *On changera de la même façon un rectangle ou un paralellogramme en un autre qui ait une hauteur ou une bafe donnée.*

411. COROLLAIRE. De même, fi on vouloit changer un polygone quelconque regulier ou irrégulier en un triangle qui eût une hauteur ou une bafe donnée, on changeroit d'abord cette figure en triangle, (*N.* 404.) & on changeroit enfuite ce triangle en un autre qui eût la hauteur ou la bafe donnée, & fi on vouloit changer le polygone en un rectangle ou paralellogramme qui eût une hauteur ou une bafe donnée, on le changeroit d'abord en rectangle ou en paralellogramme, (*N.* 407.) après quoi on changeroit ce rectangle ou ce paralellogramme en un autre qui eût la hauteur ou la bafe donnée (*N.* 410.).

412. PROBLEME. *Faire une Figure égale à plufieurs Figures données.*

Je réduis les figures données en triangles (*N.* 404.) que je fuppofe être le triangle ABC, EFD, HIL; (*Fig.* 260.) je réduis ces trois triangles une même hauteur IM, (*N.* 409.) ou ce qui revient au même, je cherche la bafe LP qu'il faut donner au triangle ABC, afin qu'il puiffe avoir la hauteur IM; je mets cette bafe en ligne droite avec la bafe HL, & menant la droite PI, le triangle PLI eft égal au triangle ABC, (*N.* 376.) & par conféquent le triangle HIP eft égal aux deux HIL, ABC. Je cherche de même la bafe PQ qu'il faut donner au triangle EFD, afin qu'il puiffe avoir la hauteur IM, & mettant cette bafe en ligne droite avec HP, & menant la droite QI, le triangle PQI eft égal au triangle EFD; donc le triangle entier HIQ eft égal aux trois triangles, & par conféquent aux trois figures données.

413. PROBLEME. *Deux figure* X, Q *étant données*, (Fig. 261.)

trouver une troisième figure qui soit semblable à la premiere X, *&* *égale à la seconde* Q.

Je change la figure X en un triangle que je change ensuite en un autre AMB qui ait pour base le côté AB; je change de même la figure Q en un triangle BMP qui ait la même hauteur que le triangle AMB; ainsi le triangle AMP est égal aux deux figures données. Je décris sur AP un demi cercle APR, & au point B j'éleve la perpendiculaire BR sur laquelle je construis la figure Y semblable à la figure X, & je dis que la figure Y est égale à la figure Q.

Car les triangles AMB, BMP ayant la même hauteur, sont entr'eux comme leur bases AB, BP; mais AMB = X & BMP = Q; donc X. Q :: AB. BP; or, les figures semblables X, Y sont entr'elles comme les quarrés $\overline{AB}^2 . \overline{BR}^2$ de leurs côtés homologues AB, BR, (*N. 392.*) & à cause que dans le demi cercle APR, la ligne BR est moyenne proportionnelle entre les segments AB, BP, nous avons AB. BR :: BR. BP; donc nous avons aussi $\overline{AB}^2 . \overline{BR}^2$ :: AB. BR, & par conséquent X. Y :: AB. BP; mais nous venons de trouver X. Q :: AB. BP; donc X. Y :: X. Q; ce qui donne Y = Q.

414. COROLLAIRE. On peut donc par ce moyen changer plusieurs figures qui ne sont pas semblables entr'elles en un même nombre de figures toutes semblables à l'une des figures données.

415. PROBLEME. *Le côté d'un Polygone régulier étant donné, trouver le Polygone.*

Soit la droite AB (*Fig. 262.*) sur laquelle on demande de décrire un pentagone régulier, je décris un cercle avec un rayon quelconque OM, & dans ce cercle j'inscris un pentagone régulier que je divise en ses cinq triangles égaux; ensuite sur la droite AB je construis un triangle ARB semblable au triangle MON, en faisant les angles A, B égaux chacun à chacun aux angles M, N; enfin du sommet R pris pour centre, & avec le rayon RA, je décris un cercle dans lequel portant cinq fois la corde AB, j'ai le pentagone demandé. Car l'angle ARB égal à l'ange MON vaut la cinquiéme partie de la circonférence ABVTX, de même que l'angle MON, vaut la cinquiéme partie de la circonférence MNPQT.

416. PROBLEME. *Changer une figure quelconque en Polygone régulier.*

Je

Je change la figure donnée en un triangle que je suppose être le triangle ABC; (*Fig.* 263.) je divise sa base AC en cinq parties égales, & des points de division je mene au sommet les droites DB, EB, &c. qui divisent le triangle en cinq triangles égaux, à cause qu'ils ont tous la même hauteur & les bases égales. Je décris avec un rayon quelconque OR un cercle dans lequel j'inscris un pentagone que je divise en ses cinq triangles. Je fais un triangle TSV semblable à l'un des triangles ROT du pentagone & égal au triangle ABD, cinquiéme partie du triangle ABC, (*N.* 413.) & du sommet V décrivant un cercle avec le rayon VT; je porte ST cinq fois autour de la circonférence, ce qui me donne un pentagone égal au triangle ABC, & par conséquent à la figure donnée; car les cinq triangles de ce pentagone sont égaux aux cinq triangles qui composent le triangle ABC, & l'angle TVS embrasse la cinquiéme partie de la circonférence de son cercle de même que l'angle ROT son égal embrasse la cinquiéme partie de la circonférence du sien.

417. PROPOSITION XCIV. *Un quadrilatere quelconque* ABCD (Fig. 264.) *étant donné avec ses diagonales* AC, BD, *si l'on divise l'un des côtés* AB *en deux également en* E, *& que de ce point de division on mene la droite* EF *paralelle à l'une des diagonales* AC; *ensuite du point* F *la droite* FG *paralelle à l'autre diagonale* BD, *puis du point* G *la droite* HG *paralelle à la diagonale* AC, *& enfin du point* H *la droite* HE *paralelle à la diagonale* BD; *je dis que cette derniere paralelle coupera le côté* AB *au point* E *qui le divise en deux également, & que la figure* EFGH *sera un paralellogramme qui sera la moitié du quadrilatere donné.*

Dans le triangle ABC, les bases AC, EF étant paralelles, coupent les côtés AB, BC proportionnellement; or, AB est coupé en deux également en E; donc BC est aussi coupé en deux également en F. Par la même raison, dans le triangle BCD dont les bases BD, FG sont paralelles, le côté CD est coupé en deux également en G, & dans le triangle CDA dont les deux bases AC, GH sont paralelles, le côté AD est coupé en deux également en H; ainsi dans le triangle ABD la ligne HE menée du point H paralellement à la base, doit couper le côté AB au point E qui le divise en deux également : ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Les droites EF, HG étant paralelles à la même droite AC, sont paralelles entr'elles; par la même raison, les droites EH,

FG paralelles à la même droite BD, sont paralelles entr'elles; donc la figure EFGH est un paralellogramme : ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

Les triangles semblables ABC, EBF étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, EB (*N.*392.) qui sont comme 2 à 1; il s'ensuit que ces deux triangles sont entr'eux comme 4 à 1; c'est-à-dire le triangle EBF est le quart du triangle ABC, & par la même raison HGD est le quart du triangle ACD; ainsi les deux ensemble EBF, HGD sont le quart du quadrilatere ABCD, & on prouvera de même que le triangle EAH étant le quart du triangle BAD, & le triangle FCG, le quart du triangle BCD; les deux ensemble EAH, FCG sont aussi le quart du quadrilatere ABCD; retranchant donc du quadrilatere les quatre triangles EBF, HDG, EAH, FCG qui valent les deux quarts ou la moitié du quadrilatere; le reste, c'est-à-dire le paralellogramme EFGH sera la moitié de ce quadrilatere.

418. COROLLAIRE. *Si le quadrilatere a un de ses angles rentrans* (Fig. 265.), *on démontrera toujours que le paralellogramme* EFGH *en est la moitié.*

Je prolonge les paralelles EH, FG, & la diagonale BD jusqu'à ce qu'elles coupent l'autre diagonale AC aux points M, N, R, & je prouverai, comme ci-dessus, que le triangle EBF, est le quart du triangle ABC, que le triangle AEM est le quart du triangle ABR, & le triangle CFN, le quart du triangle BRC, d'où il suit que les trois triangles EBF, AEM, CFN sont ensemble les deux quarts ou la moitié du triangle ABC, & que par conséquent le paralellogramme restant EFNM est la moitié de ce triangle ou la moitié du quadrilatere ABCD, plus la moitié du triangle ADC, c'est-à-dire EFNM $= \frac{1}{2}$ ABCD $+ \frac{1}{2}$ ADC.

Or, dans le triangle ADC, les trois triangles HDG, AHM, CGN étant égaux à la moitié de ce triangle, le reste HGNM vaut l'autre moitié, & nous avons HGNM $= \frac{1}{2}$ ADC; mais nous avons trouvé EFNM $= \frac{1}{2}$ ABCD $+ \frac{1}{2}$ ADC; retranchant donc du premier membre le paralellogramme HGNM, & de l'autre $\frac{1}{2}$ ADC qui lui est égal, nous aurons EFGH $= \frac{1}{2}$ ABCD.

419. PROPOSITION XCV. *Une Figure quelconque* ABC (Fig. 266.) *étant donnée, si d'un point pris en-dehors ou en-dedans de la Figure, on mene les droites* OA, OC, OB, *à tous les angles, & qu'ayant divisé l'une de ces droites* OA *en raison quelconque en* E, *on mene du point* E *la droite* EF *paralelle à la base* AC *du triangle* AOC,

puis du point F *la droite* FH *paralelle à la base* BC *du triangle suivant* COB, *& ainsi de suite, la dernière paralelle* HE *passera par le point* E, *& la Figure* EFH *formée par ces paralelles, sera semblable à la Figure* ABC.

Dans le triangle AOC, la paralelle EF coupe le côté OC en meme raison que le côté OA, de même dans le triangle COB la paralelle FH coupe le côté OB en même raison que le côté OC, donc OB est coupé en H en même raison que AO est coupé en E, & par conséquent la paralelle menée du point H, doit passer par E. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Le triangle OEF est semblable au triangle OAC à cause de l'angle commun O, & des bases EF, AC paralelles; par la même raison le triangle OFH est semblable au triangle OCB, & le triangle OHE au triangle OBA, donc les deux Figures ACB, EFH étant composées d'un égal nombre de triangles semblables sont aussi semblables entr'elles.

420. COROLLAIRE. Si le point O étoit pris sur le circuit de la Figure (*Fig.* 267.), on démontreroit de la même façon que EF, FH, &c. formeroient une Figure EFHRS semblable à la Figure APBDC.

421. PROBLEME. *Une Figure* ABCD (Fig. 268.) *étant donnée, en décrire une autre semblable, & qui soit avec elle en telle raison que l'on voudra.*

Je prens un point O, ou dans la Figure ou en-dehors ou sur le circuit, ou enfin à l'un des angles; de ce point, je mene des droites à tous les angles, & supposant qu'on veuille que la Figure demandée ne soit que la moitié de la Figure donnée, je divise l'une des droites OA en deux également en R; je cherche une moyenne proportionnelle OE, entre OR & OA, & du point E, je mene EH paralelle à AB, puis HS paralelle à CB, & ainsi de suite, ce qui me donne la Figure EHSV semblable, & moitié de la Figure donnée. Car ces Figures sont entr'elles comme les quarrés des lignes OE, OA semblablement posées (*N.* 392.), mais par la construction, nous avons OA. OE :: OE. OR, donc $\overline{OA}^2. \overline{OE}^2$ :: OA. OR (*N.* 393.); mais OA est double de OR, donc $\overline{OA}^2$ est double de $\overline{OE}^2$, & par conséquent la Figure donnée est double de la Figure EHSV.

Si l'on veut que la Figure EHSV (*Fig.* 269.) soit double de la Figure donnée, je prolonge OA en R, en sorte que AR soit égal à OA; je prens une moyenne proportionnelle OE entre

OA, OR; du point E, je mene EH paralelle à AB, &c. & la Figure EHSV eſt double de la donnée; car à cauſe de OA, OE :: OE. OR, nous avons $\overline{OA}^2 . \overline{OE}^2$ :: OA. OR :: 1. 2 (*N*. 393.), & par conſéquent la Figure donnée n'eſt que la moitié de la Figure EHSV.

Si l'on veut que la Figure EHSV ſoit à la Figure donnée comme une ligne MN eſt à une ligne MP. Je cherche une quatriéme proportionnelle OR aux trois lignes MP, MN, OA, enſuite une moyenne proportionnelle OE, entre OA & OR, & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus, ce qui ſe démontre de la même façon.

422. *Remarque*. On peut abreger beaucoup l'opération, en mettant le point O ſur les angles de la Figure (*Fig*. 270.), car alors la Figure ſe trouve diviſée en deux triangles de moins, & par conſéquent il y a moins de paralelles à mener, l'une & l'autre méthode ont leur utilité; & c'eſt par leur moyen qu'on réduit toutes les Figures de grand en petit, & de petit en grand.

423. Probleme. *Deux quarrés étant donnés, en trouver tant d'autres que l'on voudra, leſquels pris deux à deux, ſoient égaux aux deux quarrés donnés.*

Suppoſons que les droites AB, BC (*Fig*. 271.) ſoient les côtés des deux quarrés donnés, je leur fais faire un angle droit ABC, puis menant l'hypothenuſe AC, je décris le demi-cercle ABDC qui paſſe par le point B, puiſque l'angle ABC eſt droit; d'un point quelconque D de la circonférence, je mene deux droites DA, DC aux extrêmités du diamétre, & par conſéquent l'angle ADC étant auſſi droit, les quarrés des droites AD, DC pris enſemble ſont égaux au quarré de leur hypothenuſe AC, mais les quarrés des droites AB, BC pris enſemble ſont auſſi égaux au quarré de la même hypothenuſe; donc $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; & comme il y a une infinité de points dans le quart de circonférence ABD, il eſt viſible qu'en menant de chacun de ces points deux lignes aux extrémités A, C du diamétre, on auroit une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, ſeroient égaux aux deux quarrés donnés.

Quant à tous les points de l'autre quart de cercle DC, il eſt clair que toutes les lignes que l'on meneroit de ces points aux extrémités A, C ſeroient les mêmes deux à deux que celles qui

auroient été menées du quart de cercle ABD, & que par conséquent leurs quarrés seroient les mêmes.

424. COROLLAIRE. *Quoiqu'on puisse trouver une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, soient égaux, on ne trouvera cependant jamais que leurs Racines prises deux à deux soient égales ; mais les deux plus grandes seront les deux égales* AD, DC, *& les autres* AB, BC *seront d'autant moindres que les deux égales* AD, DC, *qu'elles seront plus inégales entr'elles.*

Si l'on veut que les deux inégales AB, BC prises ensemble soient égales à la somme des deux égales AD, DC, je décris du point C, & avec le rayon CD, l'arc DE, ce qui donne CE=DC, & par conséquent BE est l'excès du côté BC sur le côté DC ; de même du point A, & avec le rayon AB, je décris l'arc BR, ce qui donne AB=AR, & par conséquent DR est l'excès de AD ou DC son égale sur AB. Ainsi, afin que les deux AB, BC soient égales aux deux DC, DA, il faut que l'excès BE dont BC surpasse DC soit égal à l'excès DR dont DA surpasse BA. Cela posé.

Nous avons BC = DC + BE, & AB = AD − DR = DC − BE, à cause de AD = DC, & de DR = BE par la supposition ; donc $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + 2BE \times DC + \overline{BE}^2$, & $\overline{AB}^2 = \overline{DC}^2 - 2BE \times DC + \overline{BE}^2$, & ajoutant ensemble ces deux équations, nous aurons $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{DC}^2 + 2\overline{BE}^2$; mais les quarrés de AD, DC, sont $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DC}^2$, donc si la supposition étoit vraye les deux quarrés de AB, BC pris ensemble, surpasseroient la somme des quarrés de AD, DC de deux fois le quarré de BE ; mais il est démontré que les quarrés de AB, BC ne surpassent pas les quarrés de AD, DC ; donc en supposant les racines AB, BC égales ensemble aux racines AD, DC, on les suppose trop grandes.

On démontrera de la même façon que les deux côtés ou racines AH, HC sont ensemble moindres que les deux AB, BC qui sont moins inégales entr'elles.

425. PROBLEME. *Trouver une moyenne proportionnelle à deux Figures données.*

Si les deux Figures données ne sont pas semblables, je les réduits en triangles de même hauteur afin qu'elles soient entr'elles comme les bases de ces triangles, puis prenant une moyenne

proportionnelle entre ces deux bases, je fais sur cette moyenne proportionnelle un triangle de même hauteur que les deux autres, & ce triangle est moyen proportionnel entre les deux autres, & par conséquent entre les deux Figures : Ce qui est évident, puisque les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, & que par la construction les bases sont en proportion continue.

Mais si les deux Figures sont semblables, je prens une moyenne proportionnelle entre deux de leurs côtés homologues, & sur cette moyenne proportionnelle, je décris une Figure semblable, laquelle est aussi moyenne proportionnelle entre les deux autres, car les trois côtés homologues étant en proportion continue, leurs quarrés le seront aussi. Or, ces Figures sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Donc, &c.

426. PROBLEME. *Exprimer en lignes la Raison de plusieurs Figures données.*

Je réduis les Figures données en triangles de même hauteur, & les bases de ces triangles expriment la raison des Figures entr'elles.

De la Géodesie ou division des Figures sur le Terrein.

427. PROBLEME. *Diviser un triangle en tel nombre de parties égales ou inégales en raison donnée que l'on voudra, par des lignes menées de la base au sommet.*

Pour diviser le triangle ABC (*Fig.* 272.) en trois parties égales; je divise la base en trois parties égales aux points E, H, & de ces points menant au sommet les droites EB, HB, le triangle se trouve divisé en trois triangles égaux, à cause qu'ils ont la même hauteur & les bases égales (*N.* 376.).

Et pour diviser le même triangle en trois parties qui soient entr'elles comme les trois parties RS, SM, MN de la droite RN, je divise la base en même raison que la droite RN, & supposant que les points de division soient les points E, H, je mene des droites au sommet B qui divisent le triangle en trois qui sont entr'eux comme leurs bases, & par conséquent comme les droites RS, SM, MN.

428. PROBLEME. *Diviser un triangle* ABC (Fig. 273.) *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes menées d'un point O pris sur le circuit du triangle.*

Si l'on demande trois parties égales, je diviſe le côté BC en trois également aux points D, E, & le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois triangles égaux BAD, DAE, EAC. Je mene la droite OA, & des points D, E, les droites DR, ES paralelles à OA ; enfin, du point O, je mene les droites OR, OS qui diviſent le triangle ABC en trois parties égales.

Car les triangles RDA, RDO qui ont la baſe commune RD, & qui ſont entre les paralelles RD, AO ſont égaux (*N.* 374.), ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune RBD, nous aurons le triangle DAB égal au triangle ORB ; mais DAB eſt le tiers du triangle ABC, donc ORB en eſt auſſi le tiers.

De même les triangles ESA, ESO qui ont la baſe commune ES, & qui ſont entre les paralelles AO, SE ſont égaux ; donc ajoutant la partie commune SEC, les triangles ACE, OSC ſont égaux ; mais AEC eſt le tiers du triangle ABC ; donc OSC en eſt auſſi le tiers, & par conſéquent le quadrilatere ROSA eſt le tiers reſtant.

Et ſi l'on demande que les trois parties ſoient entr'elles comme les parties HP, PQ, QT de la droite HT, je diviſe la droite BC en même raiſon que la droite HT, & j'acheve le reſte comme ci-deſſus.

429. Probleme. *Diviſer un triangle* ABC (Fig. 274.) *en autant de parties qu'on voudra égales ou inégales par des lignes paralelles à la baſe* AC.

Si on demande qu'il ſoit diviſé en trois parties égales, je diviſe le côté AB en trois également aux points E, R ; je prens une moyenne proportionnelle BH entre la droite BA & ſon tiers BE, & je mene HM paralelle à la baſe. Je prens de même une moyenne proportionnelle BN entre la droite BA, & ſes deux tiers BR, & menant la droite NP paralelle à la baſe, le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois parties égales par les paralelles HM, NP.

Car les triangles ſemblables BHM, BAC ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues BH, BA (*N.* 392.) ; or, par la conſtruction, nous avons BE. BH :: BH. BA, donc $\overline{BE}^2 . \overline{BH}^2$ :: BE. BA :: 1. 3 (*N.*393.), & par conſéquent le triangle BHM eſt le tiers du triangle BAC. On prouvera de même que le triangle BNP eſt les deux tiers du triangle BAC ; d'où il ſuit qu'en retranchant de ce triangle le triangle BHM, le reſte

HMNP fera auſſi le tiers du triangle, & par conſéquent le trapezoïde NPCA fera le tiers reſtant.

Si on demande que le triangle ſoit diviſé en trois parties, qui ſoient entr'elles comme les trois parties SQ, QT, TV de la droite SV, je diviſe le côté BA en même raiſon que la droite SV, & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus.

430. PROBLEME. *Diviſer un triangle* ABC (Fig. 275) *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes qui partent d'un même point dans l'aire qui n'eſt pas donné.*

Si l'on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties égales, je prens AR égal à la quatriéme partie de la baſe; du point R, je mene la droite RV paralelle au côté AB, je diviſe RV en deux également en O, & menant les droites OA, OB, le triangle OAB eſt le quart du triangle ABC, car menant la droite RB, les triangles ABO, ABR qui ont la baſe commune AB, & qui ſont entre les paralelles AB, RV ſont égaux; mais ABR eſt le quart du triangle ABC, à cauſe que ces deux triangles ont la même hauteur, & que la baſe AR eſt le quart de la baſe AC; donc le triangle ABO eſt auſſi le quart du triangle ABC.

Maintenant le trapezoïde reſtant AOBC eſt les trois quarts du triangle ABC, & par conſéquent, il faut le diviſer en trois parties égales. Or, dans ce trapezoide les triangles ROC, VOC qui ont les baſes RO, VO égales par la conſtruction & la même hauteur, puiſqu'ils ont le ſommet en C ſont égaux, & les triangles AOR, BOV qui ont auſſi les baſes égales, & qui ſont entre les paralelles AB, RV ſont auſſi égaux; donc les triangles AOC, BOC ſont égaux entr'eux; c'eſt pourquoi diviſant chacune de leurs baſes en trois parties, & menant des points de diviſion des droites au point O, j'ai ſix parties égales, leſquelles priſes deux à deux en donnent trois AOS, SOTC, BOT qui ſont chacune le quart du triangle ABC.

Si on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties qui ſoient entr'elles comme les parties MN, NP PQ, QX de la droite MX, je prens ſur la baſe AC une partie AR, enſorte que j'aye AR. AC :: MN. NX, & achevant le reſte, comme ci-deſſus, le triangle ABO eſt au triangle total ABC, comme MN eſt à MX, & il ne reſte plus qu'à diviſer le trapezoide AOBC en trois parties qui ſoient entr'elles comme les autres parties NP, PQ, QX de la droite MX, par le point O pris ſur ſon circuit; & c'eſt ce que nous allons enſeigner dans le Problême ſuivant.

431. PROBLEME. *Diviser une Figure quelconque* ABCDE (*Fig. 276.*) *en tant de parties que l'on voudra égales ou inégales par des lignes menées d'un point* O *pris sur le circuit.*

Si l'on veut que la Figure soit divisée en trois parties égales ; du point O, je mene à tous les angles les droites OA, OB, OC qui la divisent en triangles ; je change ces triangles en d'autres PMQ, QMR, RMS, SMT qui leur soient égaux chacun à chacun, & qui ayent la même hauteur, c'est-à-dire PMQ=AEO, QMR = AOB, & ainsi de suite, & par conséquent le triangle total PMT est égal à la Figure ABCDE, je divise la base PT en trois également aux points N, L, d'où je mene au sommet M les droites NM, LM qui divisent le triangle PMT en trois autres PMN, NML, LMT égaux entr'eux, à cause des bases égales, & de la hauteur commune.

Maintenant à cause que le point N du tiers PN tombe sur la base QR du triangle QMR = AOB, je divise la base AB du triangle AOB en X en même raison que la base QR est divisée en N, & menant la droite XO, le triangle AOX est au triangle AOB, comme la base AX est à la base AB, mais QMN est au triangle QMR, aussi comme QN est à QR, ou comme AX est à AB, donc AXO. AOB :: QMN. QMR, & à cause de AOB = QMR, nous avons AXO = QMN ; or, EOA = PMQ ; donc EOA + AOX = PMQ + QMN, ou EOXA = PMN ; mais PMN est le tiers du triangle PMT, égal à la Figure ABCDE, donc EOXA est le tiers de cette Figure.

De même à cause que le point L de la seconde division égale NL, tombe sur la base RS du triangle RMS égal au triangle BOC, je divise la base BC de ce triangle en Z en même raison que la base RS est divisée en L, & menant la droite OZ, la partie XOZB est encore un tiers de la Figure ; car à cause de AOB = QMR, & de AOX = QMN, nous avons XOB = NMR ; or, BOZ. BOC :: BZ. BC :: RL. RS, & RML. RMS :: RL. RS ; donc BOZ. BOC :: RML. RMS, & à cause de BOC = RMS, nous avons BOZ = RML, & par conséquent XOB + BOZ = NMR + RML, ou XOZB = NML ; mais NML est le tiers du triangle PMT égal à la Figure ABCDE ; donc XOZB en est aussi le tiers, & par conséquent OZCD est le tiers restant.

Si on veut que la Figure soit divisée dans la raison de trois

lignes inégales, je divise la base PT dans la même raison, & j'acheve le reste comme auparavant.

432. *Remarque.* On voit par-là qu'il est également facile de diviser une Figure en parties égales ou inégales en raison donnée, c'est pourquoi je ne parlerai plus que de la division des Figures en parties égales.

433. Probleme. *Diviser une Figure donnée* ABCD (Fig. 277.) *en tel nombre de parties égales qu'on voudra par un point donné* O *dans l'aire.*

Du point O, je mene à tous les angles les droites OA, OB, OC, OD qui divisent la Figure en triangles. Je change ces triangles en d'autres MEN, NEP, PEQ, QER qui leur soient égaux chacun à chacun, & qui ayent une même hauteur, c'est-à-dire MEN=AOD, NEP=AOB, PEQ=BOC, & QER=COD, & par conséquent le triangle entier MER est égal à la Figure ABCD.

Si l'on veut donc diviser la Figure en trois parties égales, je divise la base MR en trois également aux points H, L, d'où je mene au sommet les droites HE, LE qui divisent le triangle MER en trois triangles MEH, HEL, LER égaux entr'eux, & dont chacun par conséquent est le tiers du triangle MER ou de la Figure ABCD; ainsi à cause que le point H du tiers MH tombe sur la base NP du triangle NEP égal au triangle AOB, je divise la base AB de ce triangle en X, en même raison que NP est divisé en H, & menant la droite XO, la partie DOXA est le tiers de la Figure, ce que l'on démontrera comme dans le Problême précédent. De même à cause que le point L de la seconde division égale HL, tombe sur la base PQ du triangle PEQ égal au triangle BOC, je divise la base BC de ce triangle en Z, en même raison que la base PQ l'est en L, & menant ZO la partie XOZB est encore le tiers de la Figure, & par conséquent DOZC est l'autre tiers.

434. Corollaire. On se servira de la même méthode lorsqu'il faudra diviser un triangle par un point donné dans l'aire, car il faut prendre garde que dans le Problême du nombre 430, le point dans l'aire n'étoit point donné, & qu'il s'agissoit de le trouver, au lieu qu'ici il faut nécessairement s'astreindre au point que l'on donne.

435. Probleme. *Diviser un trapezoïde* ABCD (Fig. 278.) *en autant de parties égales qu'on voudra.*

Si on veut qu'il soit divisé en quatre parties égales, je divise la base inférieure AB en quatre parties égales aux points M, N, R; je divise de même la base supérieure DC en quatre également aux points S, T, X, & menant par les points de division les droites MS, NT, RX, le trapezoïde est divisé en quatre trapezoïdes égaux.

Car le trapezoïde ADSM est égal au produit de la somme de ses deux bases AM, DS par la moitié de sa hauteur (*N. 386.*); or, les trois autres trapezoïdes ont la même hauteur, & les bases égales aux deux AM, DS; donc ils sont égaux au même produit.

436. PROBLEME. *Diviser un trapezoïde* ABCD (Fig. 280.) *par des lignes paralelles à sa base.*

Je prolonge les côtés non-paralelles AD, CB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en E; je réduis le trapezoïde en un triangle MNP qui lui soit égal, & le triangle DEC en un autre PNS qui lui soit égal, & qui ait même hauteur que le triangle MNP; ainsi le trapezoïde ABCD est au triangle DCE comme le triangle MNP est au triangle PNS, ou comme la base MP à la base PS à cause que les deux triangles ont la même hauteur.

Si l'on veut donc que le trapezoïde soit divisé en trois parties égales; je divise la base MP en trois également aux points Q, R, d'où je mene les droites QN, RN qui divisent le triangle MNP en trois parties égales; je prens une moyenne proportionnelle SO entre SP & SR; ensuite une quatriéme proportionnelle EL aux trois lignes SP, SO, ED, & du point L menant LH paralelle à la base AB la partie LHCD est le tiers du trapezoïde.

Car les triangles EDC, ELH étant semblables, sont entr'eux comme les quarrés $\overline{ED}^2$, $\overline{EL}^2$ de leurs côtés homologues; or, par la construction nous avons ED. EL :: SP. SO, donc $\overline{ED}^2$. $\overline{EL}^2$ :: $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$; mais nous avons aussi SP. SO :: SO. SR, donc $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$ :: SP. SR. (*N. 393.*), & par conséquent EDC. ELC :: SP. SR :: SNP. SNR, & divisant EDC. ELC—EDC :: SNP. SNR—SNP, ou EDC. LHCD :: SNP. RNP, mais nous avons EDC = SNP, donc LHCD = RNP, c'est-à-dire, la partie LHCD est égale au triangle RNP qui est le tiers du triangle MNP, ou le tiers du trapezoïde ABCD.

Je prens de même une moyenne proportionnelle SZ entre

SP & SQ, puis une quatriéme proportionnelle ET aux quatre lignes SP, SZ, ED, & menant TV paralelle à la base, la partie TVDC est les deux tiers du trapezoïde ABCD, ce qui se démontre de même que ci-dessus; donc retranchant la partie LHCD qui en est aussi le tiers, le reste TVHL est le tiers, & par conséquent ABVT est le tiers restant.

437. Probleme. *Retrancher d'un triangle* ABC (Fig. 279.) *un triangle égal à un triangle donné* DEF.

Je cherche un triangle HCL égal au triangle DEF, & semblable au triangle ABC (*N.* 414.), & retranchant l'un de l'autre le reste est ABLH.

Des Figures Isopérimetres.

438. Deux ou plusieurs figures qui ont les circuits égaux sont dites *Isopérimetres.*

439. Probleme. *Une figure étant donnée, en faire une autre d'une autre espece qui lui soit isopérimetre.*

Supposé que l'on demande de faire un rectangle isopérimetre au triangle ABC; (*Fig.* 281.) j'ajoûte ensemble les côtés du triangle, en sorte qu'ils forment la ligne droite EL; je coupe cette ligne en deux également en G, & ensuite chacune des moitiés en deux parties inégales, faisant EF=HL, & FG=GH; je prens les deux égales EF, HL pour former les deux bases supérieure & inférieure d'un rectangle MO, & les deux FG, GH pour en former les côtés; ainsi le rectangle MO est isopérimetre au triangle ABC.

440. Corollaire. Il est aisé de voir qu'on pourroit faire de la même façon un quarré, un polygone régulier, &c. isopérimetre au triangle ABC.

441. Probleme. *Un triangle scalene* ABC (Fig. 283.) *étant donné, construire sur la même base* AB *un triangle isoscele isopérimetre au triangle* ABC.

Je prens AD égal à la moitié des deux côtés AC, CB, & je fais sur la base AB un triangle ADB dont les côtés AD, BD soient égaux.

442. Proposition XCVI. *De tous les triangles isopérimetres faits sur une même base, celui qui est isoscele sur cette base est plus grand que ceux qui ne sont pas isosceles, & les autres sont d'autant plus petits que leur côtés sont plus inégaux.*

Soit le triangle ABC (*Fig.* 284.) isoscele sur la base AB, c'est-à-dire dont les côtés AC, CB sont égaux, & le triangle ABE isopérimetre au ttiangle ABC, mais qui n'est pas isoscele sur sa base, ou qui n'a pas les côtés AE, EB égaux. Je prolonge AC en R, faisant AC = CR, & je mene la droite ER; dans le triangle AER les deux côtés AE, ER ptis ensemble, sont plus grands que AR ou que AC, CB, ou enfin, que AE + EB = AC + CB, à cause que les deux triangles ACB, AEB sont isopérimetres, & qu'ils ont la même base, ainsi nous avons AE + ER > AE + EB, & retranchant AE de part & d'autre, nous avons ER plus grand que EB; or, les triangles BCE, ECR, ont le côté CE commun, le côté BC égal au côté CR; mais la base BE est plus petite que la base ER, comme on vient de voir; donc l'angle BCE est plus petit que l'angle ECR, (*N.* 108.) & par conséquent moindre que la moitié de l'angle RCB; mais l'angle RCB externe au triangle ACB, étant égal aux deux internes opposés A & ABC qui sont égaux, est double de l'angle ABC, & menant la droite CS paralelle à AB, l'angle SCB est égal à son alterne ABC, & vaut par conséquent la moitié de l'angle RCB; donc l'angle BCE est moindre que l'angle SCB, & par conséquent le sommet E du triangle ABE tombe en dessous de la paralelle CS; ainsi la hauteur du triangle isoscele ACB est plus grande que celle du triangle AEB; mais ces deux triangles ayant la même base AB, sont entr'eux comme leur hauteur; donc le triangle ACB est plus grand que le triangle AEB.

On démontrera de la même façon que le triangle AFB isopérimetre au triangle AEB; mais dont les côtés AF, FB sont plus inégaux entr'eux que les côtés AE, EB, est moindre que le triangle AEB, & ainsi des autres.

443. COROLLAIRE. *Si deux triangles isosceles & isopérimetres* ABC, AEC (Fig. 285.) *ont un côté* AC *commun, celui qui est isoscele sur ce côté; c'est-à-dire le triangle* ABC *qui a ses deux angles égaux sur* AC, *est plus grand que celui qui n'est pas isoscele sur ce côté; c'est-à-dire que le triangle* AEC *qui a ses angles égaux sur* CE *& non pas sur* AC. Ce qui se démontre de même que ci-dessus; car le triangle AEC considéré par rapport à la base AC, est scalene, puisque ces côtés AE, EC sont inégaux, au lieu que le triangle ABC, considéré par rapport à la même base est isoscele.

444. PROPOSITION XCVII. *Si deux triangles isopérimetres & isosceles* AEC, ABC (Fig. 285.) *ont un côté commun* AC, *celui*

dont la différence de la base à chacun de ses côtés égaux ; est moindre ; est plus grand que celui dont la différence de la base à chacun de ses côtés égaux, est plus grande.

Soit le triangle isoscele ACE dont les côtés égaux sont AE ; AC, & la base est EC que nous supposerons plus grande que le côté AE ou AC ; si je veux faire sur AC un triangle isopérimetre au triangle AEC & isoscele sur AC, il faut que des deux côtés inégaux AE, EC, jen fasse deux égaux AB, BC, & pour cela, je dois prendre la moitié de l'excès de EC sur AE, & le donner à AC ; ainsi dans le nouveau triangle ABC le côté AB ou BC sera plus grand que AC de la moitié de l'excès de CE sur AE ou AC, & par conséquent la différence de la base AC de ce nouveau triangle à son côté BC ou BA, sera moindre que dans le triangle ACE, la différence de la base CE au côté AC ; or, le nouveau triangle ABC étant isoscele sur le côté commun AC, est plus grand que le triangle AEC qui n'est pas isoscele sur ce côté, donc, &c.

Si dans le triangle AEC la base EC étoit plus petite que le côté AE ou AC, il seroit facile de faire la même démonstration.

445. Proposition XCVIII. *De tous les triangles isopérimetres, celui qui est équilatéral est le plus grand.*

Soit le triangle scalene ABC, (*Fig.* 286.) je fais sur sa base AB un triangle isoscele ADB, & isopérimetre à ABC, & par conséquent ADB est plus grand que ACB. (*N.* 442.) Je fais sur le côté AD du triangle isoscele ADB un triangle isopérimetre & isoscele DEA, & ce triangle DEA étant isoscele sur DA, est plus grand que ADB qui n'est pas isoscele sur DA, (*N.* 443.) & la différence de sa base AD à ses côtés AE, DE est moindre que dans le triangle ADB, la différence de la base AB à ses côtés AD, DB. (*N.* 444.) Je fais de même sur ED un triangle isoscele EOD & isopérimetre au triangle DEA ; ainsi ce dernier triangle EDO est plus grand que le triangle DEA, & la différence de sa base à ses côtés est moindre ; donc, puisqu'à mesure que la différence de la base aux côtés diminuë, le triangle isopérimetre devient plus grand ; il s'ensuit que quand cette différence sera nulle ; c'est-à-dire quand le triangle isopérimetre sera équilatéral, ce triangle sera le plus grand de tous les isopérimetres.

Si l'on prend un autre triangle scalene isopérimétre au triangle ACB ; mais de différente base, & qu'on fasse le même raisonnement, on trouvera que le triangle équilatéral isopérimetre à ce

triangle, sera le plus grand ; or, on ne peut trouver qu'un seul triangle équilatéral isopérimetre à plusieurs isopérimetres, donc il est vrai en général que de tous les triangles isopérimetres de mêmes bases ou de bases inégales, l'équilatéral est le plus grand.

446. PROPOSITION XCXIX. *De tous les paralellogrammes isopérimetres qui ont la même base* AB (Fig. 287.), *le plus grand est le rectangle* ADCB, *& les autres sont d'autant moindres qu'ils ont des angles plus aigus.*

Du point A pris pour centre & avec le rayon AD, je décris un demi-cercle MDN, & du même point menant le rayon AE à un point de la circonférence E différent de D, j'acheve le paralellogramme AEGB, lequel est isopérimetre au rectangle ADCB, puisqu'ils ont la base commune AB, & le côté AE égal au côté AD, à cause que ce sont des rayons d'un même cercle. Or, le point D étant le point de la circonférence le plus éloigné du diamétre MN, la hauteur AD du rectangle ADCB est plus grande que la hauteur EF du paralellogramme AEGB ; donc le rectangle est plus grand que le paralellogramme, puisque ces Figures ayant même base sont entr'elles comme leurs hauteurs.

Si l'on prend sur la circonférence un point H plus éloigné de D que le point E, & qu'ayant mené le rayon AH on achève le paralellogramme AHLB, on démontrera aisément que ce paralellogramme est moindre que le paralellogramme AEGB, & ainsi des autres.

447. PROPOSITION C. *De tous les rectangles isopérimetres, le plus grand est le quarré* ABCD (Fig. 288.), *& les autres sont d'autant moindres que leurs côtés sont plus inégaux.*

Je retranche de la hauteur AB la partie BR, & j'ajoute à la base AD la partie AE égale à BR, & achevant le rectangle EFHD, le quarré ABCD, est isopérimetre au rectangle EFHD qui a gagné sur la longueur de la base, ce qu'il a perdu sur la hauteur. Or, les rectangles BRHC, EARF ayant les bases BR, EA égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs RH, AR, & RH est plus grande que AR, donc le rectangle BRHC est plus grand que le rectangle EARF, & ajoutant la partie commune ARHD, nous avons ABCD plus grand que EFHD. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Je retranche de la hauteur AR ou EF du rectangle EFHD une partie FN, & j'ajoute à sa base ED une partie ES égale à FN ; ainsi achevant le rectangle STVD, ce rectangle STVD est

iſopérimetre au rectangle EFHD ; or, les rectangles FNHV, TNES ayant les baſes FN, SE égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs FH, EN, & FH eſt plus grand que EN ; donc le rectangle FNHV eſt plus grand que le rectangle TNES, & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ENVD, le rectangle EFHD eſt plus grand que le rectangle STVD dont les côtés ſont plus inégaux. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

448. Proposition CI. *Si deux triangles rectangles* ABC, RCD *ſont ſemblables* (Fig. 289.), *je dis que le quarré d'une ligne composée des deux hypothenuſes* BC, CD, *eſt égal au quarré d'une ligne composée des deux côtés homologues* AB, CR, *plus au quarré d'une autre ligne composée des deux autres côtés homologues* AC, RD.

Je joints en ligne droite les hypothenuſes BC, CD, & à cauſe de l'angle ABC égal à l'angle RCD, les lignes AB, RC ſont paralelles, de même que les lignes AC, RD, à cauſe des angles égaux ACB, RDC. Je prolonge BA juſqu'à la rencontre de DR prolongée en P ; ainſi les droites AC, PR paralelles entre les paralelles BP, CR ſont égales, & par la même raiſon les droites AP, CR le ſont auſſi, & le triangle BPD eſt rectangle ; donc $\overline{BD}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PD}^2$; c'eſt-à-dire le quarré de la ligne BP égale aux deux hypothenuſes, eſt égal au quarré de la ligne BP ou BA + RC, plus au quarré de la ligne PD ou RD + AC.

449. Probleme. *Deux triangles iſoſceles* ABC, CDE *d'inégales baſes & qui ne ſont pas ſemblables entr'eux étant donnés* (Fig. 290.), *conſtruire ſur les mêmes baſes deux autres triangles iſoſceles & ſemblables entr'eux* AHC, CRE *dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE *ſoient enſemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des triangles donnés pris enſemble.*

J'ajoute en ligne droite les côtés AB, CD des triangles donnés ; je coupe la ſomme MN en S en même raiſon que la ſomme AE de leurs baſes, eſt coupée en C ; je prens deux droites égales chacune à la grande partie MS, & je conſtruis avec ces deux lignes & la grande baſe AC un triangle iſoſcele AHC. Je prens de même deux lignes égales chacune à la petite partie SN, & je conſtruis avec ces deux lignes & la petite baſe CE un triangle iſoſcele CRE ; ainſi les deux triangles iſoſceles AHC, CRE ſont ſemblables, car nous avons AH. CR :: MS. SN :: AC. CE, & de plus leurs quatre côtés pris enſemble ſont égaux aux quatre côtés

côtés des triangles donnés, puisque nous avons $AH+CR = MS+SN = MN = AB+CD$.

450. Proposition CII. *Deux triangles isosceles* ABC, CDE *non-semblables étant donnés sur des bases inégales ou égales* AC, CE (Fig. 291.), *si sur les mêmes bases on fait deux triangles isosceles* AHC, CRE *semblables entr'eux, & dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE *soient ensemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des triangles donnés, je dis que les deux triangles semblables* AHC, CRE, *pris ensemble seront plus grands que les deux* ABC, CDE *pris ensemble.*

Des sommets H, D, j'abaisse les perpendiculaires HP, DQ qui passeront par les autres sommets B, R, à cause que les quatre triangles sont isosceles sur les bases AC, CE; je prolonge la perpendiculaire DQ du plus grand des deux triangles donnés, faisant $QL = DQ$; du sommet B de l'autre triangle donné, je mene la droite BL, & du point L la droite LC. Les deux triangles rectangles CQD, CQL ayant le côté CQ commun, & le côté DQ égal à QL, sont parfaitement égaux, & par conséquent nous avons $LC = CD$, & $BC+CL = BC+CD = HC+CR$. Or, dans le triangle BCL les deux côtés BC, CL étant ensemble plus grands que le côté BL, le quarré d'une ligne composée des deux BC, CL, ou des deux HC, CR est donc plus grand que le quarré de BL, & par conséquent nous avons $\overline{HC+CR}^2 > \overline{BL}^2$.

Les triangles rectangles HPC, RQC étant semblables à cause de l'angle aigu HCP égal à l'angle aigu RCQ, le quarré d'une ligne composée de leurs hypothenuses HC, CR est égal au quarré d'une ligne composée des deux côtés HP, RQ, plus au quarré de la ligne PQ composée des deux autres côtés PC, CQ (*N.*448.), ainsi nous avons $\overline{HC+CR}^2 = \overline{HP+RQ}^2 + \overline{PQ}^2$.

De même les triangles rectangles PBS, SLQ étant semblables le quarré de la ligne BL composée des deux hypothenuses BS, SL est égal au quarré d'une ligne composée des deux côtés BP, QL ou QD, plus au quarré de la ligne PQ composée des deux autres côtés PC, CQ, & par conséquent $\overline{BL}^2 = \overline{BP+QD}^2 + \overline{PQ}^2$; or, nous avons trouvé $\overline{BL}^2$ plus petit que $\overline{HC+CR}^2$, donc $\overline{BP+QD}^2 + \overline{PQ}^2$ est plus petit que $\overline{HC+CR}^2$, ou que son égal $\overline{HP+RQ}^2 + \overline{PQ}^2$; retranchant donc $\overline{PQ}^2$ de part & d'autre, nous

aurons $\overline{BP+QD}^2$ plus petit que $\overline{HP+RQ}^2$, donc en tirant la racine quarrée de part & d'autre, nous aurons BP+QD plus petit que HP+RQ, c'est-à-dire les hauteurs des deux triangles non-semblables, font ensemble moindres que les hauteurs des deux triangles semblables, d'où il suit que l'excès HB de la hauteur HP du triangle AHC sur la hauteur PB du triangle ABC est plus grand que l'excès DR de la hauteur DQ du triangle CDE sur la hauteur RQ du triangle CRE. Cela posé.

Le triangle ABC est $\frac{1}{2}$AC×PB, & le triangle CDE est $\frac{1}{2}$CE×DQ (*N.* 375.), & leur somme est $\frac{1}{2}$AC×PB+$\frac{1}{2}$CE×DQ, au contraire le triangle AHC est $\frac{1}{2}AC\times\overline{PB+BH}$, & le triangle CRE est $\frac{1}{2}CE\times\overline{QD-DR}$, & leur somme est $\frac{1}{2}AC\times\overline{PB+BH}+\frac{1}{2}EC\times\overline{QD-DR}$, comparant donc cette somme avec la précédente $\frac{1}{2}$AC×PB+$\frac{1}{2}$CE×DQ, il est aisé de voir que le triangle AHC gagne sur le triangle ABC, une quantité $\frac{1}{2}$AC×BH plus grande que la quantité $\frac{1}{2}$EC×DR que le triangle CRE perd par rapport au triangle CDE, puisque $\frac{1}{2}$AC est plus grand que $\frac{1}{2}$CE, & BH plus grand que DR; donc les deux triangles semblables AHC, CRE, font ensemble plus grands que les non-semblables ABC, CDE.

451. **Proposition CIII.** *De toutes les Figures isopérimetres d'un même nombre de côtés, la plus grande est celle qui est équilaterale, & équiangle.*

Soit la Figure de cinq côtés ABCDE (*Fig.* 292.), qui n'est pas équilatérale, & dont les côtés inégaux sont EA, AB; je mene la droite EB, & je fais sur cette base un triangle isoscele ERB dont les deux côtés ER, RB pris ensemble soient égaux aux côtés EA, AB pris ensemble; ainsi le triangle ERB est plus grand que le triangle EAB (*N.* 442.), & ajoutant la partie commune EDCB, la Figure REDCB est plus grande que la Figure AEDCB. Donc toute la Figure irréguliére dans ses côtés n'est pas la plus grande des Figures isopérimetres d'un même nombre de côtés.

Soit donc la Figure ABCDE (*Fig.* 293.) réguliere dans ses côtés, mais qui a des angles inégaux EDC, EAB; je mene les droites EC, EB, & faisant sur ces droites prises pour bases deux triangles isosceles semblables ERC, EHB, & dont les quatre côtés soient ensemble égaux aux quatre côtés des triangles EDC,,

EAB, les deux triangles ERC, EHB, font ensemble plus grands que les deux EDC, EAB (*N.* 450.), & ajoutant de part & d'autre la partie commune EBC, la Figure ERCH est plus grande que la Figure EDCBA, donc toute Figure irréguliere dans ses angles n'est pas la plus grande des Figures isopérimetres d'un même nombre de côtés.

Or, entre toutes les figures isopérimetres d'un même nombre de côtés, il faut nécessairement qu'il y ait une plus grande, à cause qu'un contour donné ne peut pas enfermer un espace qui devienne toujours plus grand, & nous venons de trouver que toutes celles qui ne sont pas régulieres ne sauroient être les plus grandes, donc la Figure réguliere dans ses côtés & dans ses angles est la plus grande de toutes.

452. PROPOSITION CIV. *Un angle droit* ABC *étant donné* (Fig. 294.) *si l'on divise l'un de ses côtés* BA *en parties égales* BD, DE, EF, &c. *& que de tous les points de division on mene des droites* DC, EC, FC, &c. *à un point quelconque* C *de l'autre côté* BC, *je dis que les angles* DCB, ECB, FCB, &c. *iront en diminuant à mesure qu'ils s'éloigneront du premier* DCB.

Du point C pris pour centre, & de l'intervalle CD, je décris un arc de cercle qui coupe les lignes voisines de CD, l'une en R & l'autre en H; ainsi à cause que l'inclinée CD est plus grande que la perpendiculaire CB, j'ai CH=CD plus grand que CB; & à cause que l'oblique CE est plus grande que l'oblique CD qui est moins éloignée de la perpendiculaire CB, j'ai CR = CD moindre que CE; or, les triangles CDB, CED ayant la hauteur commune CB, & les bases DB, DE égales sont égaux entr'eux, & le secteur CDH est plus grand que le triangle CDB, au lieu que le secteur CRD est moindre que le triangle CED, donc le secteur CDH est plus grand que le secteur CRD; mais ces deux secteurs sont comme leurs arcs DH, DR, ou comme les angles DCH, DCR qui sont mesurés par ces arcs, donc l'angle DCH est plus grand que l'angle DCR, & on prouvera de la même façon que l'angle FCE est moindre que l'angle ECD.

453. COROLLAIRE. *Donc les angles* DCB, ECD, FCE, &c. *ne sont pas dans la raison des bases* DB, ED, FE, &c. *des triangles* DCB, ECD, &c. car ces bases sont égales, & les angles au contraire vont en diminuant.

454. PROPOSITION CV. *Si deux polygones réguliers* ABCDE, FGHLMN (Fig. 295.) *de différentes especes sont isopérimetres, le*

côté AB *du premier est au côté* FG *du second, réciproquement comme le nombre des côtés du second, est au nombre des côtés du premier, &* *l'angle au centre* AOB *est à l'angle au centre* FPG *dans la même raison que le côté* AB *est au côté* FG, *c'est-à-dire encore réciproquement comme le nombre des côtés du second au nombre des côtés du premier.*

Le côté AB, est la cinquiéme du circuit ABCDE, & le côté FG est la sixiéme partie du circuit FGHLMN; mais ces deux circuits sont égaux, donc AB est à FG, comme $\frac{1}{5}$ est à $\frac{1}{6}$, & réduisant ces fractions au même dénominateur, ce qui donnera $\frac{6}{30}$ & $\frac{5}{30}$, nous aurons AB est à FG, comme $\frac{6}{30}$ & à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 est à 5; c'est-à-dire comme le nombre 6 des côtés du second est au nombre 5 des côtés du premier.

De même à cause que tous les angles au centre d'un polygone valent quatre angles droits, l'angle au centre AOB, est la cinquiéme partie de quatre droits & l'angle au centre FPG en est la sixiéme partie; donc ces deux angles sont entr'eux comme $\frac{1}{5}$ est à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{6}{30}$ est à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 est à 5, & par conséquent dans la même raison de AB à FG, ou du nombre des angles du polygone FGHLM au nombre des angles du polygone ABCDE.

455. PROPOSITION CVI. *Deux Polygones réguliers isopérimetres, mais de differens nombres de côtés étant donnés, le plus grand est celui qui a un plus grand nombre de côtés.*

Soit le pentagone régulier ABCDE (*Fig.* 296.) isopérimetre à l'exagone régulier FGNTVM; le côté AB du pentagone est donc au côté FG de l'exagone, comme 6 à 5 (*N.* 454.), & par conséquent si le côté AB est divisé en 6 parties égales, le côté FG en contiendra cinq. Je prens la moitié de l'une de ces parties que je porte de A en H, & l'autre moitié de B en L, & je mene les lignes HO, LO, & l'apothême OQ, ainsi puisque AB contient 6 parties égales & doubles chacune de la partie AH, la ligne AQ qui est la moitié de AB contiendra six moitiés de ces parties égales, c'est-à-dire six parties égales à AH; concevant donc que AQ soit divisé en ces 6 parties égales, & que de tous les points soient menées au point O des droites, le triangle AOQ sera divisé en 6 petits triangles égaux, chacun au triangle AOH; mais comme les angles au sommet O de ces six triangles iront en diminuant à mesure que leurs bases s'éloigneront de OQ (*N.* 452.), l'angle AOH sera moindre que la sixiéme partie de l'angle AOQ, & par la même raison l'angle BOL égal à l'angle AOH sera aussi moindre que la sixiéme partie

de l'angle QOL ; ainsi l'angle HOL sera plus grand que les cinq sixiémes de l'angle AOB, c'est-à-dire que HOL sera plus grand par rapport à l'angle AOB que 5 par rapport à 6. Or, l'angle FRG est à l'angle AOB, comme 5 à 6 ; donc l'angle HOL sera plus grand que l'angle FRG, & par conséquent dans le triangle isoscele HOL les deux angles sur la base OHL, OLH seront plus petits que les deux angles RFG, RGF sur la base du triangle isoscele RFG. Faisant donc sur FG deux angles SFG, SGF égaux aux deux angles OHL, OLH, il est clair que les deux côtés FS, SG étant plus inclinés sur la base que les deux FR, GR se couperont en un point S plus proche de la base que le point R où se coupent les deux FR, GR ; & que par conséquent le triangle FSG aura la hauteur SP plus petite que la hauteur RP du triangle FRG ; mais les triangles HOL, FSG étant semblables & égaux ont les hauteurs égales OQ, SP ; donc OQ est plus petit que RP. Or, le pentagone ABCDE est égal au produit de son circuit multiplié par la moitié de son apotheme OQ (*N.* 377.), & l'exagone FGNTVM est égal au produit de son circuit par la moitié de son apotheme, donc à cause de l'égalité des deux circuits, ces deux polygones sont entr'eux comme la moitié de leurs apothemes, ou comme leurs apothèmes, & par conséquent le pentagone est plus petit que l'exagone qui a plus de côtés de lui. Et on démontrera la même chose à l'égard de deux autres polygones réguliers isopérimetres de différens nombres de côtés.

456. COROLLAIRE. *De tous les Polygones réguliers, le cercle étant celui qui contient un plus grand nombre de côtés, il s'ensuit que de tous les Polygones reguliers isopérimetres, le cercle est plus grand.*

457. *REMARQUE.* De tout ce que nous venons de dire touchant les Figures isopérimetres, on en peut aisément conclure que tous les Magazins que l'on construit dans les Places pour les munitions de guerre & de bouche, les quarrés contiennent davantage que ceux qu'on fait en quarré long en supposant le même circuit, & que les circulaires sont ceux qui contiennent le plus. On pourroit ajouter, en faveur de ces derniers, que la Figure de leurs couvertures, les garantit beaucoup plus que tous les autres du choc direct des Bombes.

CHAPITRE X.

De la Steréométrie, ou de la Mesure des Solides, de leurs Surfaces & de leurs rapports.

Des différentes positions des Lignes à l'égard des Plans, & de celles des Plans entr'eux.

458. On dit qu'une ligne droite est *sur un Plan* lorsque toutes ses parties sont dans ce Plan.

459. *Si deux points* R, S (Fig. 297.) *d'une ligne droite sont sur un Plan* ABCD, *toutes les parties de cette ligne, même prolongée à l'infini, seront dans ce Plan aussi prolongé à l'infini.* Du point R par le point S menez dans le plan ABCD, la droite RS; ce que l'on peut faire, puisque toutes les parties de ce plan ne haussent ni ne baissent pas plus les unes que les autres; cette ligne RS aura tous ses points sur le plan; or, du point R au point S on ne peut mener qu'une seule ligne droite; donc il n'est pas possible qu'une autre ligne droite qui a les points R, S sur le plan ABCD, ait quelqu'un de ses points entre R & S qui ne soient pas sur ce plan; & il est évident que si l'on prolonge la ligne droite RS de part & d'autre en Z & en X tous les points de cette ligne seront encore sur le plan ABCD, prolongé s'il le faut.

460. *Deux lignes droites* AB, CB *qui se coupent en* B (Fig. 298.) *sont dans un même plan.*

Je mene la droite AC, & la faisant mouvoir toujours paralellement à elle-même jusqu'en B, le long de la droite AB, elle décrit par son mouvement une surface ACEB; or, les points C, B de la droite BC sont dans cette surface; donc toute la ligne BC est dans le plan ACEB de même que la ligne AB.

461. *Donc les trois lignes d'un triangle* ABC *sont dans un même plan.*

462. Une ligne qui n'a que l'un de ses points dans un plan prolongé même à l'infini, est dite perpendiculaire sur ce plan, lorsqu'elle est également inclinée vers tous les côtés de ce plan.

463. *Si une ligne* AB (Fig. 299.) *est perpendiculaire sur deux*

lignes TN, SR *qui sont dans un même plan* CDEF, *& qui se coupent en* A; *je dis que la ligne* AB *est perpendiculaire sur ce plan.* Je prens sur les lignes TN, SR des parties égales AS, AT, AR, AN; les droites BS, BR, BT, BN menées du sommet A aux extrêmités de ces quatre parties, seront égales entr'elles à cause que AB est perpendiculaire sur TN & sur SR; ainsi menant dans le plan les droites ST, NR, les triangles SBT, NBR seront égaux entr'eux, de même que les triangles isosceles SAT, NAR qui ont les angles au sommet égaux; je mene dans le plan par le point A une droite PQ qui se termine sur les droites ST, NR; les triangles PAT, NAQ ayant l'angle PAT égal à l'angle NAQ qui lui est opposé au sommet, l'angle PTA égal à l'angle ANQ, à cause des deux triangles isosceles & égaux SAT, NAR, & le côté TA égal au côté AN sont semblables & égaux; donc PT=NQ, PA=AQ; de même les triangles PTB, QNB ayant le côté PT égal au côté NQ, le côté TB égal au côté NB, & l'angle compris PTB égal à l'angle compris QNB, à cause des triangles isosceles égaux SBT, NBR, sont parfaitement égaux, donc PB=BQ, & par conséquent à cause de PA=AQ, la ligne AB est aussi perpendiculaire sur PQ, & on démontrera de la même façon que AB est aussi perpendiculaire sur toutes les lignes menées par le point A; donc cette ligne est perpendiculaire sur le plan.

464. *D'un même point* A, (Fig. 299.) *on ne peut élever sur un même plan qu'une seule perpendiculaire* AB; toute autre inclinera nécessairement plus d'un côté que d'un autre.

465. *Si deux ou plusieurs lignes sont perpendiculaires sur un même plan, elles sont paralelles entr'elles.* Soient les lignes AB, EF, CD (*Fig.* 300.) perpendiculaires au plan MNOP, je mene par leurs extrêmités les lignes droites AE, EC, AC. Je fais mouvoir la ligne AB toujours paralellement à elle-même le long de AE; & comme dans ce mouvement elle n'incline pas plus d'un côté que de l'autre, il est clair que lorsqu'elle sera arrivée en E, elle sera encore perpendiculaire sur le plan; donc elle tombera sur la ligne EF; car autrement, du même point E on pourroit élever sur le même plan deux perpendiculaires; ce qui est impossible (*N.* 464.). Je prouverois de même qu'en faisant avancer la ligne EF toujours paralellement à elle-même le long de la ligne EC; elle tombera sur CD lorsqu'elle sera parvenuë en C, & qu'en faisant mouvoir CD le long de CA, elle tombera sur AB lorsqu'elle



sera parvenuë en A; d'où il est aisé de conclure que les trois lignes AB, EF, CD sont paralelles.

466. *Il suit delà que deux lignes paralelles* AB, EF *sont dans un même plan.* Car menant la ligne AE qui joint leurs extrémités, & faisant ensuite mouvoir la ligne AB toujours paralellement à elle-même le long de AE, elle doit tomber sur EF lorsqu'elle sera parvenuë en E, supposé qu'elle soit paralelle à EF; mais AB, pendant ce mouvement, décrira un plan; donc EF sera dans ce plan.

467. Il suit encore delà, que *si deux ou plusieurs lignes sont paralelles entr'elles, & que l'une d'entr'elles soit perpendiculaire sur un plan, les autres seront aussi perpendiculaires sur le même plan.*

468. *Si trois lignes égales* AB, CD, EF (Fig. 301.) *sont perpendiculaires sur un plan, & que leurs extrémités* A, E, C, *ne soient pas en ligne droite, le plan qui passera par les extrêmités supérieures* B, F, D *sera paralelle au plan* MNOP. Je mene dans le plan MNOP les droites AE, EC, AC; les lignes AB, EF étant perpendiculaires sur le même plan MNOP sont paralelles entr'elles, (*N.* 465.) & à cause qu'elles sont égales, les droites AE, BF sont aussi paralelles & égales; par la même raison, les droites EC, FD sont paralelles & égales de même que les droites AC, BD; donc les trois côtés du triangle BFD, étant paralelles chacun à chacun aux trois côtés du triangle AEC, ces deux triangles sont paralelles; & par conséquent le triangle BFD est paralelle au plan MNOP.

469. *Si une ligne* AB (Fig. 302.) *est perpendiculaire sur deux plans* MNOP, RHTX, *ces deux plans sont paralelles.* Je mene par le point A dans le plan MNOP la droite AC, & la droite AB venant à se mouvoir toujours paralellement à elle-même le long de la droite AC, est toujours perpendiculaire sur le plan MNOP, & son extrêmité B décrit une droite BS sur laquelle AB est aussi toujours perpendiculaire; or, je dis que BS doit être dans le plan RHTX; car si cela n'étoit pas, ce plan couperoit la droite CS en un autre point quelconque E; ainsi menant dans ce plan la droite BE, la droite CS perpendiculaire sur SB, seroit nécessairement oblique sur BE, & par conséquent sur le plan RHTX; ce qui est contre la supposition.

470. *Si deux plans sont paralelles entr'eux, toutes les perpendiculaires menées entre ces deux plans, sont égales.* Ce qui est évident, puisque

puisque les deux plans sont toujours à égale distance, & que les distances se mesurent par les perpendiculaires.

471. PROBLEME. *D'un point donné* A (Fig. 303.) *hors d'un plan* MNOP, *abaisser une perpendiculaire sur ce plan.*

Je mene dans le plan une ligne quelconque RQ; du point donné A, j'abaisse sur cette ligne une perpendiculaire AS; du point S je mene dans le plan MNOP une droite ST perpendiculaire sur RQ, & du point A j'abaisse sur ST la perpendiculaire AT qui sera perpendiculaire sur le plan MNOP.

Car la droite RS étant perpendiculaire sur les deux côtés TS, SA du triangle TSA, est par conséquent perpendiculaire sur ce triangle; (*N.* 463.) ainsi menant dans le plan MNOP la droite XT perpendiculaire sur TS; cette droite XT étant paralelle à RS, sera aussi perpendiculaire sur le triangle TSA, (*N.* 467.) & par conséquent sur le côté TA de ce triangle; donc puisque TA est perpendiculaire sur XT, & qu'elle l'est aussi sur TS par la construction, & que XT, TS sont dans le même plan MNOP; il s'ensuit que TA est perpendiculaire sur le plan (*N.* 463.).

472. PROBLEME. *D'un point donné* T *sur un plan* MNOP, (Fig. 304.) *élever une perpendiculaire sur ce plan.*

D'un point quelconque A pris hors du plan, j'abaisse une perpendiculaire AS, & ensuite du point T, menant TX paralelle à SA, cette droite TX est perpendiculaire sur le plan (*N.* 467.).

473. Si une ligne droite est inclinée sur un plan, le plus petit angle qu'elle fait avec ce plan, se nomme *Angle d'inclinaison* de la ligne sur le plan.

474. PROBLEME. *Une ligne* AB (Fig. 305.) *étant inclinée sur un plan*, MNOP, *trouver son angle d'inclinaison sur ce plan.*

De l'extrêmité B de cette ligne, j'abaisse sur le plan la perpendiculaire BC; & du point C menant la droite AC dans le plan, l'angle BAC est l'angle d'inclinaison; ce que je démontre ainsi.

Du point A pris pour centre, & avec le rayon AC, je décris dans le plan MNOP le cercle CDEHS, & du point A je conçois qu'il soit mené à la circonférence une infinité de rayons AD, AE, AH &c. qui formeront tous avec la droite BA différents angles BAD, BAE, &c. Je mene la droite BD, & le triangle BCD est rectangle; car la droite BC étant perpendiculaire sur MNOP, est aussi perpendiculaire sur les droites AC, CD qui sont dans ce plan, & qui passent par le point C; ainsi BD est plus grand que

BC. Or, les triangles ABC, ABD ont le côté AB commun, le côté AC égal au côté AD, parce que ces deux côtés sont rayons d'un même cercle; mais la base BC de l'un, est moindre que la base BD de l'autre; donc l'angle BAC est moindre que l'angle BAD; (*N.* 109.) & on prouvera de même que l'angle BAE est plus grand que l'angle BAC, & ainsi des autres. Donc l'angle BAC étant le moindre des angles que la ligne BA fait avec les lignes menées par le point A dans le plan MNOP, est l'angle d'inclinaison de la ligne BA sur ce plan.

475. Il suit delà, 1°. *Que l'angle* BAH *qui est l'angle de suite de l'angle d'inclinaison* BAC, *est le plus grand de tous les angles que la ligne* BA *fait avec le plan.* 2°. *Que de tous les autres angles qui sont entre le plus grand* BAH *& le moindre* BAC; *ceux qui s'approchent plus du grand sont plus grands que ceux qui s'en éloignent davantage; & enfin qu'on peut toujours trouver deux angles égaux, moindres que le plus grand* BAH, *& plus grand que le moindre* BAC; *mais qu'on n'en trouvera jamais trois d'égaux.* Je mene la droite CE dans le plan, & la droite EB au sommet B de la perpendiculaire; ainsi le triangle EBC sera rectangle de même que le triangle DCB; mais à cause que ces deux triangles ont le côté BC commun, & que le côté CD est moindre que le côté CE, puisque l'arc CD est moindre que l'arc CE; il s'ensuit que le côté EB du triangle rectangle EBC, est plus grand que le côté BD du triangle rectangle BDC; or, les triangles ABE, ABD ayant le côté AB commun, le côté AE égal au côté AD, & la base EB plus grande que la base BD. Il est clair que l'angle BAE qui s'éloigne plus de l'angle d'inclinaison BAC, est plus grand que l'angle qui s'en éloigne moins; & continuant le même raisonnement, on prouvera que l'angle BAH qui est l'angle de suite de l'angle d'inclinaison BAC, est le plus grand de tous ceux qui sont faits par la ligne AB avec les rayons menés du centre sur la demi circonférence HEC; & quant à ceux qui seront faits par la même ligne AB avec les rayons menés du centre sur l'autre demi circonférence HSC; il est facile de démontrer qu'ils seront égaux chacun à chacun à ceux qui auront été faits avec les rayons de la demi circonférence HEC.

476. *Il suit encore delà, que l'angle* BAC *d'inclinaison d'une ligne* BA *sur un plan, est dans un plan* BAC *perpendiculaire sur le plan* MNOP. Car la droite BC étant perpendiculaire sur le plan

MNOP, le triangle ABC dans lequel eſt la droite BC, eſt auſſi perpendiculaire ſur ce plan.

477. *Si deux plans* ABCD, EFGH *ſe coupent* (Fig. 306.) *leur commune ſection eſt une ligne droite.*

Le plan ABCD n'eſt autre choſe que la ſomme de ſes élémens DC, RX, RX, &c. de même que le plan EFGH n'eſt autre choſe qne la ſomme de ſes élémens FG, SZ, SZ, &c. donc quand ces plans viennent à ſe couper, les élémens de l'un coupent les éléments de l'autre ; or, les éléments étant des lignes ne ſe coupent qu'en un point ; donc la ſection des deux plans eſt une ſuite de points M, O, O, O &c. N, & par conſéquent une ligne ; mais cette ligne en tant qu'elle appartient au plan ABCD, ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de G ni du côté de F, & en tant qu'elle appartient au plan EFGH, elle ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de C ni du côté de D ; donc il faut néceſſairement qu'elle ſoit une ligne droite.

478. *Si deux plans* ABCD, EFGH *qui ſe coupent* (Fig. 307.) *ſont perpendiculaires ſur un plan* MNOP, *leur commune ſection* RS *eſt perpendiculaire ſur ce plan.* Car en tant que RS appartient au plan ABCD perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus ſur le plan MNOP du côté de E, que du côté de H, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur EH ; de même en tant que RS appartient au plan EHGF auſſi perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus du côté de A que du côté de B ; donc puiſque RS eſt perpendiculaire ſur les deux lignes EH, AB qui ſont dans le plan MNOP, elle eſt perpendiculaire ſur ce plan (*N.* 463.).

479. *Si les côtés* AB, BC (Fig. 308.) *d'un angle* ABC *qui eſt dans un plan* ABC, *ſont paralelles aux côtés* DE, EF *d'un autre angle* DEF *qui eſt dans un autre plan* DEF ; *ces deux angles* ABC, DEF *ſont égaux.* Je joins les ſommets par la droite BE, & faiſant avancer l'angle ABC toujours paralellement à lui-même, le côté AB tombe néceſſairement ſur ſa paralelle DE, & le côté BC ſur ſa paralelle BC ; d'où il ſuit que les deux angles ſont égau

480. *L'angle d'inclinaiſon de deux plans* ABED, BEFC (Fig. 309.) *qui ſe coupent eſt le même par tout.* Suppoſons que l'angle ABC ſoit l'angle d'inclinaiſon des deux plans du côté de B ; je mene à l'extrêmité E de la commune ſection BE & dans le plan ABDE une droite

ED paralelle à AB. Je mene de même dans le plan BEFC une droite EF paralelle à BC; ainsi faisant glisser l'angle ABC toujours paralellement à lui-même le long de BE, il tombera enfin sur l'angle DEC & lui sera égal; mais le plan que la jambe AB décrira pendant son mouvement, sera lemême que le plan ABED, & celui que l'autre jambe BC décrira, sera le même que le plan BCFE; donc l'angle d'inclinaison de ces deux plans est le même partout.

481. PROBLEME. *Trouver l'angle d'inclinaison de deux plans* ABED, BCEF (Fig. 309.) *qui se coupent.*

D'un point quelconque O pris sur la section commune BE; je mene dans le plan ABED la droite OR perpendiculaire sur BE, & dans le plan BCFE la droite OH aussi perpendiculaire sur BE, & l'angle ROH est l'angle d'inclinaison cherché.

Car le plus ou moins d'inclinaison des deux plans entr'eux, consiste uniquement dans le plus ou moins de distance qu'ils conservent entr'eux; donc les côtés RO, OH de l'angle qui mesure cette inclinaison, ne doivent plus ou moins s'approcher que dans le sens des plans, & par conséquent ils ne doivent incliner ni du côté de B ni du côté E.

482. *Si deux plans paralelles* ABCD, EHFG (Fig. 310.) *sont coupés par un troisiéme plan* MON, *les deux sections* RS, PQ *sont paralelles.* Si cela n'étoit pas, les deux sections s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient de l'autre; donc les deux plans à qui elles appartiennent en feroient de même & ne feroient plus paralelles; ce qui est contre la supposition.

Il suit delà, *que si le plan* MON *qui coupe les deux plans paralelles, est un triangle, les côtés* MO, NO *de ce triangle sont coupés proportionnellement par les sections* RS, PQ, *supposé néanmoins que* MN *soient paralelles à* RS; ce qui est évident.

483. Si trois angles plans BAC, CAD, DAB (*Fig.* 311.) qui sont dans trois plans différents ont le sommet commun A, & que leurs côtés s'ajustent, ils forment un angle en A qui se nomme *Angle solide*; tels sont tous les angles des corps dont les faces se terminent en pointe.

484. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide; car il est visible que si entre les deux angles plans BAD, BAC, il ne se trouvoit pas un troisiéme angle CAD, les deux angles plans BAD, BAC seroient dans un même plan.

485. *Si un angle solide* A (Fig. 312.) *est formé par trois angles*

plans SAM, MAN, NAS *la somme de deux de ses angles est plus grande que le troisiéme.* Si l'on veut que l'angle SAN soit plus grand que les deux autres, je fais dans le plan de cet angle, l'angle SAR égal à l'angle SAM, & par conséquent l'angle restant RAP, est plus grand que l'angle NAM. Je prens sur la jambe AM de l'angle SAM la partie AC, & je fais AR = AC; du point C je mene la droite CB qui coupe l'autre jambe SA de l'angle SAM en un point quelconque B; du point B par le point R, je mene la droite SP qui coupe la droite AN en P, & du point P par le point C, je mene la droite CP; ce qui me donne le triangle BCP qui sert de base à l'angle solide A.

Les triangles BAC, BAR sont parfaitement égaux, à cause de BA commun, de AC = AR & de l'angle compris BAC égal à l'angle compris BAR; donc BC égal à BR. Or, les triangles RAP, PAC ont le côté AR égal au côté AC, le côté AP commun; mais l'angle RAP est plus grand que l'angle PAC, par la supposition; donc la base RP est plus grande que la base PC, & par conséquent BR + RP ou BP est plus grande que BC + CP; ce qui est impossible, à cause que dans tout triangle BPC un côté seul BP est toujours moindre que les deux autres; donc, il est impossible aussi que l'angle BAP soit plus grand que la somme des deux autres BAC, CAP qui forment l'angle solide A.

486. *La somme des angles plans* BAC, CAP, PAB *qui forment un angle solide* A (Fig. 312.) *vaut toujours moins que quatre angles droits.* Je termine l'angle solide A par une base BPC, laquelle forme avec les plans des trois angles BAC, CAP, PAB trois autres angles solides B, C, P. Or, dans l'angle solide B, les deux angles plans PBA, ABC valent plus que le troisiéme PBC; (*N.* 485.) de même dans l'angle solide C, les deux angles plans BCA, ACP valent plus que le troisiéme BCP, & dans l'angle solide P, les deux angles CPA, APB valent plus que le troisiéme CPB; mais dans le triangle BPC, les trois angles PBC, BCP, CPB, valent ensemble deux droits; donc les six angles PBA, ABC, BCA, ACP, CPA, APB valent plus de deux droits; mais tous les angles des trois triangles BAC, CAP, PAB valent ensemble six droits, à cause que dans chaque triangle, les trois triangles valent deux droits; retranchant donc de six angles droits la valeur des angles sur les bases des trois triangles, laquelle vaut plus de deux droits; les trois angles qui forment l'angle solide A, vaudront ensemble moins de quatre droits; & on prouvera

facilement la même chose si l'angle solide A étoit formé par plus de trois angles plans.

De la Mesure des Solides, & de leurs rapports.

487. On nomme *Cube* un solide compris sous six faces, dont tous les côtés sont égaux entr'eux, & les angles sont droits (*Fig.* 313.); la face ABCD sur laquelle on conçoit que le solide est appuyé, se nomme *Base inferieure*, ou simplement *Base*; la face FGHE opposée à la base, se nomme *Base superieure*, & les quatre autres faces se nomment *faces ascendantes*, à cause qu'elles sont entre la base inférieure & la supérieure; il est visible que la hauteur de ce solide n'est pas différente de l'un des côtés GB des faces ascendantes, puisque toutes les faces sont perpendiculaires les unes sur les autres.

488. Un *Paralellepipede* est un solide ABCDEFGH (*Fig.* 314.) compris sous six paralellogrammes dont les opposés sont égaux, on le nomme *Paralellepipede rectangle*, lorsque tous les angles des paralellogrammes sont droits, & *Paralellepipede incliné*, quand les angles ne sont pas droits.

489. Un *Prisme* ABCDEFGHILNM (*Fig.* 315.) est un solide compris sous deux bases égales & paralelles ABCDEF, HILNMG, & sous autant de paralellogrammes, que chacune des bases à de côtés. Ce solide est *droit* lorsque les paralellogrammes montans sont perpendiculaires sur les bases, & *incliné* lorsque ces paralellogrammes sont inclinés entre les bases. Si la base du prisme est un triangle, on le nomme *Prisme triangulaire*, si la base est un pentagone, on le nomme *Prisme pentagonal*, & ainsi des autres.

490. Un *Cylindre*, est un solide compris sous deux bases égales & paralelles, qui sont deux cercles AB, CD (*Fig.* 316.), & sous une surface courbe qui regne entre les deux cercles.

Un cercle étant un polygone d'une infinité de côtés, on peut concevoir un cylindre comme un prisme, dont la base est composée d'une infinité de lignes droites ou de côtés.

491. Une *Pyramide*, est un solide compris sous une base ABCD (*Fig.* 317.), & sous autant de triangles montans AEB, BEC, CED, DEA que la base a de côtés, lesquels triangles ont tous leurs sommets en un même point E; la ligne EO menée du sommet au centre O de la base, se nomme *Axe*, & cet axe ne differe

point de la hauteur lorſqu'il eſt perpendiculaire ſur la baſe ; mais lorſqu'il eſt incliné ſur la baſe, la pyramide eſt auſſi inclinée, & la hauteur doit ſe prendre par la perpendiculaire menée du ſommet E ſur la baſe.

492. Un *Cône*, eſt une pyramide ABE (*Fig.* 318.) dont la baſe AB eſt un cercle, on le nomme *Droit*, lorſque ſon axe EO eſt perpendiculaire ſur la baſe, & incliné lorſque l'axe eſt incliné.

493. La Sphére eſt un ſolide ABCD (*Fig.* 319.) parfaitement rond, & au milieu duquel eſt un point O également éloigné de tous les points de la ſurface. Si l'on conçoit qu'un demi-cercle ACB tourne autour de ſon diamétre BA immobile, il décrira une Sphére par ſa circonvolution. Toute ligne droite BA qui paſſe par le centre O & qui aboutit de part & d'autre à la ſurface, ſe nomme *Axe* ou *Diamétre de la Sphére*, & toute ligne OB menée du centre à la ſurface, ſe nomme *Rayon*.

494. PROPOSITION CVII. *Si l'on coupe un paralellepipede, ou un priſme ou un cylindre droits ou inclinés par un plan paralelle à la baſe, ce plan ſera ſemblable & égal à la baſe.*

Soit le paralellepipede ABCDEFGH (*Fig.* 314.) coupé par le plan MNOP paralelle à ſa baſe ABCD ; le paralellogramme BCHG étant coupé par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, les ſections NO, BC faites ſur ce paralellogramme, ſont auſſi paralelles (*N.* 482.), & par conſéquent égales à cauſe qu'elles ſont entre les paralelles BG, CH, & on prouvera de la même façon que les trois côtés du plan MNOP ſont égaux & paralelles aux trois autres côtés de la baſe ABCD chacun à chacun ; or, les angles du plan MNOP ſont auſſi égaux aux angles de la baſe, à cauſe qu'ils ont leurs cotés paralelles à ceux de la baſe ; donc les deux plans MNOP, ABCD ſont ſemblables & égaux.

La même choſe ſe démontrera à l'égard d'un cube, car un cube n'eſt autre choſe qu'un paralellepipede rectangle, dont les côtés de la baſe & la hauteur ſont égaux.

495. PROPOSITION CVII. *Tout cube, tout paralellepipede, tout priſme, & tout cylindre droit ou incliné, eſt égal à ſa baſe multipliée par ſa hauteur, c'eſt-à-dire par la perpendiculaire tirée entre les deux baſes.*

Soit le paralellepipede AB (*Fig.* 320.) ; ſi l'on conçoit qu'il ſoit coupé par une infinité de plans paralelles à la baſe, & infiniment proches, la ſomme de ces plans ſera égale au paralellepi-

pede. Or, tous ces plans font égaux à la base (*N.* 494.); donc leur somme n'est autre chose que la base prise autant de fois qu'il y a de plans, c'est-à-dire la base multipliée par la grandeur qui marque la multitude des plans. Mais la hauteur AC du paralellepipede se trouve coupée par les plans en autant de parties infiniment petites & égales, & chacune de ces parties est la hauteur infiniment petite de chaque plan, puisque les hauteurs se prennent par les perpendiculaires; donc la hauteur AC marque la multitude des plans qui composent le paralellepipede, & par conséquent ce solide est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On démontrera de la même façon que le paralellepipede incliné AB (*Fig.* 321.) est égal au produit de sa base par sa hauteur CE; car quoique l'aréte inclinée AC soit coupée par les plans en autant de parties égales qu'il y a de plans qui composent le solide, cependant comme cette ligne n'est pas perpendiculaire entre les plans, chacune de ses parties se trouve plus grande que la hauteur infiniment petite de chacun des plans, au lieu que chaque petite partie de la perpendiculaire CE est précisément égale à la hauteur infiniment petite de chaque plan; d'où il suit que c'est la perpendiculaire qui doit en exprimer la multitude, & que par conséquent le paralellepipede est égal à sa base multipliée par sa hauteur.

496. COROLLAIRE I[er]. *Tous les paralellepipedes, tous les prismes, tous les cylindres qui ont même hauteur & même base, ou les hauteurs égales & les bases aussi, sont égaux.* Cela est évident, puisqu'ils sont les produits de leurs bases par leur hauteur.

497. COROLLAIRE II. *Les paralellepipedes, les prismes & les cylindres qui ont les bases égales & les hauteurs inégales, sont entr'eux comme les hauteurs, ceux qui ont les bases inégales & les hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases, & ceux qui ont les bases réciproques aux hauteurs, sont égaux.*

Soient les deux paralellepipedes AF, MR (*Fig.* 322.), si l'on suppose que les deux bases sont égales, je nomme X l'une & l'autre base, ainsi le premier est $X \times HA$, & le second est $X \times MT$; or, à cause que les hauteurs HA, MT sont multipliées par une même grandeur X, les produits $X \times HA$, $X \times MT$ sont entr'eux comme HA, MT, donc les paralellepipedes sont entr'eux comme les hauteurs HA, MT.

On démontrera de la même façon que si les bases sont inégales

les & les hauteurs égales, les paralellopipedes font entr'eux comme les bafes.

Enfin, fi les bafes font réciproques aux hauteurs, c'eft-à-dire fi l'on a ABCD. MNOP :: MT. AH, on aura en faifant le produit des extrêmes & des moyens ABCD × AH = MNOP × MT, c'eft-à-dire, les deux paralellepipedes égaux.

498. COROLLAIRE III. *Les paralellepipedes, les prifmes & les cylindres, font entr'eux en raifon compofée de la raifon de leurs hauteurs, & de celle de leurs bafes.*

Soient les deux paralellepipedes AF, MR (*Fig.* 322.), la raifon de leurs hauteurs eft AH, MT, celle de leurs bafes eft ABCD, MNOP, & la compofée des deux eft AH × ABCD, MT × MNOP : or, les deux termes de cette raifon font les deux paralellepipedes; donc ces deux folides font en raifon compofée, &c.

499. PROPOSITION CVIII. *Si l'on coupe une pyramide* ABCDE, *dont la hauteur eft* EQ (Fig. 323.) *par un plan* MNOP *paralelle à la bafe* ABCD. *Je dis* 1°. *que ce plan fera femblable à la bafe.* 2°. *Qu'il fera à la bafe comme le quarré de fa hauteur* SE *au quarré de la hauteur* QE *de la bafe, en prenant pour hauteurs les diftances des plans au fommet* E *de la pyramide.*

La face AEB étant coupée par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, les fections MN, AB font paralelles entr'elles, & par la même raifon les trois autres côtés du plan MNOP font paralelles aux trois autres côtés de la bafe. Or, dans la face AEB, nous avons MN. AB :: ME. AE, à caufe des paralelles MN, AB, & par la même raifon dans la face ADE, nous avons MP. AD :: ME. AE, donc MN. AB :: MP. AD, ce qui fait voir que les côtés MN, MD du plan MNOP font proportionnels aux côtés AB, AD de la bafe. Et par un femblable raifonnement on trouvera que les deux autres côtés PO, ON du plan MNOP font auffi proportionnels aux côtés DC, CB de la bafe. Mais les angles du plan MNOP font égaux aux angles de la bafe chacun à chacun, à caufe des côtés paralelles, donc le plan MNOP eft femblable à la bafe. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Les plans MNOP, ABCD étant femblables, font entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB, mais nous avons MN. AB :: ME. AE, donc les deux plans font entr'eux comme les quarrés de ME. AE. Du point Q où la perpendiculaire coupe la bafe, je mene la droite AQ, ce qui me donne

le triangle AQE, dans lequel les deux sections MS, AQ faites par les deux plans MNOP, ABCD paralelles entr'eux, sont paralelles. Ainsi j'ai SE. QE :: ME. AE, & par conséquent les deux plans MNOP, ABCD étant entr'eux comme les quarrés de ME, AE, sont aussi comme les quarrés de SE, QE. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

On démontrera la même chose d'une pyramide inclinée ABCE (*Fig.* 324.), car prolongeant le plan MNOP, & la base jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire EQ menée du sommet sur la base, & menant dans la base la droite AQ, qui donnera le triangle AQE, les sections MS, AQ faites sur le triangle par les plans paralelles MNOP, ABCD prolongés, seront paralelles, ainsi l'on aura ES, EQ :: EM, EA :: MN. AB, & les plans PMNO, ABCD étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB, à cause qu'ils sont semblables, seront par conséquent comme les quarrés de leurs hauteurs ES, EQ.

500. PROPOSITION CIX. *Les pyramides qui ont les bases égales, & les hauteurs aussi, sont égales.*

Soient les deux pyramides ABCDE, HZVQ (*Fig.* 325.), dans lesquelles je suppose que la base quarrée de la premiere est égale à la base triangulaire de la seconde, & que la hauteur OE est égale à la hauteur QX. Je coupe l'une & l'autre par des plans MNLP, RYT paralelles aux bases, & qui soient à égales distances des sommets E, Q; ce qui me donne ES=QF; or, dans la premiere pyramide, j'ai MNLP. ABCD :: $\overline{SE}^2$. $\overline{OE}^2$ (*N.* 499.), & dans la seconde RYT. HZV :: $\overline{QF}^2$. $\overline{QX}^2$; donc à cause de $\overline{QF}^2=\overline{ES}^2$, & de $\overline{QX}^2=\overline{OE}^2$, j'ai MNLP. ABCD :: RYT. HZV; mais ABCD=HZV, donc MNLP=RYT.

Or, si l'on conçoit que l'une & l'autre pyramide soient coupées par une infinité de plans paralelles aux bases, il n'y aura pas plus de plans dans l'une que dans l'autre, à cause des hauteurs égales, & chaque plan de l'une sera égal à chaque plan de l'autre, qui sera à égale distance du sommet, ainsi qu'on vient de voir, donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les deux pyramides seront égales.

501. COROLLAIRE. Ce que nous venons de dire dans les deux Propositions précédentes touchant les pyramides, doit s'enten-

dre aussi des cônes droits ou inclinés, puisque les cônes sont des pyramides dont les bases ont un infinité de côtés.

502. PROPOSITION CX. *Tout prisme triangulaire* ABCDEF, (*Fig.* 326.) *peut se diviser en trois pyramides égales.*

Je coupe les trois paralellogrammes montans par les diagonales AF, FC, EC, & je fais passer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC, ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF; or, les deux premieres ont les bases ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC; & si l'on conçoit que la seconde EFDC ait pour base le triangle ECD, & que la base de la troisiéme EACF soit le triangle ECA, on trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales, à cause que leurs bases EAC, ECD sont égales, & qu'elles ont leurs sommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur. Donc les trois pyramides sont égales.

503. COROLLAIRE. *Donc tout prisme triangulaire* ABCDEF *est triple d'une pyramide* ABCF *de même hauteur & de même base.*

504. PROPOSITION CXI. *Toute pyramide de quelque nombre de côtés que soit sa base, est le tiers d'un prisme de même hauteur & de même base.*

Soit la pyramide pentagonale ABCDEF (*Fig.* 327.); du point O où son axe coupe la base, je mene des droites OA, OB, OC, &c. à tous les angles, ce qui divise la base en autant de triangles qu'elle a de côtés. Je coupe la pyramide par des plans qui passent par le sommet F & par les droites OA, OB, OC, &c. & la pyramide se trouve divisée en cinq pyramides triangulaires, qui ont chacune pour base l'un des triangles de la base. Je construis sur ces triangles des prismes triangulaires de même hauteur, & ces cinq prismes pris ensemble forment un prisme total dont la base est la même que celle de la pyramide, & qui a même hauteur; or, chacun des prismes triangulaires est triple de la pyramide triangulaire correspondante; donc le prisme total est triple de la pyramide totale, & par conséquent la pyramide en est le tiers.

Et on démontrera la même chose à l'égard des pyramides inclinées, & des cônes droits ou inclinés.

505. COROLLAIRE. *Les pyramides qui ont les bases égales, & les hauteurs inégales, sont entr'elles comme leurs hauteurs, celles qui ont les hauteurs égales, & les bases inégales sont entr'elles comme leurs bases, & celles qui ont les hauteurs réciproques aux bases sont égales.*

Les pyramides sont le tiers des prismes de même base & de

même hauteurs ; or, ce qui convient aux entiers convient à leurs tiers, donc ce que nous avons dit des prismes (*N.* 497.) doit se dire aussi des pyramides.

506. PROPOSITION CXII. *Une pyramide* ABCF (Fig. 328.) *étant donnée, si on la coupe par un plan* OED *paralelle à la base, je dis que pour avoir la valeur de la partie tronquée* ABCDEO, *il faut chercher un plan moyen proportionnel Géometrique entre la base inférieure & la supérieure* DEO, *ajouter ce plan aux deux bases, & multiplier le tout par le tiers de la hauteur* XZ *de la partie tronquée* ABCDEO.

Supposons que la pyramide soit triangulaire, je coupe deux des faces montantes ABEO, BCDE par des diagonales AE, CE, & faisant passer un plan par ces deux diagonales, je retranche de la pyramide tronquée la pyramide ABCE, & il me reste une autre pyramide AODCE ; je coupe la face AODC par la diagonale OC, & je coupe AODCE par un plan qui passe par le sommet E & par la diagonale OC, ce qui me donne deux autres pyramides AOCE, ODCE.

Maintenant je cherche le rapport de la premiere de ces trois pyramides ABCE à la seconde AOCE, & comme elles ont deux faces ABE, OEA qui sont sur un même plan, si je prens ces deux faces pour leurs bases, elles auront l'une & l'autre le sommet en C, & par conséquent leur hauteur sera la même, d'où il suit que ces deux pyramides seront entr'elles comme leurs bases ABE, OEA ; mais ces deux bases ou triangles étant entre les deux paralelles AB, OE, sont entr'eux comme leurs bases AB, OE ; donc les deux pyramides seront entr'elles comme AB, OE ; ainsi nommant P la premiere ABCE, & S la seconde AOCE, nous aurons P. S :: AB. OE.

Je compare de même la seconde AOCE avec la troisiéme ODCE, & prenant pour leurs bases les faces AOC, ODC qui sont sur un même plan, elles se trouvent avoir le sommet commun en E, & par conséquent la même hauteur, d'où il suit que ces deux pyramides sont entr'elles comme leurs bases ou triangles AOC, ODC, mais ces triangles étant entre les paralelles AC, OD sont entr'eux comme leurs bases AC, OD, & à cause des triangles semblables ABC, OED, nous avons AC. OD :: AB. OE, donc les deux pyramides AOCE, ODCE sont entr'elles comme AB. OE ; ainsi nommant T la troisiéme ODCE, nous avons S. T :: AB. OE, mais nous avons trouvé P. S :: AB. OE ;

donc nous avons aussi P. S :: S. T, c'est-à-dire les trois pyramides qui composent la pyramide tronquée ABCDEO sont en proportion continue.

Je cherche un plan moyen proportionnel que je nomme V entre la base inférieure ABC, & la supérieure OED, ce qui donne ABC. V :: V. OED, & multipliant tout par la même grandeur $\frac{1}{3}$XZ, c'est-à-dire par le tiers de la hauteur XZ du tronquement, les trois quantités ABC×$\frac{1}{3}$XZ, V×$\frac{1}{3}$XZ, & OED×$\frac{1}{3}$XZ, sont encore en proportion continue; or, la premiere ABC×$\frac{1}{3}$XZ est égale à la premiere pyramide ABCE, & la troisiéme OED×$\frac{1}{3}$XZ est égale à la troisiéme pyramide ODCE; donc la seconde V×$\frac{1}{3}$XZ doit être égale à la seconde AOCE, & par conséquent le tronquement ABCDEO est égal aux trois plans ABC, V, OED multipliés par le tiers de la hauteur ZX du tronquement.

Si la pyramide n'est pas triangulaire (*Fig.* 329.) des centres Z, X des deux bases, je mene des droites à leurs angles, & faisant passer des plans par les lignes de division de l'une & l'autre base, le tronquement se trouve divisé en autant de tronquemens de pyramides triangulaires que la base a de côtés, & chacun de ces tronquemens sera égal à ses deux bases triangulaires ajoutées au plan moyen proportionnel, le tout multiplié par $\frac{1}{3}$ZX. Or, si je prens un plan moyen proportionnel MNPQ entre la base totale ABCD, & la base totale HEFG, ce plan se trouvera divisé en un même nombre de triangles que ces bases, & chacun de ces triangles sera moyen proportionnel entre les deux bases de la pyramide triangulaire qu'il coupera; donc en ajoutant ensemble les plans ABCD, MNPQ, HEFG, & multipliant la somme par $\frac{1}{3}$XZ, j'aurai tout d'un coup la somme des tronquemens triangulaires qui composent le tronquement AF.

Il est aisé d'appliquer la même chose aux tronquemens des pyramides inclinées.

507. PROPOSITION CXIII. *Tout prisme triangulaire tronqué* (Fig. 330, 331, 332, 333.) *est égal au triangle* ABC *qui lui sert de base multiplié par le tiers des trois arêtes que forment les plans montans, c'est-à-dire par le tiers de ses trois longueurs.*

Il peut arriver que le prisme triangulaire ne soit tronqué que par une de ses extrémités (*Fig.* 332, 333, 334) ou qu'il soit tronqué par ses deux extrémités (*Fig.* 335.).

Si le prisme triangulaire n'est tronqué que par une de ses extrémités, il peut se faire 1°. Que deux de ses longueurs BE, CD

(*Fig.* 330.) soient égales, & la troisiéme AH plus grande que chacune des deux autres. 2°. Que deux de ses longueurs AH, CG (*Fig.* 331.) étant égales, la troisiéme BE soit moindre que chacune d'elles. 3°. Enfin, que les trois longueurs AH, BE, CG soient inégales entr'elles (*Fig.* 332.). Examinons tous ces cas en particulier.

Si la longueur AH est plus grande que les deux égales BE, CD (*Fig.* 330.), je coupe le prisme par un plan EFD paralelle à la base ABC, & qui passe par les extrêmités E, D des longueurs égales BE, CD, ce qui coupe le prisme tronqué en deux solides, dont l'un est le prisme ABCDE, & l'autre est la pyramide DEFH; or, le prisme ABCDE est égal à sa base ABC multipliée par la longueur BE, ou par le tiers de ses trois longueurs égales AF, BE, CD, & la pyramide est égale à sa base DEF ou ABC son égale multipliée par le tiers de sa hauteur FH; ainsi le prisme tronqué ABCDEH est égal à sa base ABC multipliée par le tiers des trois longueurs DC, BE, AF plus le tiers de la longueur FH; mais le tiers de AF, plus le tiers de FH est égal au tiers de AH; donc le prisme tronqué est égal à sa base multipliée par le tiers de ses trois longueurs CD, BE, AH.

Si les deux longueurs égales AH, CG (*Fig.* 331.) sont plus grandes que la troisiéme BE, je coupe le prisme par un plan DEF paralelle à sa base ABC, & qui passe par l'extrémité E de la troisiéme longueur BE, ce qui coupe le prisme tronqué en deux solides, dont l'un est le prisme triangulaire ABCDEF, & l'autre est la pyramide DGHFE. Je coupe la face DGHF de cette pyramide par la diagonale HD, & faisant passer un plan par cette diagonale, & par le sommet E, la pyramide DGHF est coupée en deux autres pyramides HDFE, DGHE qui sont égales entr'elles, à cause du sommet E commun, & des bases HGD, HDF qui sont visiblement égales, puisque DGHF est un paralellogramme dont la diagonale est HD. Mais prenant pour base de la pyramide FEDH le plan FED=ADC, la hauteur de cette pyramide est la droite FH; donc cette pyramide est égale au plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH, & par conséquent l'autre pyramide DGHE est égale au même plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH ou par $\frac{1}{3}$GD, à cause de GD=FH, & comme le prisme ABCDEF est égal au même plan multiplié par le tiers des droites CD, BE, AF; il s'ensuit que le prisme tronqué composé de ces trois solides est égal au produit de la base ABC multipliée par le tiers des

droites CD, BE, AF, plus le tiers de FH, plus le tiers de DG; mais $\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}FH=\frac{1}{3}AH$, & $\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}DG=\frac{1}{3}CG$, donc le prisme tronqué est égal à sa base ABC multipliée par $\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}AH+\frac{1}{3}CG$.

Si les trois longueurs AH, BE, CG sont inégales (*Fig.* 332.), je fais les mêmes opérations que dans le cas précédent, & le prisme tronqué se trouve divisé en un prisme triangulaire ABCDEF, & deux pyramides DGHE, DHFE qui ont le sommet E commun, & qui sont par conséquent comme leurs bases inégales DGH, DHF; mais ces bases ou triangles étant entre les paralelles DG, FH, sont entr'eux comme leurs bases GD, FH; donc les deux pyramides sont entr'elles comme les droites GD, FH. Or, en prenant pour base de la pyramide DHFE le plan FED, la hauteur de cette pyramide est FH, donc la pyramide DGHE doit être égale à un autre pyramide qui auroit pour base le même plan FED, & pour hauteur la ligne GD, car cette nouvelle pyramide seroit à la pyramide DGHE, comme GD, FH, à cause des bases égales. Ainsi la pyramide $DEFH=FED\times\frac{1}{3}FH=ABC\times\frac{1}{3}FH$, la pyramide $DGHE=ABC\times\frac{1}{3}DG$, & le prisme ABCDEF $=ABC\times\overline{\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CD}$; donc le prisme tronqué ABCGHE $=ABC\times\overline{\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}FH+\frac{1}{3}DG}$; mais $\frac{1}{3}AF+\frac{1}{3}FH=\frac{1}{3}AH$, & $\frac{1}{3}CD+\frac{1}{3}DG=\frac{1}{3}CG$; donc le prisme ABCGHE $=ABC\times\overline{\frac{1}{3}AH+\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}CG}$.

Enfin, si le prisme triangulaire est tronqué par ses deux extrémités (*Fig.* 333.), je coupe ses trois arêtes par un plan ABC, qui leur soit perpendiculaire, ce qui coupe ce prisme en deux autres ABCDHE, ABCMON, qui ne sont tronqués chacun que par l'une de ses extrêmités. Ainsi le premier ABCDHE est égal au plan ABC multiplié par le tiers de ses trois longueurs AH, EB, CD, & le second ABCMON est égal au plan ABC multiplié par le tiers de ses trois longueurs AO, BN, CM; donc les deux ensemble, c'est-à-dire, le prisme total est égal au plan ABC multiplié par le tiers des trois longueurs OH, NE, MD.

508. *Remarque.* Quoique ce que je viens de dire ne regarde que le prisme triangulaire tronqué, on peut cependant s'en servir pour mesurer un prisme quelconque tronqué. Soit, par exemple, le prisme pentagonal tronqué ABCDEFGHIL (*Fig.* 328.); de l'un des angles E de la base, je mene aux autres angles des

droites EB, EC, ce qui divise cette base en trois triangles. Je conçois que sur ces droites EB, EC, soient élevés des plans perpendiculaires à la base qui diviseront le prisme tronqué en trois prismes triangulaires tronqués. Ainsi mesurant chacun de ces prismes en particulier, leur somme me donnera le prisme total. Au reste, on trouve beaucoup plus aisément la valeur des prismes tronqués par le moyen du centre de gravité de la base, ainsi qu'on verra dans le troisiéme Livre. Et je n'ai parlé ici du prisme triangulaire tronqué, que pour faciliter le Problême suivant, qui concerne la mesure des Révêtemens ou Murailles des Places de Guerre.

509. PROBLEME. *Mesurer le Révêtement d'une Place de Guerre.*

Tout le monde sçait que les Murailles des Places de guerre ont un talud, c'est-à-dire, qu'elles ont plus d'épaisseur en bas qu'en haut, & c'est précisément en cela que consiste la difficulté de les mesurer. Or, entre toutes les méthodes qu'on a donné pour y parvenir, voici celle qui me paroît la plus simple & la plus commode, quoiqu'elle soit la moins usitée, peut-être parce qu'elle est la moins connue, ou parce qu'on a de la peine à se détacher des routes ordinaires : on en jugera aisément, si on veut bien, la comparer aux pratiques qu'on suit communément.

Soit donc le solide de la Figure 335 qui représente un demi-Bastion & une partie de la Courtine. Je mesure d'abord la longueur & la largeur de la muraille au sommet, & comme ces deux dimensions forment les trapezoïdes ABCD, DCEF, FEHI qui ont tous la hauteur commune RT, j'ajoute ensemble leurs longueurs moyennes SV, VX, XZ, & multipliant la somme par la hauteur RT, le produit est la valeur des trois trapezoïdes ; je multiplie ce produit par la hauteur A*a* de la muraille, & j'ai la valeur d'une muraille sans talud, dont la base est composée de trois trapezoïdes *a*MN*b*, *b*NO*c*, O*cd*L égaux chacun à chacun aux trois trapezoïdes supérieurs.

Maintenant pour mesurer le talud, je considére qu'il est composé de trois prismes triangulaires tronqués M*e*BDN*f*, DN*fg*OF, *g*OFI*h*L ; c'est pourquoi, je coupe l'un d'eux par un plan *rsi* perpendiculaire sur ses trois longueurs, & comme cette coupe est la même dans les trois prismes, j'ajoute ensemble leurs trois longueurs BDFI, MNOL, *efgh*, & prenant le tiers de cette somme, je le multiplie par le plan *rsi*, ce qui me donne tout d'un coup

coup le talud, lequel étant ajouté à la muraille sans talud, me donne le révêtement entier.

Il est aisé de voir qu'on pourroit faire les mêmes opérations quand même le flanc seroit rond & qu'il seroit couvert d'une orillon.

510. PROPOSITION CXIV. *La sphere est égale au deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit pour base le cercle du diamétre de la sphere, c'est-à-dire le plus grand cercle de la sphere.*

Soit le quart de cercle ABC (*Fig.* 337.) qui en tournant au tour de son rayon fixe BC décrit une demi-sphere ABL; je décris le quarré ACBM du rayon BM; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle isoscele MBC; je conçois que le rayon BC soit coupé en une infinité de petites parties égales entr'elles, & que des points de division O, T, &c. soient menées des perpendiculaires OQ, TX sur ce rayon, & qui se terminent sur AM, ces droites seront élémens du quarré AMBC, leurs parties OR, TZ, &c. qui se terminent sur la circonférence du quart de cercle, seront les élémens de ce quart de cercle, & les parties OS, TV, &c. qui se terminent sur la diagonale MC, seront les élémens du triangle rectangle isoscele MBC; de façon que chaque élément OS, &c. de ce triangle sera égal à sa distance OC, &c. du centre C; car les triangles semblables MBC, SOC donnent MB. BC :: SO. OC; mais MB = BC; donc SO = OC. & il est aisé de voir que chaque élément OQ, TX, &c. du quarré ACBM sera égal au rayon BC: cela posé.

Si l'on conçoit que le quarré ACBM, le quart de cercle ABC & le triangle MBC tournent au tour du rayon immobile BC; les élémens du quarré ACBM décriront des cercles tous égaux qui formeront un cylindre AMHL; les élémens du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-sphere ABL, & dont le plus grand sera celui que le rayon AC décrira, lequel à cause de cela, se nomme le grand cercle de la sphere, & les élémens du triangle MBC décriront les cercles qui formeront un cône MCH. Or, ces cercles étant entr'eux comme les quarrés de leurs rayons: mettons pour un moment les quarrés au lieu des cercles, & à cause de la propriété du cercle nous aurons $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$; (*N.* 284.) mais BC = OQ & OC = OS; donc $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; par la même raison, nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainsi des autres; c'est-à-dire que les quarrés des élémens

du quart de cercle font égaux aux quarrés des élémens du quarré ACBM, moins les quarrés des élémens du triangle MBC; donc en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les élémens du quart de cercle ou la demi-ſphere ABL, eſt égale aux cercles décrits par les élémens du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL moins les cercles décrits par les élémens du triangle MBC ou moins le cône MBC; mais le cône MBC étant une pyramide d'une infinité de côtés, eſt le tiers du cylindre AMHL qui eſt un priſme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même baſe que le cône, donc la demi-ſphere ABC eſt égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouvera de la même façon que la demi-ſphere AKL eſt égale aux deux tiers du cylyndre APEL, & que par conſéquent la ſphere entiere eſt égale aux deux tiers du cylindre MPEH.

511. COROLLAIRE. I[er]. *Tous les cercles élémentaires qui compoſent une ſphere* ABCD, (Fig. 336.) *ſont au plus grand cercle* AC *multiplié par le nombre qui exprime leur multitude, c'eſt-à-dire par le diamétre* BD, *comme* 2 *eſt à* 3. Le grand cercle AC multiplié par BD forme le cylindre MNOP; or, la ſphere ou la ſomme de ces cercles élémentaires, eſt les deux tiers du cylindre; donc la ſomme des cercles élémentaires eſt au plus grand AC multiplié par BD, comme 2 eſt à 3.

512. COROLLAIRE II. *Un ſegment* ABC *de ſphere* (Fig. 338.) *eſt égal à la portion* MPSR *du cylindre circonſcrit, laquelle a même hauteur que le ſegment, moins le cône tronqué* MHLP *de même hauteur; la zone* QEFY *qui a pour baſe le grand cercle, eſt égale à la portion cylindrique* QTVY *de même hauteur, moins le cône* XOZ *de même hauteur; la zone* EACF *eſt égale à la portion cylindrique* TRSV *de même hauteur, moins le cône tronqué* HXZL *de même hauteur; la zone* aEFb *eſt égale à la portion cylindrique* mTVn *de même hauteur, moins le cône* XZO, *moins encore le cône* cOd; *le ſecteur* ABCO *eſt égal au ſegment* ABC, *plus le cône* AOC. Tout cela eſt évident par la Propoſition précédente; mais on verra dans la ſuite que toutes ces portions de ſphere peuvent ſe meſurer par le moyen de leurs ſurfaces, beaucoup plus aiſément.

513. *DEFINITION.* Si l'on coupe un cylindre ABCD (*Fig.* 339.) par un plan incliné MXN qui coupe ſa baſe en dedans, la portion cylindrique MXNA coupé par ce plan ſe nomme *Onglet cylindrique*, ſi le plan coupant MXN paſſe par le centre O de la baſe, l'onglet MXNA ſe nommera *Onglet cylindrique de la premiere eſpece.* Si

le plan coupant PZQ ou RTS ne passe pas par le centre O de la base, l'onglet PZQA ou RTSA se nommera *Onglet cylindrique de la seconde espece.*

PROPOSITION CXV. *Tout onglet cylindrique de la premiere espece, est composé d'une infinité de triangles rectangles qui sont entr'eux comme les cercles élémentaires d'une sphere.*

Soit l'onglet de la premiere espece ABCD, (*Fig.* 340.) sa base ADC est donc un demi cercle puisque le plan incliné ABC passe par le centre O de la base du cylindre dans lequel cet onglet est coupé, & que par conséquent la commune section AC du plan incliné & de la base est un diamétre : cela posé.

Concevons que dans la base ou demi cercle ADC soient menées des lignes droites LP, RS, OD &c. infiniment proches & perpendiculaires sur le diamétre AC, & que sur chacune de ces lignes soient élevés des plans LQP, RTS, &c. perpendiculaires sur la base ADC de l'onglet, & qui coupent l'onglet. 1°. Tous ces plans coupans, feront des triangles rectangles LPQ, RST, &c. la commune section de chacun d'eux & de la base ADC sera une ligne droite, (*N.* 477.) de même que la commune section de chacun d'eux & du plan ABC; & comme la surface d'un onglet ABCD, ou du cylindre dans lequel il est coupé, n'est autre chose qu'une suite de lignes droites élevées perpendiculairement sur tous les points de la circonférence ADC de la base, il est clair que chaque plan coupant tel que LPQ perpendiculaire sur la base ADC, ne peut couper la surface de l'onglet que par une de ses perpendiculaires PQ, & que par conséquent ce plan LPQ doit être un triangle rectangle à cause que QP étant perpendiculaire sur la base ADC doit l'être aussi sur LP qui est dans cette base & qui passe par le point P, (*N.* 463.) 2°. Les plans coupans ou triangles rectangles LPQ, RST &c. qui couperont l'onglet feront semblables, car à cause qu'ils sont paralelles entr'eux, les droites QL, TR &c. dans lesquelles ils couperont le plan incliné ABC, seront paralelles, (*N.* 482.) de même que les droites LP, RS, dans lesquelles ces mêmes triangles coupent la base ADC de l'onglet; ainsi les angles aigus QLP, TRS, &c. de ces triangles, ayant leurs côtés paralelles chacun à chacun feront égaux, (*N.* 479.) & par conséquent tous les triangles rectangles QLP, TRS, &c. seront semblables entr'eux. Or, les triangles semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc tous les triangles rectangles QLP, TRP, &c. qui couperont l'onglet

sont entr'eux comme les quarrés de leurs bases LP, RS, &c. ou comme les eercles que ces bases décriroient en tournant au tour du diamétre AC : or, tous ces cerlces composeroienr une sphere; donc, &c.

514. COROLLAIRE Ier. *De tous les triangles rectangles qui composent un onglet, le plus grand est le triangle* ODB *qui passe par le centre* O *de la base du cylindre, & les autres sont égaux deux à deux.*

Les triangles qui composent l'onglet sont entr'eux comme les quarrés de leurs bases LP, RS, &c. or, ces bases étant les élémens du demi cercle ADC; la plus grande est le rayon OD; donc le plus grand triangle est le triangle ODB; de même les bases RS, MN également éloignées de la base OD, sont égales à cause qu'elles sont les moitiés des cordes SV, NE également éloignées du centre O; donc les triangles RST, MNZ sont égaux; & ainsi des autres.

515. COROLLAIRE II. *Tout onglet de la premiere espece est égal au produit de son plus grand triangle* OBD *multiplié par les deux tiers du diametre* AC *de sa base.* Tous les triangles qui composent un onglet de la premiere espece sont entr'eux comme les cercles que décriroient leurs bases en tournanr au tour du diametre AC de la base; or, ces cercles composeroienr une sphere, & seroient par conséquenr égaux au plus grand mulipltié par les deux tiers du diametre AC; donc tous les triangles qui composent l'onglet sont égaux au plus grand triangle ABD multiplié par les deux tiers du diametre AC.

516. COROLLAIRE III. *La hauteur d'un onglet de la premiere espece, est égale à la hauteur du plus grand triangle.* Tous les triangles LPQ, RST, ODB, &c. qui composent l'onglet étant semblables, leurs bases LP, RS, OD, &c. sont entre-elles comme leurs hauteurs PQ, ST, DB, &c. or, la base OD du plus grand triangle ODB est la plus grande; donc sa hauteur DB est la plus grande aussi, & par conséquent elle est la hauteur de l'onglet.

517. COROLLAIRE IV. *Les onglets de la premiere espece qui ont leurs hauteurs égales & les bases aussi, sont égaux; ceux qui ont les hauteurs inégales & les bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs; ceux qui ont les bases inégales & les hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases, & ceux qui ont les bases réciproques aux hauteurs, sont égaux.* Soient les deux onglets ABCD, AECF (*Fig.* 341.) dont les bases sont égales & les hauteurs aussi; les grands

triangles BDO, EOF de ces deux onglets sont égaux; car la base DO est égale à la base OF, l'une & l'autre étant rayons de cercles égaux & la hauteur DB égale à la hauteur FE, par la supposition; or, l'un & l'autre onglet est le produit de son grand triangle multiplié par les deux tiers du diametre AC qui est ici le même; donc les deux onglets sont égaux.

Maintenant, supposons que les deux onglets ABCD, *abcd* (*Fig.* 342.) ayent leurs bases ADC, *adc* égales, & leurs hauteurs DB, *db* inégales, leurs grands triangles ODB, *odb* ayant leurs bases OD, *od* égales, à cause qu'elles sont rayons de cercles égaux, sont entr'eux comme leurs hauteurs BD, *bd*; ainsi les onglets étant entr'eux comme leurs grands triangles multipliés par les deux tiers des diamétres AC, *ac* de leurs bases qui sont égaux, seront entr'eux comme les droites ou les hauteurs BD, *bd*.

De même si les bases ADC, *adc* sont inégales, & les hauteurs BD, *bd* égales, les grands triangles OBD, *obd* sont entr'eux comme leurs bases OD, *od*; ainsi les onglets étant entr'eux comme les grands triangles multipliés par les deux tiers des diametres AC, *ac* sont entr'eux comme $OD \times \frac{2}{3} AC$, $od \times \frac{2}{3} ac$; mais les deux produits $OD \times AC$, $od \times ac$ sont les moitiés des quarrés des diametres AC, *ac*, lesquelles moitiés sont entr'elles comme les quarrés de ces diametres, de même que les tiers de ces moités, & les bases ADC, *adc* sont aussi entr'elles comme les quarrés de ces diametres; donc les onglets sont entr'eux comme leur bases ADC, *adc*.

Enfin si les bases ADC, *adc* sont réciproques aux hauteurs DB, *db*, les onglets seront entr'eux comme $\frac{1}{2} OD \times DB \times \frac{2}{3} AC$, $\frac{1}{2} od \times db \times \frac{2}{3} ac$, ou comme $OD \times DB \times AC$, $od \times db \times ac$; or, les bases ADC, *adc* sont entr'elles comme $OD \times AC$, $od \times ac$ qui sont les moitiés de quarrés de leur diametres; donc les onglets seront entre eux comme $ADC \times DB$, $adc \times db$; mais par la supposition, nous avons ADC. *adc* :: *db*. DB; donc en faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous aurons $ADC \times CB = adc \times db$, & par conséquent les deux onglets égaux.

518. COROLLAIRE V. *Tout onglet cylindrique de la premiere espece, est à la sphere que sa base décriroit en tournant au tour de son diametre* AC, (Fig. 340.) *comme sa hauteur est à la circonférence du grand cercle.* Si la hauteur DB du plus grand triangle OBD est égale à la circonférence du grand cercle de la sphere, ce triangle est égal au cercle; (*N.* 378.) ainsi l'onglet étant le produit de

ce triangle par les deux tiers du diametre, & la sphere étant le produit du grand cercle égal au grand triangle, par les deux tiers du même diametre, l'onglet & la sphere seront égaux; mais si la hauteur DB du plus grand triangle OBD est plus ou moins grande que la circonférence du grand cercle de la sphere; ce grand triangle ne differera du triangle égal au grand cercle que par la hauteur, & par conséquent il sera au grand cercle comme la hauteur DB à la circonférence; ainsi l'onglet & la sphere seront entr'eux comme la hauteur DB multipliée par les deux tiers de AC, est à la circonférence du grand cercle multipliée aussi par les deux tiers de AC, & par conséquent, comme la hauteur DB à la circonférence du grand cercle.

519. COROLLAIRE VI. *Si un onglet de la premiere espece est coupé par un plan perpendiculaire* RST (Fig. 342.) *perpendiculaire sur la base* APC *& sur le plan incliné* ABC, *les parties coupées* ATSR, RSTBC, *seront entr'elles comme les segments correspondants de la sphere* VAS, VCS. C'est une suite évidente du Corollaire précédent.

520. PROBLEME. *Un onglet cylindrique de la premiere espece étant coupé par un ou plusieurs plans perpendiculaires sur la base; mais qui ne sont pas perpendiculaires sur le plan incliné, trouver la solidité des différentes portions de cet onglet.*

Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 342.) coupé par le plan HMNR perpendiculaire sur la base ADC & paralelle au diametre AC; ce plan coupe sur la base ADC une base ANRC, & je dis que la portion d'onglet ANHMRC coupée par ce plan, est à l'onglet comme le solide décrit par la bande ANRC en tournant autour du diametre AC, est à la sphere décrite par la base ADC, en tournant au tour de AC; ce que je prouve ainsi.

Le plan HMNR étant perpendiculaire sur la base ADC, est paralelle à toutes les hauteurs des triangles qui composent l'onglet à cause que ces hauteurs sont aussi perpendiculaires sur la même base ADC; d'où il suit que ce plan coupe les triangles par des lignes paralelles à leurs hauteurs, & que les triangles qui composent la portion ANHMRC sont semblables entr'eux & aux triangles qui composent l'onglet, & sont par conséquent comme les quarrés de leur bases OZ *ab*, &c. c'est-à-dire comme les quarrés des élémens de la bande ANCR de la base ADC, ou comme les cercles que ces élémens décrivent en tournant au tour de AC; ainsi puisque chaque triangle OXZ de la portion

ANHMRC, eſt à chaque triangle OBD de l'onglet, comme le cercle décrit par la baſe OZ, eſt au cercle décrit par la baſe OD, il eſt facile de conclure que tous les triangles qui compoſent la portion ANHMRC, c'eſt-à-dire la portion ANHMRC, eſt à tous les triangles qui compoſent l'onglet ou à l'onglet, comme tous les cercles des Elémens de la bande ANRC ou le ſolide que cette bande décrit en tournant autour de AC, eſt à tous les cercles des Elémens de la baſe ADR de l'onglet ou à la Sphére.

On prouvera de la même façon que la portion ANHMRC (*Fig.* 343.) coupée par un plan HNRM perpendiculaire à la baſe ADC de l'onglet, mais non paralelle au diamétre AC eſt à l'onglet comme le ſolide décrit par la portion ANRC de la baſe qui tourneroit autour de AC eſt à la Sphére que la baſe ADC décriroit.

La portion ANHMRC étant connue, il eſt clair que ſi on la retranche de l'onglet, le reſte ſera l'autre portion NHBMRD.

521. COROLLAIRE. *Toute portion* ANHMRC *d'un onglet de la premiere eſpèce* ABCD (*Fig.* 342, 343.) *coupée par un plan* HNRM *perpendiculaire ſur la baſe* ADC *eſt au ſolide, décrit par la portion* ANRC *qui tourneroit autour du diamétre* AC, *comme la hauteur* DB *de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle de la Sphére.*

L'onglet eſt à la Sphére que ſa baſe décrit comme la hauteur DB de ſon grand triangle eſt à la circonférence du grand cercle de la Sphére (*N.* 518.), mais l'onglet eſt à la Sphére, comme la portion ANHMRC eſt au ſolide décrit par la portion ANRC de la baſe ADC qui tourneroit autour du diamétre AC (*N.* 520.), & par conſéquent la portion ANHMRC eſt à ce ſolide comme la hauteur AB de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle.

522. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un onglet de la ſeconde eſpèce.*

Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 344.), dont la baſe ADC eſt moindre qu'un demi-cercle ; il eſt certain que cet onglet ſera encore compoſé d'une infinité de triangles rectangles ſemblables paralelles entr'eux, & perpendiculaires ſur la baſe ADC, & ſur le plan incliné ABC, ainſi ces triangles ſeront encore entr'eux comme les quarrés de leurs baſes ou comme les cercles que ces baſes décriroient, & par conſéquent l'onglet eſt au ſolide que ſa baſe ADC décrit en tournant autour de AC, comme la hauteur BD de ſon grand triangle eſt à la circonférence du grand cercle du

solide, décrit par la base DO de ce triangle; mais comme nous ne connoissons pas le solide que décrit la base ADC en tournant autour de AC, nous ne pouvons pas non plus connoître l'onglet, à moins que nous n'ayions recours à la méthode des Centres de Gravité, dont nous parlerons dans la suite. Or, en attendant, voici comme on peut faire :

Je prolonge le plan incliné ABC jusqu'à ce qu'il coupe l'axe LM du cylindre en un point R. Je coupe le cylindre & le plan incliné par un plan XSVT qui passe par le point R, & qui soit paralelle à la base du cylindre, & ce plan est un cercle qui est coupé au centre par le plan incliné SBT, ainsi l'onglet SBTX est un onglet de la premiere espéce, & par conséquent retranchant de cet onglet la partie SXTCDA, le reste sera l'onglet de la seconde espéce ABCD.

Je coupe l'onglet SBTX par un plan ACZQ perpendiculaire sur la base SXT, & la portion ACZQST est au solide que sa base ZQST décriroit en tournant autour de ST, comme l'onglet SBTX est à la Sphére que sa base décriroit (*N.* 520.); ainsi je puis connoître la partie ACZQST, & la retrancher de l'onglet SBTX, ce qui me donnera un reste QXZCBA; retranchant donc de ce reste la portion cylindrique QXZCAD qui est égale au produit de sa base QXZ par sa hauteur XD, le reste sera la solidité de l'onglet ABCD.

Soit l'onglet ABCD de la seconde espéce (*Fig.* 345.), dont la base ADC est plus grande qu'un demi-cercle. Par le point O où son plan incliné ABC coupe l'axe, je fais passer un plan GEHF paralelle à la base du cylindre, & par conséquent j'ai un onglet EBFG de la premiere espéce que je puis aisément connoître, & il faut ajouter à cet onglet la portion EGFCARDS; or, la partie RDSFGE de cette portion est facile à connoître, puisqu'elle est le produit de sa base RDS multipliée par sa hauteur DG, il ne me reste donc plus qu'à trouver l'autre partie REFSCA. Pour cela, je prolonge le plan incliné jusqu'à ce qu'il coupe le côté opposé du cylindre en N, ce qui me donne un onglet renversé de la premiere espéce ENFH qui est égal à l'onglet EBFG, à cause que les bases de ces onglets sont égales, & que l'inclinaison de leurs plans est la même; je coupe l'onglet ENFH par un plan AVTC perpendiculaire sur la base, & sa portion AVTCFE peut se connoître aisément (*N.* 520.); or, la portion cylindrique RACSFEVT étant le produit de sa base RSCA

par

par ſa hauteur RE eſt connue ; retranchant donc de cette portion la partie AVTCFE, le reſte ſera la ſolidité de l'autre partie AREFSC, ainſi la ſolidité de l'onglet ABCD ſera connue.

523. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABPDH (Fig. 346.) *tronqué par un plan incliné* DPHB *qui paſſe par l'extrêmité* B *de la baſe.*

Je multiplie la baſe AB du cylindre tronqué par la moitié de ſa hauteur, & le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe RS, je fais paſſer un plan MDNH paralelle à la baſe du cylindre, ce plan ſera un cercle coupé en deux parties égales par le plan incliné qui paſſe par ſon centre ; ainſi nous aurons deux onglets de la premiere eſpéce PDHM, DBHN, qui ſeront égaux entr'eux, à cauſe qu'ils ont les baſes égales, & que les plans inclinés faiſant des angles égaux ſur les baſes, forment des hauteurs égales MP, NB ; c'eſt pourquoi ajoutant à chacun de ces onglets la portion cylindrique ABDHM, nous aurons le cylindre AMNB égal au cylindre tronqué ABDPH ; or, le cylindre AMNP a pour hauteur la droite AM qui eſt la moitié de la droite AP. Donc, &c.

524. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABCD (Fig. 347.) *tronqué par un plan incliné* DC *qui coupe les deux côtés* DA, CB *du cylindre.*

Je prens la moitié MX de la différence DX de la plus grande hauteur DA du cylindre tronqué à la moindre hauteur CB ; j'ajoute cette différence à la moindre hauteur CB ou AX, ce qui donne la droite AM, & multipliant la baſe AB du cylindre par AM, le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe, je fais paſſer le cercle MN qui ſera coupé en deux également par ce plan, j'aurai deux onglets de la premiere eſpéce égaux PDHM, PCHN, & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ABCHMP, j'aurai le cylindre ABNM égal au cylindre tronqué ABCD ; or, le cylindre ABNM a pour hauteur la droite AM. Donc, &c.

525. PROPOSITION CXVI. *Si un cercle* ABCD (Fig. 348.) *tourne autour d'une tangente* HP *paralelle à l'un de ſes diamétres* BD, *le ſolide qu'il aura décrit après ſa révolution entiere, ſera égal à un cylindre qui a pour baſe le cercle* ABCD, *& pour hauteur une ligne droite égale à ſa circonférence.*

Suppoſons que le cercle ABCD (*Fig.* 349.) ſoit égal au cercle ABCD de la Figure 348 ; je conçois que le diamétre DB

paralelle à la tangente PH soit coupé en une infinité de parties égales, & que de tous les points soient menées des perpendiculaires à la tangente PH, lesquelles aillent aboutir à la circonférence en A, S, &c. Quand le cercle tournera autour de PH, le diamétre AC perpendiculaire à la tangente PH décrira un cercle; mais les autres Elemens SV, &c. du cercle ABCD décriront des couronnes; car ST décrira un cercle, & sa partie VT en décrira un autre: ainsi ce que SV décrira sera le cercle décrit par ST, moins le cercle décrit par VT, c'est-à-dire une couronne, & ainsi des autres Elemens; enfin les extrémités D, B du diamétre DB paralelle à la tangente PH décriront des circonférences, & il est clair que le solide décrit par le cercle ABCD autour de cette tangente, ne sera pas différent de la somme du cercle décrit par le diamétre, des couronnes décrites par les autres Elémens, & des circonférences décrites par les points D, B.

Maintenant sur l'extrémité A du diamétre AC, j'éleve une droite AR perpendiculaire sur le plan du cercle ABCD, & faisant cette droite égale à la circonférence que le diamétre AC décriroit en tournant autour de PH; je mene la droite RC, ce qui me donne un triangle CAR égal au cercle que le diamétre AC décriroit autour de PH (*N.* 378.); de même si sur l'extrémité de la droite ST, j'éleve une droite SZ perpendiculaire au cercle, & par conséquent paralelle à AR, & que je fasse SZ égale à la circonférence que ST décriroit autour de PH, le triangle TSZ que je formerai en menant ZT sera égal au cercle décrit par ST autour de PH, & menant dans ce triangle la droite VX paralelle à la droite SZ, le triangle TVX semblable au triangle TSZ sera égal au cercle que TV décriroit autour de PH; car nous aurons ST. SZ :: TV. VX; mais SZ est la circonférence du rayon ST; donc VX sera la circonférence du rayon TV, & par conséquent TVX sera égal au cercle du rayon TV; ainsi le trapezoïde SZXV sera égal à la couronne que décriroit SV en tournant autour de PH. Faisant donc la même chose à l'égard des autres Elémens du cercle, ainsi que la Figure le fait voir, & élevant sur les points D, B, des perpendiculaires égales aux circonférences que ces points décriroient autour de PH, le triangle ARC joint aux trapezoïdes faits sur les Elémens du cercle, & aux deux perpendiculaires élevées sur les points D, B, sera égal au cercle que décriroit AC, joint aux couronnes que les Elémens décri-

roient, & aux circonférences que décriroient les points D, B.

Or, le solide composé par le triangle ARC, & par les trapezoïdes faits sur les Elémens du cercle joints aux droites sur les points D, B forment un cylindre tronqué qui a pour base le cercle ABCD, & pour hauteur la droite AR égale à la circonférence que décriroit le diamétre AC autour de PH; car les triangles CAR, TSZ, TVX, &c. étant tous rectangles & semblables, les angles qu'ils forment sur PH sont égaux, & par conséquent leurs hypothenuses étant paralelles entr'elles forment un plan incliné, & leurs hauteurs AR, SZ, VX, &c. forment la surface d'un cylindre tronqué par ce plan; donc le solide compris sous toutes ces lignes, est un cylindre tronqué par un plan incliné qui passe par l'extrémité de sa base. Supposant donc que ce cylindre soit représenté par la Figure 350, sa solidité est égale à sa base multipliée par la moitié AM de sa hauteur AR (*N.* 523.); mais AR étant la circonférence du diamétre, sa moitié AM est la circonférence du rayon CO moitié du diamétre, c'est-à-dire la circonférence de la base; donc le cylindre tronqué ACR, & par conséquent le solide que décriroit la base AC autour de PH, est égal à la base AC multipliée par sa circonférence.

526. Lorsqu'un cercle ABCD (*Fig.* 348.) tourne autour d'une tangente PH, le solide qu'il décrit, se nomme *Anneau fermé*, parce que le vuide BHCSD qui se trouve au milieu n'est point percé à jour. La partie de ce solide décrite par le demi-cercle BCD se nomme *Partie intérieure*, & la partie décrite par le demi-cercle BAD, se nomme *Partie extérieure*, le cercle ABCD se nomme *Cercle générateur* de l'anneau.

527. COROLLAIRE. Ier. *La partie extérieure d'un anneau est égale à la moitié du cylindre qui a pour base le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur la circonférence, plus une Sphère qui auroit pour grand cercle le cercle générateur.*

Le cercle AC (*Fig.* 350.) en tournant autour de PH produit un anneau fermé égal au cylindre tronqué ACR; or, tous les points du diamétre DB du demi-cercle DCB étant également éloignés de PH, produisent en tournant autour de PH des circonférences toutes égales à la circonférence du rayon CO, & par conséquent à la droite AM ou DS; élevant donc sur tous les points de ce diamétre des droites égales à DS, & perpendiculaires sur le cercle AC, elles formeront un rectangle DSNB, & la solide DSNBC sera égal à la partie intérieure de l'anneau;

donc le solide DABRNS sera égal à la partie extérieure de l'anneau. Mais ce solide est composé de la partie DABNMS égale à la moitié du cylindre AT, qui a pour base le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence de cette base, & d'un onglet SMNR qui a pour base le demi-cercle SMN égal au demi-cercle de la base AC, & pour hauteur la droite MR, lequel onglet est égal à la Sphére que décriroit sa base en tournant autour de son diamétre (*N.* 518.). Donc, &c.

528. Corollaire II. *La partie intérieure d'un anneau fermé est égale à la moitié du cylindre qui auroit pour base le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence, moins une Sphére dont le grand cercle seroit le cercle générateur.*

La partie intérieure est égale au solide DSNBC (*Fig.* 350.); c'est-à-dire au demi-cylindre DCBNTS, moins l'onglet renversé SNTC égal à l'onglet SMNR. Donc, &c.

529. Probleme. *Trouver le vuide* BRCSD (Fig. 348.) *que laisse le cercle* ABCD *en tournant autour de sa tangente* PH.

Des extrémités B, D du diamétre BD, je mene les droites BO, DX perpendiculaires sur la tangente PH, ce qui forme un rectangle BOXD, lequel en tournant autour de PH, produit un cylindre BRSD, tandis que le demi-cercle inscrit dans ce rectangle produit la partie intérieure de l'anneau; retranchant donc du cylindre BRSD la partie intérieure de l'anneau, le reste sera le vuide demandé BRCSD.

Nota. Que la moitié de ce vuide, c'est-à-dire la partie DCS, est un cône curviligne dont le côté DC est un quart de circonférence de cercle, & que par conséquent on peut mesurer ces sortes de cônes, de même que les pyramides curvilignes dont les arêtes sont des quarts de circonférences qui tournent leur convexité vers l'axe, ainsi qu'on va voir dans le Problême suivant.

530. Probleme. *Trouver la solidité d'une pyramide* ABCDE (Fig. 351.) *dont les arêtes* AE, BE, &c. *sont des quarts de circonférence de cercle qui tournent leur convexité vers l'axe* OE.

Je circonscris à la base un cercle DABC, ce que je puis toujours faire, parce qu'il faut que les lignes AO, DO, OB, OC menées des angles de la base au centre O soient toujours égales entr'elles, & à la hauteur OE, si l'on veut que les arêtes AE, BE soient des quarts de circonférence, & je conçois un cône qui auroit pour base le cercle ABCD, & dont le côté seroit l'arête AE, & ce cône m'est connu par le Problême précédent. Je

conçois aussi que le cône & la pyramide soient coupés par une infinité de plans paralelles à leurs bases, lesquels plans seront dans le cône des cercles, tels que le cercle LFGH, & dans la pyramide des plans LFGH semblables à la base, à cause que leurs côtés & leurs diagonales sont paralelles à celles de la base, ce qui fait que ces plans LFGH, &c. sont semblablement inscrits dans les cercles LFGH, &c. ainsi chaque plan LFGH de la pyramide sera au cercle correspondant LFGH du cône, comme la base ABCD de la pyramide est au cercle ABCD, qui est la base du cône, & par conséquent la pyramide est au cône, comme la base ABCD est au cercle ABCD. Je dis donc par Régle de trois: comme le cercle ABCD est à la base ABCD, ainsi le cône est à un quatriéme terme qui sera la pyramide cherchée.

Definition. Si un cercle ABCD (*Fig.* 352.) tourne autour d'une droite PH perpendiculaire sur le diamétre AC prolongé en O, & paralelle au diamétre BD, le solide décrit après la circonvolution, se nomme *Anneau ouvert*, parce qu'il laisse autour de PH un creux BCDSQR percé à jour. La partie de ce solide décrite par le demi-cercle BCD, se nomme *Partie intérieure de l'anneau*, & la partie décrite par le demi-cercle BAD, se nomme *Partie exterieure*; le cercle ABCD est le cercle générateur.

531. Proposition CXVII. *La solidité d'un anneau ouvert, est égale à un cylindre qui auroit pour base le cercle générateur* ABCD, *& pour hauteur une ligne égale à la circonférence que décrit son centre* X *autour de* PH.

Je conçois que le cercle soit divisé en ses Elémens paralelles au diamétre, lesquels soient prolongés jusqu'à PH. (*Fig.* 353.) Quand le cercle tournera, la ligne AO décrira un cercle autour de PH, & sa partie OC en décrira un autre, & par conséquent le diamétre AC décrira une couronne, c'est-à-dire le cercle du rayon AO, moins le cercle du rayon CO. Par la même raison les autres Elémens tels que SV décriront aussi des couronnes, & les extrémités D, B décriront des circonférences, lesquelles jointes aux couronnes des Elemens, formeront ensemble l'anneau.

Je conçois que sur l'extrémité A soit élevée une droite AR perpendiculaire sur le plan du cercle ABCD, & égale à la circonférence que ce point décriroit autour de PH, & menant la droite RO, le triangle ARO est égal au cercle que la droite AO dé-

criroit autour de PH ; de même élevant sur le point C une droite CL perpendiculaire sur le cercle, & égale à la circonférence que décriroit la droite CO, le triangle COL est égal au cercle que décriroit CO, & comme ce triangle est semblable au triangle AOR, son hypothenuse LO est une portion de l'hypothenuse OR ; ainsi le trapezoïde RACL est égal à la couronne que décriroit AC ; & faisant la même chose sur les autres Elémens SV, &c. on aura autant de trapezoïdes SZKV, &c. égaux aux couronnes de l'anneau chacun à chacune ; enfin, élevant sur les extrémités D, B du diamétre des droites égales aux circonférences qu'elles décriroient ; ces deux droites, jointes aux trapezoïdes, seront égales à l'anneau.

Or, toutes les hauteurs de ces trapezoïdes forment la surface d'un cylindre, & les hypothenuses RO, ZT, &c. forment un plan incliné qui coupe cette surface, & qui ne passe pas l'extrémité de la base ABCD ; donc toutes ces lignes renferment un cylindre tronqué par un plan incliné qui coupe ses côtés opposés. Supposant donc que ce cylindre soit represénté par la Figure 354, sa solidité est égale à sa base AC multipliée par la hauteur AM égale à la moindre hauteur AF, plus la moitié MF de la différence RF des hauteurs RA, LC (*N.* 524.) ; mais AM=XQ, & à cause des triangles semblables RAO, QXO ; nous avons OA. AR :: OX. XQ ; donc AR étant égal à la circonférence de AX, nous aurons XQ égal à la circonférence de OX, & par conséquent l'anneau est égal au cylindre qui a pour base le cercle générateur, & pour hauteur une droite égale à la circonférence que son centre X décriroit autour de PH.

532. COROLLAIRE Ier. *La partie intérieure de l'anneau est égale à la moitié du cylindre* AMNEC (Fig. 354.) *égal à l'anneau, moins un onglet* SNLE, *égal à la Sphére dont le grand cercle seroit le cercle générateur.*

Tandis que le demi-cercle BCD tourneroit autour de PH, tous les points du diamétre DB étant également éloignés de PH décriroient des circonférences égales à la droite XQ. Elevant donc sur tous ces points des perpendiculaires égales à XQ ; nous aurons le paralellogramme DSNB, & par conséquent le solide DCBNLS est égal à la partie intérieure de l'anneau ; or, il manque à ce solide pour être égal au demi-cylindre DCBNES un onglet NSLE qui a pour base le demi-cercle NES égal au demi-cercle générateur, & pour hauteur la droite EL égale à la

moitié de la différence RF des hauteurs RA, LC; mais RA étant égal à la circonférence du rayon AO, & CL égal à la circonférence du rayon CO; la différence RF doit être égale à la circonférence que décriroit le diamétre AC qui est la différence des rayons AO, CO; donc la moitié MF est égal à la circonférence de la moitié CX du diamétre, c'est-à-dire à la circonférence ABCD, & par conséquent l'onglet SNEL, est égal à la Sphére qui auroit pour grand cercle, le cercle générateur (*N.* 518.). Donc, &c.

533. Corollaire II. *La partie extérieure de l'anneau ouvert est égale à la moitié du cylindre* AMNEC (Fig. 354.) *qui auroit pour base le cercle générateur* AC, *plus un onglet* SMNR *égal à la Sphére dont le grand cercle seroit le cercle générateur.* Par le Corollaire précedent la partie intérieure de l'anneau est égale à la partie cylindrique DBCNSL; donc puisque l'anneau entier est égal au cylindre tronqué ACLR, la partie extérieure doit être égale au reste DABNSR; mais ce reste est composé du demi-cylindre DABNSM, plus de l'onglet SMNR égal à l'onglet SENL. Donc, &c.

534. Probleme. *Trouver la solidité du vuide* BCDSQR (Fig. 352.) *d'un anneau ouvert.*

Des extrémités D, B, du diamétre DB paralelle à la droite HP, je mene les droites BF, DZ perpendiculaires sur HP, ce qui forme un rectangle BFZD. Or, tandis que le cercle ABCD tourne autour de HP, ce rectangle décrit un cylindre BRSD, & le demi-cercle BCD décrit la partie intérieure de l'anneau; retranchant donc du cylindre BRSD la partie intérieure, le reste est la solidité du vuide BCDSQR.

Nota. Que la moitié de ce vuide, c'est-à-dire CDSQ forme un cône tronqué paralellement à sa base par le cercle que CO décrit, & dont le côté est un quart de circonférence de cercle CD qui tourne sa convexité vers l'axe OP; & que par conséquent on peut mesurer ces sortes de cônes, de même que les pyramides tronquées par un plan paralelle à leurs bases, & qui ont pour arêtes des quarts de circonférences de cercle, comme on va voir dans le Problême suivant.

535. Probleme. *Trouver la solidité d'une pyramide* ABCDEFHG (Fig. 355.) *tronquée par un plan* EFHG *paralelle à sa base* ABCD, *& dont les arêtes* AF, BH, &c. *sont des quarts de circonférence de cercles convexes du côté de l'axe.*

Je circonſcris un cercle autour de la baſe ABCD ; & je conçois un cône tronqué qui ait pour côté le quart de circonférence de cercle AF ; je conçois encore que le cône & la pyramide ſoient coupés par une infinité de plans paralelles à leurs baſes qui feront des cercles dans le cône, & des plans ſemblables à la baſe ABCD dans la pyramide. Ainſi tous les cercles du cône feront entr'eux comme tous les plans de la pyramide, ou comme le cercle de la baſe du cône eſt au plan de la baſe de la pyramide : or, le cône m'eſt connu, ainſi qu'on vient de voir dans la Remarque du Corollaire précédent. Donc je n'ai qu'à dire : la baſe du cône eſt au cône, comme la baſe de la pyramide eſt à un quatriéme terme qui ſera la pyramide.

536. PROBLEME. *Trouver la ſolidité d'un ſolide à calotte, c'eſt-à-dire d'une pyramide dont les arêtes ſont des quarts de circonférences concaves du côté de l'axe.*

Soit le ſolide ABCDE (*Fig.* 356.) qui a pour baſe le paralellogramme ABCD, & dont les arêtes AE, BE, &c. ſont des quarts de circonférences dont la concavité eſt en dedans du ſolide; je mene les diagonales AC, BD de la baſe, & du point O où elles ſe coupent, j'éleve perpendiculairement ſur la baſe la droite OE, qui ſera l'axe du ſolide, car les droites AO, OE, étant perpendiculaires entr'elles, doivent embraſſer un quart de circonférence AE, & par la même raiſon les droites DO, OE doivent embraſſer un quart de circonférence, & ainſi des autres. Je conçois que le ſolide ſoit coupé par une infinité de plans paralelles à la baſe, tels que FGHL ; tous ces plans ſeront ſemblables entr'eux & à la baſe, à cauſe que leurs côtés ſont paralelles chacun à chacun, & leurs diagonales auſſi, ce qui rend les angles égaux chacun à chacun (*N.* 479.), & par conſéquent les triangles formés par les diagonales, ſont ſemblables. Ainſi ces plans ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs diagonales FH, AC ou de leurs demi-diagonales FR, AO, mais ces demi-diagonales ſont les Elémens du quart de cercle AEO, donc tous les plans ſont entr'eux comme les quarrés, ou comme les cercles décrits par les Elémens FR, &c. qui tourneroient autour du rayon fixe EO; or, ces cercles compoſeroient une demi-ſphére, & pour avoir la valeur de leur ſomme, il faut multiplier le plus grand par les deux tiers de la hauteur OE ; donc pour avoir le ſolide ABCD, il faut multiplier le plus grand plan ABCD par les deux tiers de la hauteur OE.

Nota.

Nota. Ce que nous disons ici doit s'entendre de toutes les calottes qui auroient pour base des polygones réguliers ; de même que ce que nous avons dit ci-dessus (*N*. 530, 535.), touchant les pyramides qui ont pour arêtes des quarts de circonférence convexes vers l'axe, doit s'entendre de toutes les pyramides de cette nature qui auroient des polygones réguliers pour base.

537. *Definition*. Les Solides qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, sont dits *Solides semblables*.

538. Proposition CXVIII *Les paralellepipedes, ou les prismes, ou les cylindres semblables, sont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des côtés homologues de leurs bases, ou des circuits de ces bases, ou enfin de quelques lignes semblablement posées.*

Soient les deux paralellepipedes semblables AE, *ae* (*Fig*. 357.); le premier est égal au produit de sa base ABCD par sa hauteur AH, & le second est égal au produit de sa base *abcd* par sa hauteur *ah* ; donc les deux solides sont entr'eux comme ces produits ; mais les bases ABCD, *abcd* étant semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, *ab* ; donc le premier solide est au second, comme le quarré $\overline{AB}^2$ multiplié par la hauteur AH, est au quarré $\overline{ab}^2$, multiplié par la hauteur *ah* ; mais à cause que les faces HABN, *habn* sont semblables, les hauteurs AH, *ah* sont entr'elles comme les côtés AB, *ab* ; donc le premier solide est au second, comme le quarré $\overline{AB}^2$ multiplié par AB est au quarré $\overline{ab}^2$ multiplié par *ab*, c'est-à-dire comme le cube $\overline{AB}^3$ du côté AB est au cube $\overline{ab}^3$ du côté homologue *ab*.

Mais les cubes $\overline{AB}^3$, $\overline{ab}^3$ des côtés homologues AB, *ab* sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues AH, *ah* ; donc les solides semblables AE, *ae* sont aussi comme les cubes de leur hauteur, & on prouvera de la même façon qu'ils sont comme les cubes des circuits de leurs bases, &c. à cause que les circuits des bases semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues ; & la démonstration est la même pour les prismes semblables, & pour les cylindres semblables, puisque les bases des cylindres sont des polygones d'une infinité de côtés.

539. Corollaire I[er]. *Les pyramides semblables & les cônes semblables, sont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs ou de leur côtés*

homologues. Les pyramides sont les tiers des prismes de même hauteur; donc si les pyramides sont semblables, leurs prismes le sont aussi, puisque les hauteurs doivent être entr'elles comme les côtés homologues des bases; mais les prismes semblables sont comme les cubes de leurs côtés homologues; donc les pyramides semblables qui sont le tiers des prismes, sont aussi comme les cubes de leurs côtés homologues; & la même chose doit se dire des cônes semblables qui ne sont autre chose que des pyramides; donc les bases ont une infinité de côtés.

540. COROLLAIRE II. *Toutes les spheres sont semblables, & par conséquent entr'elles comme les cubes de leurs diametres.* La sphere ABCD (*Fig.* 358.) est égale à son grand cercle AC multiplié par les deux tiers du diametre BD, (*N.* 510.) & la sphere *abcd* est égale au produit de son grand cercle *ac* par les deux tiers du diametre *bd*; mais les deux cercles AC, *ac* étant semblables, sont comme les quarrés de leurs diametres, ou des diamétres BD, *bd*; donc la sphere ABCD est à la sphere *abcd* comme $\overline{AC}^2 \times \frac{2}{3} AC$ $\overline{ac}^2 \times \frac{2}{3} ac$ ou comme $\overline{AC}^3$ est à $\overline{ac}^3$.

541. COROLLAIRE III. *Les onglets semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des diametres de leurs bases* &c.

Si les onglets semblables ABCE, *abce* (*Fig.* 359.) sont de la premiere espece, le premier est égal à son grand triangle BED multiplié par $\frac{2}{3}$ AC, (*N.* 515.) & le second est égal à son grand triangle *bed* multiplié par $\frac{2}{3}$ *ac*; mais par la supposition, les deux grands triangles étant semblables, sont entr'eux comme les quarrés $\overline{BD}^2$, $\overline{bd}^2$ de leurs bases BD, *bd*; donc les onglets sont entre-eux comme $\overline{BD}^2 \times \frac{2}{3}$ AC, $\overline{bd}^2 \times \frac{2}{3} ac$, ou comme $\overline{BD}^2 \times$ AC, $\overline{bd}^2 \times ac$; or, BD, *bd* :: AC. *ac*; donc les deux onglets sont entr'eux comme $\overline{BD}^2 \times$ BD, $\overline{bd}^2 \times bd$, ou comme $\overline{BD}^3$. $\overline{bd}^3$.

Si les onglets semblables ABCE, *abce* (*Fig.* 360.) sont de la seconde espece, en sorte que leurs bases ABC, *abc* soient moindres chacune qu'un demi cercle, on pourra toujours les regarder comme faisant partie d'autres onglets semblables de la premiere espece NMRE, *nmre* qui auront pour bases des demi-cercles, & alors les deux onglets ABCE, *abce*, seront entr'eux comme les onglets NMRE, *nmre*; car les bases ou segments semblables ABC, *abc*, seront entr'eux comme les bases ou demi-cercles

NMR, *nmr*, & les hauteurs BE, *be* comme les hauteurs ME, *me*; donc les onglets ABCE, *abce* feront entr'eux comme $\overline{ME}^3$. $\overline{me}^3$ ou comme $\overline{BE}^3$. $\overline{be}^3$.

Et par un femblable raifonnement on prouvera que les onglets femblables de la feconde efpece qui ont pour bafes des fegmens plus grands que le demi-cercle, font entr'eux comme les cubes de leurs hauteurs.

542. COROLLAIRE. *En général tous les folides femblables de quelque façon qu'ils foient compofés, font entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.* Car fi l'on prend dans ces folides des points femblablement pofés, & que de tous les angles de leurs faces on mene des droites à ces points, on décompofera les folides en autant de pyramides femblables entr'elles, qui feront comme les cubes de leurs côtés homologues, & par conféquent les folides compofés de ces pyramides feront dans la même raifon.

Du changement des Solides.

543. De tout ce que nous venons de dire, il eft aifé de voir qu'on peut changer une pyramide en un paralellepipede ou un prifme qui auroit même bafe, & pour hauteur le tiers de la hauteur de la pyramide, qu'un prifme ou paralellepipede fe peut changer en pyramide; qu'une fphere peut être transformée en un cylindre ou en un onglet, &c. c'eft pourquoi je me contenterai de donner ici quelques regles générales, pour changer un folide en un autre, ou pour faire un folide égal à plufieurs autres; ou enfin pour rendre un folide femblable à un autre.

544. PROBLEME. *Un paralellepipede* AB (Fig. 361.) *étant donné, trouver un autre paralellepipede qui lui foit égal, & qui ait pour hauteur une droite donnée* ae.

Puifque le paralellepipede que je cherche doit être égal au paralellepide AB, fa hauteur *ac* doit être à la hauteur AE réciproquement comme la bafe ACHD, eft à la bafe *achd* que je cherche; (*N.* 497.) je donne à la bafe que je cherche la dimenfion *ad* égale à la dimenfion AD de la bafe ADCH, & alors la bafe ABCD fera à la bafe *abcd* cherchée comme l'autre dimenfion AC, eft à la dimenfion cherchée *ac*; c'eft pourquoi je dirai la hauteur *ae* eft à la hauteur AE, réciproquement comme AC eft à un quatriéme terme, lequel étant trouvé par les régles ordinaires, fera

la droite *ac*. Faisant donc un paralellepipede sur la base *dach* avec la hauteur *ae*, le paralellepipede *ab* sera égal au paralellepipede AB.

545. PROBLEME. *Un paralellepipe* AB (*Fig.* 361.) *étant donné, trouver un autre paralellepipede qui lui soit égal & qui ait une base donnée.*

Si la base donnée *achd* a une dimension *da* égale à la dimension DA de la base DACH, alors les deux bases sont entr'elles comme les dimensions *ac*, AC; c'est pourquoi je dis la base *dach* est à la base DACH, c'est-à-dire la dimension *ac* est à la dimension AC réciproquement, comme la hauteur AE, est à un quatriéme terme, lequel étant trouvé par les régles ordinaires, donne la hauteur *ae* que je dois donner au paralellepipede *ab*, qui sera égal au paralellepipede AB.

Mais si la base donnée *dpqr* n'a pas une dimension commune avec la base DACH, je la change en un autre *dach* qui soit égale à *dpqr*, & qui ait la dimension *da* égale à la dimension DA, en disant *da* est à *dp*, réciproquement comme *dr* est à *dh*, après quoi j'acheve le reste comme auparavant.

Nota. Que par le mot de dimension on doit toujours entendre une ligne perpendiculaire sur l'autre dimension; car on sçait bien que les dimensions des plans sont longueur & largeur, & que ces quantités doivent être perpendiculaires entr'elles.

546. PROBLEME. *Deux paralellepipedes* AC, ac (Fig. 362.) *étant donnés, trouver un paralellepipede qui leur soit égal.*

Je cherche à donner au paralellepipede *ac* une hauteur égale à la hauteur AM du paralellepipede AC, & pour cela je change d'abord sa base *an* en un autre *pq* qui ait la dimension *dp* égale à la dimension DA, & le paralellepipede *ph* fait sur la base *pq* avec la hauteur *am* est égal au paralellepipede *ac*. Maintenant, je dis; la hauteur AM que je veux donner au paralellepipede *ph*, est à la hauteur *am* qu'il a réciproquement, comme *pr* est à un quatriéme terme RF, & faisant avec RF une base RT qui ait la dimension RN = *dp*, le paralellepipede RS fait sur la base RT, & avec la hauteur RQ = AM sera égal au paralellepipede *ph* ou *ac*, & par conséquent le paralellepipede AS sera égal aux deux paralellepipedes donnés.

547. COROLLAIRE I[er]. On peut de la même façon faire un paralellepipede égal à plusieurs autres, ou à plusieurs cubes.

548. COROLLAIRE II. Pour faire un paralellepipede égal à la

somme d'un paralellepipede & d'un prisme, qui auroit, par exemple, pour base, un pentagone, je changerois la base du prisme en triangle, & le triangle en rectangle, & par conséquent le paralellepipede qui auroit pour base ce rectangle, & pour hauteur la hauteur du prisme seroit égal au prisme; c'est pourquoi je n'aurois plus qu'à faire un seul paralellepipede égal aux deux, comme ci-dessus.

On peut de la même façon faire un paralellepipede égal à deux ou plusieurs pyramides, en changeant auparavant les pyramides en paralellepipedes.

De même encore, on peut faire une pyramide égale à plusieurs pyramides, en changeant d'abord toutes les pyramides en paralellepipedes, ensuite faisant un paralellepipede égal à la somme des paralellepipedes; puis en faisant une pyramide égale au paralellepipede total, c'est-à-dire triplant la hauteur de ce paralellepipede; car une pyramide de même base qu'un paralellepipede & qui a le triple de la hauteur, est égale au paralellepipede.

Je laisse aux Commançans le plaisir de trouver une infinité d'autres changemens qu'on peu faire sur les solides, en suivant ce qui vient d'être dit.

549. **Probleme.** *Exprimer en lignes, la raison de plusieurs solides.*

Je change les solides donnés en autant de paralellepipedes, dont les bases ayent une dimension commune & qui ayent la même hauteur, & alors tous ces paralellepipedes seront entr'eux comme les dimensions inégales de leurs bases; c'est pourquoi ces dimensions exprimeront le rapport des solides donnés.

550. **Probleme.** *Faire un cube qui soit à un autre cube dans telle raison que l'on voudra.*

Supposé qu'on demande un cube double du cube AB, (*Fig. 363.*) je prens une droite AH double du côté de AC, & ensuite deux moyennes proportionnelles entre AH & AC; ce qui se fait par le moyen du compas de proportion, comme on verra sur la fin de ce Chapitre, & le cube fait sur la premiere des deux moyennes proportionnelles est double du cube AB.

Car nommant b la premiere des deux moyennes, & c la seconde, nous avons :: AC. b. c. AH; donc $\overline{AC}^3$. b^3 ::. AC. AH; (*Livre Ier. N. 327.*) mais AC est la moitié de AH par la const.

truction ; donc le cube $\overline{AC}^3$ ou AB eſt la moitié du cube fait ſur *b*.

Si l'on demande un cube qui ne ſoit que le tiers du cube AB ; je prens le tiers AD du côté AC, enſuite deux moyennes proportionnelles *m*, *n* entre AC & AD ; ce qui me donne :: AC. *m*. *n*. AD. donc $\overline{AC}^3$. m^3 :: AC. AD ; mais AC eſt triple de AD ; donc le cube $\overline{AC}^3$ ou AB eſt triple du cube fait ſur la premiere moyenne proportionelle *m*.

Enfin ſi l'on demande un cube qui ſoit au cube AB comme une ligne donnée *a* eſt à une ligne donnée *b*, je cherche une quatriéme proportionnelle *x* aux deux lignes données *b*, *a* & au côté AC ; donne ce qui me *b*. *a* :: AC. *x* ou *x*. AC :: *a*. *b* ou AC. *x* :: *b*. *a*. Je cherche deux moyennes proportionnelles entre AC & *x*, & j'ai :: AC. *m*. *n*. *x* ; donc $\overline{AC}^3$. m^3 :: AC. *x* :: *b*. *a*, & par conſéquent le cube fait ſur AC, c'eſt-à-dire le cube AB eſt au cube fait ſur la premiere moyenne portionnelle *m*, comme *b* eſt à *a*.

551. Probleme. *Faire un cube égal à un paralellepide donné* AB (Fig. 364.).

Je change la baſe AC du paralellepipede en un quarré MP qui lui ſoit égal, & multipliant MP par la hauteur MQ égale à la hauteur AE du paralellepipede donné, j'ai le paralellepipede MN égal au paralellepipede AB. Je cherche deux moyennes proportionnelle *m*, *n* entre le côté MR du quarré MP & la hauteur MQ ou AE, & le cube fait ſur la premiere proportionnelle *m*, eſt égal au paralellepipede MN, & par conſéquent au paralellepipede AB.

Car par la conſtruction, nous avons :: MR. *m*. *n*. MQ ; donc $\overline{MR}^3$. m^3 :: MR. MQ, & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous avons $\overline{MR}^2 \times MQ = m^3 \times MR$, & diviſant tout par MR, nous aurons $\overline{MR}^3 \times MQ = m^3$; mais $\overline{MR}^2 \times MQ$ eſt le paralellepipede MN ou AB ; donc ce paralellepipede eſt égal au cube de m^3.

552. Corollaire. On peut par ce moyen faire un cube égal à pluſieurs cubes ou à pluſieurs paralellepipedes, ou à pluſieurs pyramides ou à pluſieurs figures de différente eſpece, en réduiſant d'abord toutes les figures en un paralellepipede égal à toutes les figures, & enſuite un cube égal à ce paralellepipede.

553. PROBLEME. *Deux solides semblables* AC, ac (Fig. 365.) *étant donnés, trouver un autre solide* PX *qui soit égal à la somme des deux, & qui leur soit semblable.*

Je cherche un cube égal aux deux solides donnés, & je suppose que la ligne *s* soit le côté de ce cube; je cherche aussi un cube égal à l'un des solides donnés; par exemple, au solide *ac*, & je suppose que le côté de ce cube soit la droite *r*; ensuite je dis le côté *r* est au côté *ad* du solide *ac*, comme la droite *s* est à un quatriéme terme que je nomme PQ, & qui sera le côté homologue du solide que je cherche. Je dis de même le côté *r* est au côté *am*, comme le côté *s* à un quatriéme terme que je nomme PR, & qui sera un autre côté homologue du solide que je cherche; enfin je dis le côté *r* est à la hauteur *ae*, comme le côté *s* est à un quatriéme terme que je nomme PT, & qui sera la hauteur du solide cherché; faisant donc avec les trois dimensions PQ, PR, PT, le solide PX, ce solide sera égal aux deux donnés, & leur sera semblable.

Car, par la construction, nous avons $r. ad :: s$ PQ, puis $r. am :: s$ PR; enfin $r. ae :: s.$ PT, & multipliant ces trois proportions les unes par les autres, c'est-à-dire les antécédents par les antécédents, les conséquents par les conséquents; nous aurons $r^3. ad \times am \times ae :: s^3. PQ \times PR \times PT$; mais $r^3 = ad \times am \times ae$; donc $s^3 = PQ \times PR \times PT$. Or, s^3 est le cube égal aux deux solides donnés; donc PQ × PR × PT ou le solide PX est aussi égal à ces deux solides; & de plus, il leur est semblable puisque ses dimensions PQ, PR, PT sont semblables aux dimensions du petit solide *ac*.

Nota. Je laisse grand nombre d'autres Problêmes sur cette matiere, qui peuvent se resoudre aisément en suivant les principes que je viens d'établir.

Des Surfaces des Solides.

554. Dans les solides qui ont une ou deux bases, tels que sont les pyramides, les cônes, les demi-sphéres, les paralellepipedes, les prismes, les cylindres, &c. on entend par le mot de *Surface*, la valeur des plans montans ou des côtés courbes qui montent sans y comprendre les bases, & quand on veut que les bases soient comprises on se sert du mot de *Surface totale.*

555. PROPOSITION CXIX. *La surface d'un paralellepipede droit,*

d'un prisme droit ou d'un cylindre droit est égale au circuit de sa base multiplié par la hauteur du solide.

Soit le paralellepipede AB (*Fig.* 361.) ; sa surface n'est autre chose que la somme des quatre rectangles montans compris entre ses deux bases ; or, ces rectangles sont chacun le produit de sa base par sa hauteur, & la hauteur est la même dans chacun d'eux ; donc ces quatre rectangles sont le produit de leurs quatre bases AC, CH, HD, DA par la hauteur AE, c'est-à-dire le produit du circuit ou contour ACHD par la hauteur AE.

On démontrera la même chose pour les prismes droits, & pour les cylindres droits, car les bases des cylindres étant des polygones d'une infinité de côtés, leurs surfaces, lorsqu'ils sont droits, ne sont autre chose qu'une infinité de rectangles qui ont tous pour hauteur la hauteur du cylindre.

556. COROLLAIRE I[er]. Pour mesurer la surface d'un paralellepipede incliné AC (*Fig.* 366.), il faut nécessairement mesurer à part les plans montans, car quoiqu'il puisse arriver que les deux faces AEFD, & sa paralelle BHCO soient encore des rectangles ; cependant la face ABHE, & sa paralelle DOCF seront toujours des paralellogrammes, dont les côtés seront inclinés, de façon que la face ABHE ne sera pas le produit de sa base AC par la longueur AE, au lieu que la face AEFD sera égale à sa base AD multipliée par la longueur AE.

La même chose doit se dire de tous les prismes inclinés.

557. COROLLAIRE II. La même difficulté subsiste pour les cylindres inclinés ; il semble cependant qu'on puisse aisément les mesurer en cette façon : soit le cylindre incliné ABCD (*Fig.* 367.) ; je le coupe par un plan EB perpendiculaire entre les côtés AD, BC, & qui passe par l'extrémité B de la base inférieure AB ; je conçois que le cylindre soit prolongé du côté de D, & je le coupe par un autre plan FC paralelle au plan EB, ce qui me donne un cylindre droit EBCF égal au cylindre incliné ABDC, car la partie cylindrique ABE étant égale à la partie cylindrique DCF, si l'on ajoute de part & d'autre la partie commune EBCD, on aura ABCD = EBCF, multipliant donc la circonférence de la base EB du cylindre droit EBCF par le côté BC, le produit sera la surface du cylindre droit EBCF, & par conséquent du cylindre incliné ABCD ; mais la question consiste à trouver le circuit de la base EB, car cette base n'est plus un cercle comme la base AB, mais un ellipse, comme nous ferons voir dans la suite.

ſuite. C'eſt pourquoi le plus court eſt de meſurer avec un fil le contour de la baſe EB.

558. PROPOSITION CXIX. *La ſurface de toute pyramide droite & dont la baſe eſt un polygone régulier, eſt égale au contour de ſa baſe multipliée par la moitié d'une droite menée du ſommet* E *perpendiculairement ſur le côté ou baſe de l'une des faces.*

Soir la pyramide quarrée & droite ABCD (*Fig.* 368.); ſa ſurface eſt compoſée de quatre triangles ſemblables & égaux, & par conſéquenr elle eſt égale à quatre fois le triangle AEB; or, ce triangle eſt égal à ſa baſe AB multipliée par la moitié de la hauteur FE; donc la ſurfaee de la pyramide eſt égale à quatre fois la baſe AB ou au circuit ABCD, multiplié par la moitié de AE.

569. REMARQUE. Si on coupoit la pyramide par un plan MNOQ paralelle à la baſe, & qui coupât les quatre arêtes chacune en deux également, le contour MNOQ ſeroit égal à la moitié du contour ABCD de la baſe; car les triangles ſemblables EAB, EMN, donnent EA. EM :: AB. MN; mais par la conſtruction nous avons EM $=\frac{1}{2}$EA, donc MN $=\frac{1}{2}$AB, & ainſi des autres faces. Or, comme le produit du contour ABCD par la moitié de EF eſt la même choſe que le produit de la moitié du contour ABCD par la droite EF toute entiere; il s'enſuit que la ſurface de toute pyramide droite & réguliere, eſt égale au produir du contour moyen pris entre le ſommet & la baſe à égale diſtance, multiplié par la droite EF.

570. COROLLAIRE Ier. *La ſurface de tout cône droit* ABC (Fig. 369.) *eſt égale au produit de la circonférence* AB *de ſa baſe multipliée par la moitié du côté* CB, *ou à la circonférence moyenne* MN *multipliée par le côté* CB. Car tout cône régulier eſt une pyramide réguliere d'une infinité de côtés, & la droite menée du ſommet C ſur la baſe infiniment petite de l'un des triangles qui compoſent les faces n'eſt pas différente du côté CB. Donc, &c.

571. COROLLAIRE II. Pour meſurer les ſurfaces des pyramides droites qui ne ſont pas régulieres, & des pyramides inclinées dont les baſes ſont régulieres ou irrégulieres; il faut néceſſairemenr meſurer chaque face des triangles à part, à cauſe qu'ils n'ont pas tous la même hauteur. De-là vient qu'on n'a pas encore trouvé la maniere de meſurer la ſurface d'un cône incliné ABC (*Fig.* 370.). Quelques Auteurs donnent pour régle de multiplier la circonférence de la baſe AB par la moitié du côté CD moyen

entre le plus grand côté AC, & la moindre BC, ce qui n'est fondé sur aucune preuve Géométrique, & ne peut faire tout au plus qu'une approximation.

572. PROPOSITION CXX. *La surface d'une pyramide droite & réguliere tronquée paralellement à sa base est égale à la somme des circuits* ABCD, HGFE *de ses bases* (Fig. 371.) *multipliée par la moitié de la ligne droite* RS *perpendiculaire entre les deux côtés paralelles* AB, HG *de l'une de ses faces* ABGH, *ou bien cette surface est égale au circuit* MNOQ *qui coupe les arêtes* AH, GB, &c. *chacune en deux également, multiplié par la droite* RS.

La pyramide étant droite & réguliere, sa surface tronquée est composée d'autant de trapezoïdes égaux que la base a de côtés; or, le trapezoïde ABGH est égal à la somme de ses deux côtés paralelles AB, HG multipliée par la moitié de sa hauteur RS; ou à la droite MN qui coupe ses deux côtés non-paralelles en deux également multipliée par la hauteur RS (*N.* 386.); donc la surface de la pyramide tronquée est égale à autant de fois l'un ou l'autre de ces produits que la base a de côtés, c'est-à-dire dans cette figure à quatre fois l'un ou l'autre produit; or, 4 fois les côtés AB, HG forment les deux circuits ABCD, HGFE, & quatre fois MN forment le circuit MNOQ. Donc, &c.

573. COROLLAIRE. *La surface d'un cône droit tronqué paralellement à sa base est égale aux circonférences de ses deux bases* AB, DC (Fig. 372.), *multipliées par la moitié du côté* CB, *ou à la circonférence moyenne* EF *qui coupe les côtés* DA, CB *chacun en deux également multipliée par le côté* CB. Cela est évident à cause qu'un cône droit tronqué paralellement à sa base est une pyramide droite, réguliere d'une infinité de côtés, & tronquée paralellement à sa base.

574. COROLLAIRE II. La surface d'une pyramide droite irréguliere tronquée paralellement à sa base, ne peut se mesurer qu'en prenant chaque face à part, & il faut dire la même chose des pyramides inclinées tronquées, à cause que leurs faces sont toutes différentes.

575. PROPOSITION CXXI. *Si l'on inscrit dans un demi-cercle* ACDF *un polygone régulier* ABCDEF (Fig. 373.) *dont deux de ses côtés* AB, EF *se terminent sur les extrêmités* A, F *du diamétre* AF, *& que l'on fasse tourner ce polygone autour du diamètre fixe* AF, *la surface que les côtés* AB, BC, CD, &c. *de ce polygone décriront, sera*

égale à la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême OR *multipliée par le diamétre* AF.

Il est visible que les côtés AB, EF décriront des surfaces de cônes, que les côtés BC, DE qui ne sont pas paralelles à l'axe, & qui ne le touchent point, décriront des surfaces de cônes tronqués paralellement à leurs bases, & que s'il se trouve un côté CD paralelle au diamétre, ce côté décrira une surface de cylindre. Je mene de tous les angles des droites BH, CM, DT, EV perpendiculaires sur le diamétre; & si je démontre que la surface de cône que décrit AB est égale à la droite AH comprise entre le point A & la perpendiculaire BH, multipliée par la circonférence dont le rayon est l'apothême OR, que la surface tronquée que décrit BC est égale à la droite HM comprise entre les deux perpendiculaires BH, CM, multipliée par la même circonférence, & ainsi de suite; j'aurai démontré aussi que la somme de toutes les surfaces est égale à la somme des parties AH, HM, MT, &c. du diamétre AF, c'est-à-dire au diamétre AF multiplié par la circonférence dont le rayon seroit l'apothême OR, & que par conséquent la surface totale décrite par les côtés du polygone est égale à la surface d'un cylindre qui auroit pour base le cercle; donc le rayon seroit OR, & pour hauteur le diamétre AF; pour en venir donc à la démonstration.

La surface de cône décrite par le côté AB est égale à la circonférence de sa base ou à la circonférence que la perpendiculaire BH décriroit autour du diamétre AF multipliée par la moitié du côté AB (*N.* 570.), ou bien en coupant AB en deux également en R, la surface du cône est égale à la circonférence que décriroit la droite RS perpendiculaire sur AF multipliée par le côté AB; or, l'apothême OR étant perpendiculaire sur AB, les triangles rectangles SOR, RAS sont semblables, & à cause des paralelles RS, BH, les triangles rectangles RAS, BAH sont aussi semblables; donc le triangle SOR est semblable au triangle BAH, & par conséquent BA. AH :: RO. RS, & au lieu des deux derniers termes RO, RS, mettant les circonférences dont ils seroient les rayons; lesquelles circonférences sont entr'elles comme leurs rayons, & nommant ces circonférences (RO, (RS, nous aurons BA. AH :: (RO. (RS, & faisant le produit des extrêmes, & celui des moyens, nous aurons BA × (RS = AH × (RO, c'est-à-dire la droite AH multipliée par la circonférence de l'apothême RO égale à la droite AB multipliée par la circon-

férence du rayon RS ou à la ſurface conique que décriroit AB.

Pour démontrer la même choſe à l'égard des ſurfaces de cône tronqué que décriroient les droites BC, DE, &c. qui ne ſont point paralelles au diamétre AF, & qui n'y aboutiſſent point. Je diviſe DE en deux également en P, & menant au centre la droite PO, cette droite eſt encore l'apothême du polygone; du point E, je mene EL paralelle au diamétre, & du point P la droite PX perpendiculaire ſur le même diamétre; le triangle rectangle OPX, eſt ſemblable au triangle *m*P*n*, lequel eſt ſemblable au triangle *n*PE, & celui-ci eſt ſemblable au triangle LED; donc les triangles OPX, LDE étant ſemblables, nous avons DE, LE ou TV :: OP. PX, & au lieu de OP, PX, mettant les circonférences dont elles ſeroient rayons, & que nous nommerons (OP, (PX, nous aurons DE. TV :: (OP. (PX, d'où l'on tire DE × (PX = TV × (OP, mais DE × (PX, eſt la ſurface de cône tronqué que décriroit DE, en tournant autour de AF (*N.* 573.); donc cette ſurface eſt égale à la partie TV du diamétre multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit égal à l'apothême OP ou OR, & ainſi des autres.

Quant à la ſurface que décriroit le côté CD paralelle au diamétre, il eſt clair qu'elle ſeroit égale à la droite CD ou MT multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit l'apothême OZ, ou OR. Donc, &c.

576. COROLLAIRE. Si l'on fait donc un cylindre *abmn*, dont la baſe *ab* ſoit le cercle qui auroit pour rayon l'apothême RO, & dont la hauteur *bm* ſoit égale au diamétre AF, la ſurface de ce cylindre ſera égale à la ſurface que décriroit le polygone en tournant autour de AF. De plus, chaque ſurface particuliere décrite par l'un des côtés tel que BC ſera égale à la ſurface de la portion du cylindre qui auroit pour hauteur la partie HM du diamétre correſpondante au côté BC, & ainſi des autres.

577. PROPOSITION CXXII. *La ſurface d'une Sphére* ABCD (Fig. 374.) *eſt égale à la ſurface du cylindre circonſcrit* EFGH.

La Sphére ABCD eſt décrite par la circonvolution du demi-cercle DAB autour du diamétre BD; or, ce demi-cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés, la ſurface de la Sphére ne différe point de la ſomme des ſurfaces que les côtés infiniment petits du polygone, décrivent en tournant autour de BD, & comme la ſomme de ces ſurfaces eſt égale à la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême du polygone

multipliée par le diamétre BD (*N.* 575.), il s'enfuit que la furface de la Sphére eft égale à ce produit; mais l'apothême d'un polygone d'une infinité de côtés, ne différe pas du rayon OA du demi-cercle; donc la furface de la Sphére eft égale à la circonférence du rayon OA multipliée par le diamétre BD, & par conféquent elle eft égale à la furface du cylindre circonfcrit EFGH.

578. COROLLAIRE Ier. *La furface d'un fegment* MBN *de Sphére eft égale à la furface de la portion* TVGH *du cylindre circonfcrit, laquelle à la hauteur* TH *égale à la hauteur* XB *du fegment.* Car les côtés infiniment petits du polygone compris entre le point B & la perpendiculaire MX décrivent des furfaces égales aux furfaces des portions cylindriques qui ont pour hauteurs les parties du diamétre correfpondantes à ces côtés (*N.* 575.); donc toutes ces furfaces font enfemble égales à la furface cylindrique qui a pour hauteur la partie BX du diamétre correfpondante à la fomme des côtés.

579. COROLLAIRE II. *La furface d'une zone* AMNC *eft égale à la furface* ACVT *de la portion cylindrique qui a pour hauteur la hauteur* OX *de la zone.* Ce qui fe démontre de la même façon, & ainfi des autres parties de la furface de la Sphére.

580. COROLLAIRE IV. *La furface d'une Sphére eft quadruple de fon grand cercle* AC. La furface de la Sphére eft égale à celle du cylindre circonfcrit EFGH, & celle-ci eft égale à la circonférence EF ou AC du grand cercle multipliée par le diamétre. Or, le grand cercle AC eft égal à fa circonférence multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diamétre (*N.* 378.); donc la furface de la Sphére eft à fon grand cercle, comme la circonférence du grand cercle multipliée par le diamétre, eft à la même circonférence multipliée par le quart du diamétre, & par conféquent comme le diamétre eft à fon quart ou comme 4 eft à 1.

581. *REMARQUE.* Une Sphére peut être confiderée comme étant compofée d'une infinité de pyramides dont les bafes infiniment petites, font fur la furface de la Sphére, & dont les fommets font au centre de la Sphére, d'où il fuit que toutes ces pyramides ayant la même hauteur, c'eft-à-dire le rayon de la Sphére, leur fomme fera égale à la fomme de leurs bafes ou à la furface de la Sphére multipliée par le tiers du rayon. Cela pofé, il eft facile de mefurer telle partie que l'on voudra de la Sphére.

Par exemple, pour mefurer le fecteur MBNO (*Fig.* 374.), je

multiplie la surface MBN qui est la base de toutes les pyramides que ce secteur contient par le tiers du rayon BO, & le produit est la solidité cherchée.

De même, pour mesurer le segment sphérique MBN, je mesure le secteur, & j'en retranche le cône MON.

De même encore, pour mesurer la zone sphérique AMNC; j'en retranche le cône MON, & le reste est la somme des pyramides qui auroient leurs sommets en O, & dont les bases seroient sur la surface de la zone; je multiplie donc la surface de la zone par le tiers du rayon, & j'ajoute au produit le cône MON, ce qui me donne la solidité de la zone, & ainsi des autres.

582. PROPOSITION CXXIII. *La surface d'un onglet* ABCE (Fig. 375.) *est à la surface de la Sphére que sa base* ABC *décriroit en tournant autour du diamétre* AC, *comme la plus grande hauteur* EB *de l'onglet, est à la circonférence du grand cercle de la Sphére.*

Supposons que l'onglet soit égal à la sphére, la plus grande hauteur EB sera donc égale à la circonférence du grand cercle; (*N.* 518.) or, la surface de cet onglet est composée d'une infinité de droites élevées perpendiculairement sur tous les points de la circonférence ABC de la base, & égales chacune à chacune aux circonférences que tous les points de ABC décriroient en tournant autour de AC, car partout où on voudra couper l'onglet par un plan HPL paralelle au grand triangle EBO, on aura HP. PL :: EB. BO; mais EB est la circonférence du rayon BO; donc HP sera aussi la circonférence du rayon PL, & ainsi des autres. Or, toutes les circonférences décrites par tous les points de la circonférence CBA qui tourneroient autour de CA, forment la surface de la Sphére; donc la surface de l'onglet est égale à celle de la Sphére.

Que si l'onglet est moindre ou plus grand que la Sphére, la plus grande hauteur EB sera aussi moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle, & par conséquent HP sera aussi moindre ou plus grande que la circonférence du rayon PL, & ainsi des autres; d'où il suit que la surface de l'onglet sera moindre ou plus grande que la surface de la Sphére, selon que EB sera moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle, & que par conséquent la surface de l'onglet sera à celle de la Sphére, comme la hauteur EB est à la circonférence du grand cercle.

583. COROLLAIRE I[er]. *Si l'on coupe un onglet de la premiere espece*

par un plan HPL *paralelle à son grand triangle, la surface de la portion* HPLC *coupée par ce plan est à la surface que sa base* PCL *décriroit en tournant autour du diamétre, comme la hauteur* EB *de l'onglet est à la circonférence du grand cercle.* C'est une suite évidente de cette Proposition.

584. COROLLAIRE II. *La surface d'un onglet de la premiere espece* ABCD *est égale à un rectangle qui auroit pour base le diamétre* AC, *& pour hauteur une droite égale à la plus grande hauteur* EB *de l'onglet.*

Si l'onglet est égal à la Sphére, sa surface est aussi égale à celle de la Sphére; or, la surface de la Sphére est égale à celle du cylindre circonscrit, & celle-ci est égale à la circonférence du grand cercle multipliée par le diamétre CA; si l'on prend donc une ligne droite CT égale à la circonférence du grand cercle ou égale à la hauteur EB de l'onglet, le rectangle fait sous CT, & le diametre AC sera égal à la surface du cylindre ou de la Sphére ou de l'onglet.

Que si l'onglet est moindre ou plus grand que la Sphére, sa surface sera à celle de la Sphére ou au rectangle AT comme la hauteur EB est à la circonférence du grand cercle ou à la droite CT; prenant donc une ligne moindre ou plus grande que CT, & faisant avec cette ligne & avec le diametre AC un rectangle AX, ce rectangle sera égal à la surface de l'onglet, puisque le rectangle AX sera au rectangle AT, comme la hauteur BE est à la circonférence du grand cercle égale à AT.

585. COROLLAIRE III. La surface des onglets de la seconde espece se trouvera aisément, en observant ce que nous avons dit touchant leur solidité.

Par exemple, pour trouver la surface de l'onglet ADCB de la seconde espece (*Fig.* 344.) qui fait partie de l'onglet SXTB de la premiere espéce. Je vois qu'il faut retrancher de la surface de l'onglet SXTB. 1°. La surface de l'espéce de prisme triangulaire QSACZT. 2°. La surface de la portion cylindrique QXZCAD; or, en supposant que l'onglet soit égal à la Sphére que sa base décriroit, sa surface sera égale à la surface de cette Sphére, & la surface de l'espece de prisme QSACZT est égale à la surface des deux segmens sphériques QSz, ZTy; enfin, la surface de la portion cylindrique QXZCAD est égale à la circonférence QXZ multipliée par la hauteur XD. Or, tout cela est facile à connoître; donc il est facile aussi de connoître la surface de l'onglet DACB.

Que si l'onglet SXTB n'est pas égal à la Sphére, sa surface sera toujours à celle de la Sphére comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle, & la surface de l'espéce de prisme QSACTZ sera à la surface de deux segmens sphériques QSz, ZTy, aussi comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle ; ainsi la surface de l'onglet ADCB sera facile à connoître.

Il est aisé de connoître aussi la surface de l'onglet ADCB (*Fig.* 345.) dont la base est plus grande qu'un demi-cercle, en observant ce qui a été dit touchant sa solidité.

586. *Remarque.* C'est aussi en faisant attention à ce qui a été dit touchant la solidité des anneaux ouverts ou fermés, qu'on trouvera 1°. que la surface d'un anneau fermé (*Fig.* 348.) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une tangente immobile HP est égale à la surface d'un cylindre AMTC (*Fig.* 350.) qui auroit pour base le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur DS la circonférence de ce cercle. 2°. Que la surface de la partie extérieure de l'anneau fermé est égale à la surface du demi-cylindre DABMNS (*Fig.* 350.), plus la surface de l'onglet SMNR égale à la surface de la Sphére qui auroit pour grand cercle le cercle générateur. 3°. Que la surface de la partie intérieure du même anneau est égale à la surface du demi-cylindre DCBNTS, moins la surface de l'onglet NTSC égal à l'onglet SMNR. 4°. Enfin, que la surface du vuide BRCSD (*Fig.* 348.) est la même que celle de la partie intérieure de l'anneau, & que par conséquent la moitié de cette surface est égale à la surface du cône DCS qui a pour côté le quart de circonférence DC du cercle générateur.

On trouvera de même 1°. que la surface d'un anneau ouvert (*Fig.* 352.) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une ligne extérieure immobile HP est égale à la surface d'un cylindre ACEM (*Fig.* 354.) qui a pour base le cercle générateur, & pour hauteur la droite XQ égale à la circonférence que le centre X du cercle générateur décrit autour de HP. 2°. Que la surface de la partie extérieure du même anneau est égale à la surface du demi-cylindre DABNS, plus la surface d'un onglet SMNR égal à une Sphére qui auroit pour grand cercle le cercle générateur. 3°. Que la surface de la partie intérieure est égale à la surface du demi-cylindre DCBNES, moins la surface de l'onglet NESL égal à l'onglet SMNR. 4°. Enfin, que la surface

facè du vuide BCDSQR (*Fig.* 352.) eſt égale à la ſurface de la partie intérieure de l'anneau, & que par conſéquent la moitié de cette ſurface eſt égale à celle d'un cône tronqué CDSQ qui auroit pour arête le quart CD de la circonférence du cercle générateur.

587. PROBLEME. *Trouver la ſurface d'une pyramide* ABCDE (Fig. 351.) *dont les arêtes ſont des quarts de cercles convexes du côté de l'axe.*

Je circonſcris autour de la baſe une circonférence de cercle ABCD, & je conçois un cône qui ait ce cercle pour baſe, & pour côté l'arête AE; la ſurface de ce cône ne ſera autre choſe que la ſomme des circonférences que tous les points du quart de cercle AE, décriroient en tournant autour de l'axe EO, & la ſurface de la pyramide n'eſt auſſi autre choſe qu'une ſomme de circuits, tels que FFHL ſemblables au circuit de la baſe ABCD, & qui ſeroient inſcrits ſemblablement dans les circonférences correſpondantes, ainſi chaque circuit FGHL eſt à la circonférence correſpondante comme le circuit ABCD de la baſe de la pyramide eſt à la circonférence ABCD de la baſe du cône. Donc je dois dire: comme la circonférence ABCD de la baſe du cône, eſt au circuit ABCD de la baſe de la pyramide; ainſi la ſomme des circonférences qui compoſent la ſurface, c'eſt-à-dire la ſurface du cône eſt à la ſomme des circuits qui compoſent la ſurface de la pyramide ou à la ſurface de la pyramide. Or, la circonférence ABCD, & le circuit ABCD ſont connus, & la ſurface du cône eſt connue par la Remarque précédente; donc on connoîtra aiſément la ſurface de la pyramide.

588. *REMARQUE.* On connoîtra de la même façon la ſurface de la pyramide tronquée (*Fig.* 355.) dont les arêtes FA, QB, &c. ſont des quarts de cercle convexes vers l'axe.

Quant à la calotte (*Fig.* 356.), laquelle peut être regardée comme une pyramide dont les arêtes EA, EB ſont des quarts de cercles concaves vers l'axe, il eſt viſible qu'en faiſant tourner le quart de cercle EOA autour de EO, il décriroit une demi-Sphére, dans laquelle la calotte ſeroit inſcrite. Or, la ſurface de cette demi-Sphére ne ſeroit autre choſe que la ſomme des circonférences que tous les points de EA décriroient autour de EO, & la ſurface de la calotte ne ſeroit auſſi autre choſe qu'une ſomme de circuits, tels que LFGH ſemblables au circuit ABCD de la baſe, & ſemblablement inſcrits dans les circonférences correſ-

pondantes. Donc on dira comme la circonférence de la baſe de la demi-Sphére eſt au circuit ABCD de la baſe de la calotte; ainſi la ſurface de la demi-Sphére eſt à un quatriéme terme qui ſera la ſurface de la calotte.

De quelques uſages du Compas de Proportion néceſſaire pour l'intelligence de ce qui a été dit dans le cours de ce Livre.

589. Tout le monde ſçait que le Compas de proportion eſt compoſé de deux lames de cuivre ou d'argent qui tournent au tour d'une charniere qui eſt à leur extrêmité, & que du centre de cette charniere on a mené de part & d'autre des lignes ſur les deux lames qui ont différents noms. Je n'entreprens pas d'expliquer ici tous les uſages de ces différentes lignes; cela a été fait par Mr. Ozanam dans un petit Traité intitulé. *Uſage du Compas de proportion*, qui ſe vend à Paris chez Jombert Libraire. Ainſi je me contenterai de parler de la maniere de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, & de la façon d'inſcrire dans un cercle, un polygone qui n'excéde pas douze côtés.

La ligne *des parties égales* eſt ainſi nommée, parce qu'elle eſt diviſée en un certain nombre de petites parties toutes égales, & par conſéquent elle peut ſervir d'Echelle.

La ligne des ſolides a été formée de cette ſorte. On a fait 64 ſolides ſemblables, ou 64 cubes qui étoient entr'eux comme les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c. juſqu'à 64, & l'on a porté les côtés de ces cubes ſur la ligne des ſolides de part & d'autre, en commençant toujours depuis le centre de la charniere; de ſorte, par exemple, qu'en prenant la longueur depuis le centre de la charniere juſqu'au nombre 15, & la longueur depuis le charniere juſqu'au nombre marqué 20; ces deux longueurs expriment les côtés de deux ſolides ſemblables, ou de deux cubes qui ſeroient entr'eux comme 15 à 20.

La ligne des polygones a été formée ainſi. On a décrit un cercle dans lequel on a inſcrit les polygones réguliers depuis le triangle juſqu'au dodécagone, & l'on a porté les côtés de ces polygones ſur la ligne des polygones, à commencer toujours depuis le centre de la charniere; de façon que la longueur, priſe, par exemple depuis le centre juſqu'au nombre marqué 5, & la longueur priſe depuis le centre juſqu'au nombre marqué 7, expri-

ment les côtés du pentagone & de l'eptagone inſcrits dans le même cercle : cela poſé.

590. PROBLEME. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données* a, b (Fig. 376.).

Je prens avec le compas ordinaire la grandeut de la ligne *a*, & je la porte ſur l'une des lignes des parties égales, mettant l'une des pointes ſur le centre de la charniere, & laiſſant tomber l'autre ſur cette ligne, pour ſçavoir combien la ligne *a* contient de parties égales. Je fais la même choſe à l'égard de la ligne *b*; & trouvant, par exmple que la ligne *a* contient 30 parties égales & que la ligne *b* en contient 17; ces deux lignes ſont donc entr'elles comme 30 eſt à 17. Je prens encore la grandeur de la ligne *a* avec le compas ordinaire, & j'ouvre le Compas de proportion repréſenté ici par l'angle BAC, juſqu'à ce que l'une des pointes du Compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 30 de la ligne des ſolides, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 30; cela fait, & le Compas de proportion reſtant ainſi ouvert, je prens la diſtance des points 17, 17 de la ligne des ſolides, & cette diſtance eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles *m*, *n* cherchées. Or, celle-ci étant trouvée, il n'y a plus qu'à prendre une moyenne proportionnelle *n*, entre *m* & *b*, pour avoir la ſeconde.

On comprendra la raiſon de ceci, ſi l'on fait attention que les quatre lignes *a*, *m*, *n*, *b* étant en proportion continuë, on doit avoir a^3, m^3 :: *a*. *b* :: 30. 17; ainſi les lignes *a*, *m* doivent être entr'elles comme les côtés de deux cubes ou de deux ſolides ſemblables qui ſeroient entr'eux comme 30 & à 17. Or, les lignes *a*, *m* ſont égales par la conſtruction, aux diſtances 30, 30, & 17, 17, & à cauſe des triangles ſemblables 30 A 30, & 17 A 17, nous avons 30,30 . 17,17 :: 30,A . 17,A; donc *a*. *m* :: 30,A; 17,A, mais 30,A. & 17,A ſont les côtés de deux ſolides ſemblables ou de deux cubes qui ſont entr'eux comme 30 a 17; donc les cubes de *a*, *m* ſont auſſi comme 30 eſt à 17, & par conſéquent *m* eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles cherchées.

591. PROBLEME. *Un cercle* ABCD *étant donné* (Fig. 377.), *trouver le côté d'un polygone régulier qu'on veut lui inſcrire.*

Je prens avec le compas ordinaire la grandeur OH du rayon du cercle donné; j'ouvre le compas de proportion, juſqu'à ce que la pointe du compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 6 de la ligne des polygones, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 6; cela fait, & le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, ſi l'on de-

mande le côté du pentagone qu'il faut inſcrire dans le cercle donné, je prens avec le compas ordinaire la diſtance 5, 5 des points 5, 5 de la ligne des polygones, & cette diſtance eſt le côté demandé AB, car, par la conſtruction, le rayon OH & la ligne AB ſont entr'eux comme les diſtances 6, 6 & 5, 5; or, à cauſe des triangles ſemblables 6R6, 5R5, on a 6,6. 5,5 :: 6R. 5R. donc OH. AB :: 6R. 5R, c'eſt-à-dire le rayon OH du cercle donné eſt à la corde AB, comme le côté 6R de l'exagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à la diviſion de la ligne des polygones, eſt au côté 5R du pentagone inſcrit dans le même cercle; mais le côté 6R de l'exagone eſt égal au rayon du cercle dans lequel l'exagone eſt inſcrit; donc nous avons le rayon OH du cercle donné, eſt à ſa corde AB, comme le rayon du cercle qui a ſervi pour la conſtruction de la ligne des polygones eſt à la corde R5 de ce cercle; mais la corde R5 eſt le côté du pentagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à conſtruire la ligne des polygone; donc le côté AB doit être le côté du pentagone inſcrit dans le cercle donné.

592. *Remarque.* Tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre touchant les ſolides & leur ſurfaces fait aſſez entrevoir que nous aurions encore beaucoup de choſe à dire ſur cette matiere; mais comme les méthodes particulieres dont il faudroit ſe ſervir, ſeroient trop longues & embaraſſantes; je renvoye ce ſujet au Livre ſuivant où je donnerai des méthodes générales & faciles pour trouver la ſolidité & la ſurface d'une infinité de ſolides.

CHAPITRE XII.

Du Toiſé de la Maçonnerie, & du Toiſé des bois.

593. LA meſure dont on ſe ſert pour meſurer les longueurs, eſt une longueur nommée *Toiſe* ou *Toiſe courante*, que l'on diviſe en ſix parties égales nommées *Pieds*; chaque pied ſe diviſe en 12 parties égales nommées *Pouces*; chaque pouce contient 12 parties égales nommées *Lignes*, & chaque ligne ſe diviſe encore en 12 parties égales nommées *Points*, qui ſont des grandeurs extrêmement petites qu'on néglige ordinairement dans la pratique. Ainſi la toiſe courante, contenant 6 pieds, &

chaque pied 12 pouces; il eſt clair que chaque toiſe courante contient 6 fois 12 ou 72 pouces; de même chaque pouce contient 12 lignes; la toiſe courante doit contenir 72 fois 12 ou 864 lign.

594. La toiſe quarrée eſt un quarré ABCD (*Fig.* 378.) dont la baſe AB & la hauteur AD valent chacun une toiſe. Or, comme chaque côté contient 6 pieds; il eſt viſible qu'en multipliant l'un par l'autre, le produit 36 marque que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés ou 36 petits quarrés qui ont un pied de baſe & un pied de hauteur, comme la figure le fait voir; de même chaque pied quarré ayant 12 pouces de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou 144 pouces quarrés; & par conſéquent la toiſe quarrée doit contenir 36 fois 144 ou 5184 pouces quarrés; enfin chaque pouce quarré ayant 12 lignes de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou 144 lignes quarrées; d'où il ſuit que la toiſe quarrée contient 5184 fois 144 ou 746496 lignes quarrées.

La toiſe quarrée ſert pour meſurer les ſurfaces; car, ſi une ſurface a 3 toiſes de longueur & 2 toiſes de largeur, multipliant l'un par l'autre, on aura 6 toiſes quarrées; c'eſt-à-dire que cette ſurface contiendra ſix fois un quarré dont la baſe & la hauteur ſont chacune une toiſe courante.

595. La toiſe cube eſt un cube AB (*Fig.* 379.) dont les dimenſions AC, AD de la baſe & la hauteur AE, valent chacune une toiſe courante. Or, la baſe de ce cube étant une toiſe quarrée, contient 36 pieds quarrés, leſquels étant multipliés par la hauteur AE qui vaut 6 pied, donnent 216 pieds cubes pour la valeur de la toiſe cubique; ainſi la toiſe cubique contient 216 petits cubes tels qu'on les voit dans la figure, & dont les trois dimenſions ont chacune un pied de longueur; de même les deux dimenſions de la baſe de chaque pieds, étant chacune de 12 pouces, leur produit donne 144 pouces quarrés de baſe, leſquels étant multipliés par la hauteur, 1 pied ou 12 pouces donnent 1728 pouces cubiques pour la valeur du pied cube; d'où il ſuit que la toiſe cube contient 216 fois 1728 ou 373248 pouces cubiques. Enfin les dimenſions de la baſe d'un pouce cubique, étant chacune de 12 lignes de longueur, leur produit leur donne 144 lignes quarrées, leſquelles, multiplié par la hauteur 12 lignes, donnent 1728 lignes cubiques pour la valeur d'un pouce cubique; d'où il ſuit que la toiſe cubique contient 373248 fois 1728 ou 644972544 lignes.

La toise cube sert à mesurer les solides; car si les deux dimensions de la base d'un solide sont 4, 3, & la hauteur du solide 5; la base sera 4 fois 3 ou 12 toises quarrées lesquelles multipliées par les 5 toises de la hauteur donneront 60 toises cubes.

596. La division de la toise quarrée en pieds pouces & lignes quarrées, étant trop embarassante pour le calcul, de même que la division de la toise cube en pieds, pouces & lignes cubiques, on a trouvé le moyen de faire que les divisions de ces deux sortes de toises fussent les mêmes que celles de la toise courante qui facilitent davantage le Calcul. Et voici comme on a fait.

597. Soit la toise quarrée AC, (*Fig.* 380.) je divise le côté AB en six parties égales qui valent par conséquent chacune un pied, & des points de division, je mene des paralelles à l'autre côté BC; ce qui divise la toise en six rectangles égaux qu'on nomme *pieds de toise quarrée*, par ce qu'ils ont chacun un pied de hauteur & une toise de base. Je divise de même la hauteur de chaque pied de toise quarrée en 12 parties égales, à cause que chaque pied contient 12 pouces, & des points de division, menant des paralelles à la base, chaque pied de toise quarrée se trouve divisé en 12 rectangles qu'on nomme *pouces de toises quarrée*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toise de base; enfin, divisant la hauteur de chaque pouce de toise quarrée en 12 parties égales, & menant des points de division des paralelles à la base; chaque pouce de toise quarrée se trouve divisé en 12 petits rectangles qui ont une ligne de hauteur, & une toise de base, & qui à cause de cela, sont nommés *lignes de toise quarrée*. De façon que la toise quarrée contient 6 pieds de toises quarrée, ou 72 pouces de toise quarrée, ou enfin 864 lignes de toise quarrée; & cette maniere de diviser la toise quarrée convient très-bien non-seulement au Calcul, mais encore à la nature des choses: car il est visible que lorsqu'on multiplie, par exemple, une toise par un pied, le produit n'est ni un pied ni une toise, mais une toise de base & un pied de hauteur; & ainsi des autres.

598. Soit de même, la toise cubique BE, (*Fig.* 381.) je divise sa hauteur AB en 6 parties égales, & par les points de division, je fais passer des plans paralelles à la base; ce qui divise la toise cubique en 6 paralellepipedes égaux, nommés *pieds de toise cubique*, à cause qu'ils ont chacun un pied de hauteur, & une toise quarrée de base. Je divise de même la hauteur de chaque pied de toise cubique en douze parties égales, & par les points de

division, faisant passer des plans paralelles à la base, chaque pied de toise cubique se trouve divisée en 12 paralellepipedes nommés *pouces de toises cubiques*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toise quarrée de base. Enfin divisant la hauteur de chaque pouce de toise cubique en 12 parties égales, & par les points de division, faisant passer des plans paralelles à la base, chaque pouce de toise cubique se trouve divisé en 12 paralellepipedes égaux, nommés *Lignes de toise cubique*, à cause qu'ils ont une ligne de hauteur, & une toise quarrée de base, de façon que la toise cubique contient 6 pieds de toise cubique, ou 72 pouces de toise cubique ou 864 lignes de toise cubique.

On va voir dans les Exemples suivans, de qu'elle maniere le calcul se sert des divisions dont nous venons de parler.

599. Ier EXEMPLE. *Un Mur a 23 toises 3 pieds 6 pouces 6 lignes de longueur, & 2 toises, 3 pieds, 6 pouces, 9 lignes de hauteur, combien contient-il de toises quarrées?*

J'écris le nombre à multiplier, & le multiplicateur à la façon ordinaire, les toises sous les toises, les pieds sous les pieds, &c. & comme le nombre 2 des toises du multiplicateur, n'a qu'un caractére; je multiplie les toises, pieds, pouces

23 toiſ.	3 pieds	6 pouc.	6 lign.	
2	3	6	9	
47	1	1	0	
11	4	9	3	
1	5	9	6	$\frac{1}{2}=\frac{8}{16}$
	1	5	8	$\frac{5}{16}=\frac{5}{16}$
61 toiſ.	1 pied	1 pouce	5 lign.	$\frac{13}{16}$

& lignes du nombre à multiplier par 2, en disant: 2 fois 6 lignes font 12 lignes de toise quarrée, ou un pouce. J'écris zero sous les lignes, & je retiens 1; 2 fois 6 pouces font 12 & 1 de retenu font 13, ou 1 pied de toise quarrée & un pouce; j'écris un pouce, & je retiens 1; 2 fois 3 pieds font 6 & 1 de retenu, font 7 ou une toise quarrée, & 1 pied que j'écris en retenant une toise, & achevant le reste à l'ordinaire, j'ai 47 toises 1 pied 1 pouce 0 lignes pour le produit de 2 toises.

Pour multiplier par 3 pieds. Je dis: si j'avois à multiplier par une toise, le produit seroit 23 toises quarrées 3 pieds, 6 pouces 6 lignes de toise quarrée; donc 3 pieds qui ne sont que la moitié d'une toise ne doivent donner que la moitié de ce produit, & cette moitié est 11 toises, 4 pieds, 9 pouces, 3 lignes.

Six pouces sont le sixiéme de 3 pieds ou 36 pouces; or, trois

pieds ont produit 11 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 3 lignes; donc 6 pouces ne doivent donner que le ſixiéme de ce produit, & ce ſixiéme eſt 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes $\frac{1}{2}$.

Enſin, 9 lignes ſont le huitiéme de 6 pouces ou de 72 lignes; donc 9 lignes ne doivent produire que la huitiéme partie du produit que 6 pouces ont donné; ainſi prenant la huitiéme de 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes $\frac{1}{2}$; j'ai 1 pieds, 5 pouces, 8 lignes $\frac{3}{16}$.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver; & le produit total 61 toiſes 1 pied, 1 pouce, 5 lignes $\frac{11}{16}$ eſt la ſurface du mur propoſé.

600. II[e]. EXEMPLE. *Trouver le contenu d'une ſurface plane qui a 34 toiſes 2 pieds, 9 pouces, 8 lignes de largeur, & 23 toiſes 4 pieds 6 pouces, 8 lignes de hauteur.*

Je néglige les 2 pieds 9 pouces, 8 lignes de la largeur à cauſe qu'il ſeroit trop embarraſſant de les multiplier par les 23 toiſes de la hauteur. Multipliant donc 34 par 23, j'ai les deux produits 102 & 68 rangés comme on voit ici.

34 toiſ.	2 pieds	9 pouc.	8 lign.	
23	4	6	8	
102				
68				
11	2			
11	2			
2	5			
0	1	10	8	
7	5	6	2	$\frac{2}{3}$
1	5	10	6	$\frac{2}{3}$
0	5	11	3	$\frac{1}{3}$
0	0	11	10	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
0	0	3	11	$\frac{14}{27}$
818 toiſ.	5 pieds	6 pouc.	8 lign.	$\frac{20}{27}$

Quatre pieds ſont les deux tiers d'une toiſe. Or, ſi je multipliois 34 par une toiſe, le produit ſeroit 34; donc en multipliant par 4 pieds, le produit doit être les deux tiers de 34; mais le tiers de 34 eſt 11 toiſes 2 pieds, c'eſt pourquoi j'écris deux fois ce produit 11 toiſes 2 pieds.

Six pouces ſont le quart de 2 pieds ou de 24 pouces, prenant donc le quart de ce que deux pieds m'ont rendu, c'eſt-à-dire de 11 toiſes 2 pieds j'ai 2 toiſes 5 pieds.

Huit lignes ſont la neuviéme partie de 6 pouces ou de 72 lignes; ainſi prenant le neuviéme de ce que m'ont produit 6 pouces, c'eſt-à-dire de 2 toiſes 5 pieds; j'ai 0 toiſes 1 pied 10 pouces 8 lignes.

Je

Je reviens maintenant aux 2 pieds 9 pouces, 8 lignes que j'avois d'abord négligé; & je dis, si j'avois à multiplier 1 toise par 23 toises 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, le produit seroit 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes; mais je n'ai à multiplier que par 2 pieds, qui est le tiers d'une toise; donc je ne dois avoir que le tiers de ce produit, & ce tiers est 7 toises 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$.

Neuf pouces ne sont pas exactement contenus dans deux pieds; c'est pourquoi, je partage 9 en 2 parties 6 & 3, dont l'une 6 est le quart de deux pieds ou 24 pouces, & l'autre 3 est la moitié de 6. Or, puisque 6 pouces est le quart de 2 pieds; prenant le quart de ce que 2 pieds ont produit, c'est-à-dire de 7 toises 5 pieds, 6 pouces, 2 lignes $\frac{2}{3}$, j'ai 1 toise 5 pieds, 10 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$.

Pour 3 pouces, je prens la moitié de ce dernier produit, ce qui donne 5 pieds 11 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$.

Huit lignes n'étant pas exactement contenues dans 3 pouces ou 36 lignes, je partage 8 en deux parties 6 & 2, dont la premiere 6 est le sixiéme de 3 pouces, & l'autre 2 est le tiers de 6. Ainsi prenant le sixiéme de ce que 3 pouces ont produit, j'ai 11 pouces 10 lignes $\frac{5}{9}$, & prenant le tiers de ce dernier produit, j'ai 3 pieds 11 lignes $\frac{14}{27}$.

Enfin, ajoutant tous les produits ensemble, le produit total 818 toises 5 pieds 6 pouces, 6 lignes $\frac{20}{27}$ est le contenu de la surface proposée.

601. Pour faciliter le calcul, il est quelquefois nécessaire de faire des fausses suppositions, ainsi qu'on va voir dans l'Exemple suivant.

602. IIIe Exemple. *Trouver la valeur d'une surface qui a 32 toises de largeur, & 25 toises, 9 pouces de hauteur.*

Je multiplie d'abord 32 par 25, ce qui donne les deux produits 160 & 64, disposés comme on les voit ici.

32 toises		
25 toises	0 pieds	9 pouces
160 toises		
64		
5	2 pieds	
2	4	
1	2	
804 toises	0 pieds	

Maintenant comme il seroit trop embarrassant de chercher ce que 9 pouces est à l'égard d'une toise; je suppose que j'aye à multiplier 32 toises par un pied qui est le sixiéme d'une toise; or, si j'avois à multi-

plier par une toise, le produit seroit 32 toises ; donc en multipliant par un pied, je dois avoir le sixiéme de 32, c'est-à-dire, 5 toises 2 pieds que j'écris, mais que j'effacerai ensuite, parce qu'il n'y a point de pieds dans le nombre à multiplier.

9 pouces n'étant pas exactement contenus dans un pied ou 12 pouces, je divise 9 en 2 parties 6 & 3, dont la premiere 6 est la moitié d'un pied, & l'autre 3 est la moitié de 6, après quoi je prens pour 6 pouces la moitié de 5 toises 2 pieds, ce qui donne 2 toises 4 pieds, & pour 3 pouces je prens la moitié de 2 toises 4 pieds, ce qui donne 1 toise 2 pieds.

J'efface le produit 5 toises 2 pieds qui vient d'une fausse supposition, & ajoutant ensemble les autres produits, j'ai 804 toises pour la valeur de la surface proposée.

603. *Remarque*. Il est bon d'observer que si l'on demandoit d'extraire la racine quarrée d'un produit ou d'une surface plane composée de toises quarrées, de pieds, pouces & lignes de toise quarrée, il ne suffiroit pas de réduire tout en lignes de toise quarrée, mais qu'il faudroit outre cela réduire ces lignes en lignes quarrées, c'est-à-dire, multiplier les lignes de toise quarrée par le nombre de lignes quarrées qu'elles contiennent.

Soit le produit 6 toises 4 pieds, 0 pouces, 6 lignes de toise quarrée dont on demande d'extraire la racine quarrée. Je réduis tout en lignes, ce qui donne 5766 lignes de toise quarrée. Or comme chacune de ces lignes est le produit d'une toise de longueur par une ligne de hauteur, & qu'une toise contient 864 lignes, il s'ensuit que chaque ligne de toise quarrée contient 864 lignes quarrées, multipliant donc 5766 par 864 le produit est 4981824 lignes quarrées, dont la racine est 2232 lignes qui font 2 toises 3 pieds 6 pouces ; & en effet si l'on multiplie 2 toises 3 pieds 6 pouces par 2 toises 3 pieds pouces, le produit sera 6 toises 4 pieds, 0 pouces 6 lignes comme il étoit proposé.

La raison de ceci est, que les lignes de toise quarrée étant composées de deux quantités de différente espece, c'est-à-dire, d'une toise de longueur & d'une ligne de hauteur, l'extraction de leur racine ne peut donner ni des lignes ni des toises, & que par conséquent si l'on veut faire cette extraction, il faut nécessairement réduire les lignes de toise quarrées en lignes quarrées, dont la hauteur & la longueur sont de même espece.

Et il faut faire la même remarque à l'égard des pieds de toise quarrée.

604. IVe EXEMPLE. *Trouver le contenu d'un solide qui a 12 toises 3 pieds 4 pouces de longueur, 6 toises 2 pieds 6 pouces de largeur, & 13 toises 4 pieds de hauteur.*

Je multiplie la longueur par la largeur, ce qui donne 80 toises quarrées 3 pieds 9 pouces 11 lignes de toise quarrée & $\frac{1}{3}$ de ligne. Je multiplie ce produit par la hauteur 13 toises 4 pieds, ce qui donne 1102 toises cubiques 0 pieds 3 pouces 11 lignes de toise cubique, & $\frac{8}{9}$ de ligne pour la solidité demandée.

12 toiſ.	3 pieds	4 pouc.		
6	2	6	6 lig.	
75	2	0		
4	1	1	4	
1	0	3	4	
0	0	6	3	$\frac{1}{3}$
80 toiſ.	3 pieds	9 pouc.	11 lig. $\frac{1}{3}$	
13	4			
240				
80				
26	4			
26	4			
6	5			
1	4	3		
0	1	1	8	
0	0	6	10	
0	0	3	5	
0	0	2	3	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
0	0	0	4	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
1102 toiſ.	0 pieds	0 pouc.	11 lig.	$\frac{8}{9}$

605. Il faut encore remarquer ici, que si l'on demandoit d'extraire la racine cubique d'un produit composé de toises cubiques, de pieds pouces & lignes de toise cubique, il faudroit non seulement tout réduire en lignes de toise cubique, mais encore multiplier ces lignes par le nombre de lignes cubiques qu'elles contiennent, ou par 746496; car la ligne cubique ayant une toise quarrée de base, laquelle vaut 746496 lignes quarrées (*N.* 594.) & une ligne de hauteur vaut par conséquent 746496 lignes cubiques. Après quoi, on feroit l'extraction de la racine cubique à l'ordinaire.

Que si outre les lignes de toise cubique, il se trouvoit une fraction de ligne par exemple $\frac{1}{6}$ on prendroit le sixiéme de 746496 lignes quarrées qui est la valeur d'une ligne de toise cubique, & on l'ajouteroit aux lignes cubiques qu'on auroit trouvé en faisant la réduction; & si en faisant cette addition il se trouvoit une fraction de ligne cubique, on réduiroit tout en cette fraction &c.

Du toisé des Bois de Charpente, de Menuiserie, de Charronnage &c.

606. Le bois qui a encore toute son écorce se nomme *bois en grume*, celui donr on a ôté l'écorce avec la hache, & qu'on a équarré en forme de paralellepipede assez défectueux, se nomme *bois de brin*, enfin celui qu'on équarre avec la scie, se nomme *bois de sciage*.

Tour bois équarré avec la hache ou avec la scie étant fait en forme de parallepipede, a pour base une figure de quatre côtés dont les deux dimensions qui sont la largeur & la hauteur du bois, se nommenr *dimensions de l'équarrissage*, & quand ces deux dimensions sont inégales, le bois se nomme mi-plat ou à deux faces.

Le *bois en grume*, c'est-à-dire, le tronc d'un arbre, ou ses branches, étant toujours fait comme une espece de colonne qui va en diminuant, a par conséquent deux bases circulaires, l'une inférieure & l'autre supérieure, laquelle est moindre que l'inférieure. C'est pourquoi on prend ordinairement son diamétre vers le milieu de la longueur, pour faire une juste compensation. Mais comme l'écorce est inutile pour les ouvrages qu'on veut faire avec ces sortes de bois, on retranche trois pouces du diamétre & l'on quarre le reste, ce qui donne à la vérité un équarrissage plus grand qu'il ne faut, puisque le quarré du diamétre est plus grand que son cercle, mais ce défaut se trouve compensé d'un autre côté par les trois pouces que l'on ôte pour l'écorce, n'y ayant guéres d'arbre qui en ait un pouce & demi. Après-tout, dans ces sortes de marchés, il vaut mieux suivre l'usage établi parmi les Marchands, que de vouloir les assujettir à une exactitude géometrique à laquelle ils n'entendroient rien, & qui par-là les mettroit sans cesse dans la crainte qu'on ne voulût les tromper.

607. La mesure dont on se sert pour les bois se nomme *solive*. C'est un solide AB (Fig. 382.) dont la longueur AC est d'une toise ou 6 pieds, la largeur AD de 12 pouces ou 1 pied, & la hauteur AH de 6 pouces, ainsi ce solide est de 3 pieds cubiques, car multipliant la longueur 6 pieds par la largeur 1 pied, le produit est six pieds quarrés, lesquels multipliés par la hauteur 6 pouces ou un demi pied, donne trois pieds cubiques.

Si l'on coupe la hauteur AH en six parties égales, & que par les points de division on coupe la solive paralellement à sa base

ou dans toute sa longueur, la solive se trouvera partagée en 6 parties égales qu'on nomme *pieds de solive* ; de même divisant la hauteur d'un pied de solive en 12 parties égales, & coupant le pied dans toute sa longueur selon ces divisions, le pied de solive sera divisé en 12 parties égales qu'on nomme *pouces de solive*, enfin divisant la hauteur d'un pouce de solive en 12 parties égales, & coupant le pouce dans toute sa longueur selon ces divisions, on aura 12 *lignes de solive*. Les dimensions de l'équarrissage dans la solive, sont la largeur AD, & la hauteur AH.

608. La toise cube, comme nous avons dit ci-dessus, (*N.* 595.) contient 216 pieds cubes, & la solive en contient 3; divisant donc 216 par 3, le quotient 72 fait voir que la toise cube contient 72 solives, ou qu'elle est 72 fois plus grande que la solive. Or, comme la toise cubique contient 6 pieds de toise cubique, le pied 12 pouces de toise cubique, & le pouce 12 lignes de toise cubique, de même que la solive contient 6 pieds de solive, le pied 12 pouces de solive, & le pouce 12 lignes, il s'ensuit que les pieds, pouces & lignes de toise cubique sont aussi 72 fois plus grands que les pieds, pouces & lignes de solive.

609. Après ce qui vient d'être dit, il est aisé de voir que si l'on toise une piéce de bois à la façon ordinaire, pour avoir sa solidité en toises, pieds, pouces, & lignes de toise cubique, & qu'on multiplie ensuite cette solidité par 72, le produit fera voir combien cette piece de bois contient de solive : en voici un exemple.

610. Exemple. *Trouver le nombre de solives qu'on peut tirer d'un tronc d'arbre dont la longueur est de 4 toises 3 pieds, & le diamétre pris dans le milieu de la longueur est de 3 pieds 9 pouces, 6 lignes.*

Je retranche du diamétre 3 pouces, pour la raison que j'en ai apportée ci-dessus & j'ai : o toises, 3 pieds, 6 pouces 6 lignes dont je fais le quarré en disant : s'il falloit multiplier par une toise, le produit seroit o toises 3 pieds 6 pouces 6 lignes, donc en multipliant par 3 pieds qui est la moitié d'une toise, je dois avoir la moitié de ce produit, & cette moitié est 1 pied, 9 pouces 3 lignes.

Six pouces sont le sixiéme de trois pieds, c'est pourquoi je prens le sixiéme de ce que 3 pieds ont produit, & ce sixiéme est 3 pouces 6 lignes & $\frac{1}{2}$.

Pour 6 lignes qui sont le douziéme de 6 pouces, je prens le douziéme de ce que 6 pouces ont produit, ce qui donne 3 lignes

o toiſes	3 pieds	6 pouc.	6 lig.	
o	3	6	6	
o	1	9	3	
	o	3	6	$\frac{1}{2}$
		o	3	$\frac{11}{24}$
o	2	1	1	$\frac{1}{24}$
4	3			
1	2	4	4	$\frac{1}{6}$
	1	o	6	$\frac{25}{48}$
1	3	4	10	$\frac{33}{48}$
72				
72 ſoliv.				
36				
4				
o ſoliv.	4 pieds			
	1			
		6 pouc.		
		4	1	$\frac{1}{2}$
112 ſoliv.	5 pieds	4 pouc.	1 lig.	$\frac{1}{2}$

& $\frac{11}{24}$. J'ajoute tous ces produits enſemble & le produit total o toi. 2 pieds de toiſe quarrée 1 pouce 1 ligne, & $\frac{1}{24}$ eſt le quarré du diamétre.

Je multiplie ce quarré par la longueur 4 toiſes 3 pieds à la façon ordinaire, & le produit 1 toiſe cubique 3 pieds 4 pouces 10 lignes de toiſe cubique, & $\frac{33}{48}$ eſt la ſolidité du tronc.

Pour ſçavoir combien ce produit contient de ſolive, je le multiplie par 72, à cauſe que la toiſe cubique contient 72 ſolives, en diſant une fois 72 fait 72 ſolives ; pour trois pieds je prens 36 qui eſt la moitié de 72 ; pour 4 pouces qui ſont le neuviéme de 3 pieds, je prens le neuviéme de 36 qui eſt 4 ; je partage 10 lignes en deux parties 8 & 2, dont la premiere 8 eſt le ſixiéme de 4 pouces, & la ſeconde 2 eſt le quart de 8 ; ainſi je prens le ſixiéme de 4 ſolives, ce qui donne 4 pieds de ſolive, & prenant enſuite le quart de 4 pieds, j'ai un pied de ſolive. Pour $\frac{33}{48}$ je dis, deux lignes m'ont rendu un pied de ſolive, donc une ligne doit rendre un demi pied ou 6 pouces, & ceci n'eſt qu'une fauſſe ſuppoſition que j'effacerai, parce quelle ne doit pas entrer en ligne de compte ; or, 6 pouces font 72 lignes dont la quarante & huitiéme partie eſt 1 ligne $\frac{1}{2}$; multipliant donc 1 ligne & $\frac{1}{2}$ par 33, le produit 49 lignes $\frac{1}{2}$ ou 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ eſt ce que doit produire la fraction $\frac{33}{48}$. J'ajoute tous ces produits enſemble, & j'ai 112 ſolives 5 pieds 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ contenues dans le tronc propoſé.

611. Si la piece de bois à meſurer étoit équarrée avec la hache ou la ſcie, & que ſes trois dimenſions fuſſent inégales, on multiplieroit ſes trois dimenſions les unes par les autres pour avoir ſa ſolidité, & l'on multiplieroit ſa ſolidité par 72, ce qui donne-

roit le nombre de ſolives contenues dans la piece.

612. Il eſt indifférent de multiplier d'abord les trois dimenſions les unes par les autres, & enſuite la ſolidité par 72, ou de multiplier l'une des dimenſions de l'équarriſſage par 72, & enſuite par les autres dimenſions; car le produit total ſera toujours le même, puiſque les multiplicateurs ſeront toujours les mêmes; or, de-là on a tiré une autre méthode qui abrege beaucoup le calcul, ainſi qu'on va voir.

613. Suppoſons le même tronc d'arbre de l'Exemple précédent, ſon diamétre eſt 0 toiſes 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes. Or, avant de le multiplier par lui-même, je réduis les pieds en pouces, & les ajoutant aux 6 pouces, j'ai 42 pouces 6 lignes. Je mets les 42 pouces au rang des toiſes, & par-là je fais la même choſe que ſi je multipliois 42 pouces par 72, à cauſe que la toiſe eſt 72 fois plus grande que le pouce. Quant aux 6 lignes je vois que ſi je les mets au rang des pieds elles deviendroient 144 fois plus grandes, à cauſe que le pied contient 144 lignes, & par conſéquent ces lignes, au lieu d'être multipliées par 72, ſe trouveroient multipliées par 144 ou 2 fois 72, ce qui eſt la moitié trop; c'eſt pourquoi au lieu de 6, je ne mets au rang des pieds que la moitié de 6, c'eſt-à-dire 3. J'ai donc 42 toiſes 3 pieds, qui ſont la même choſe que 42 pouces 6 lignes, multipliées par 72.

Je multiplie 42 toiſes 3 pieds par 0 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes, & le produit 25 toiſes 0 pieds 6 pouces 3 lignes eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être le quarré du diamétre, & par conſéquent ce produit eſt le quarré du diamétre multiplié par 72.

Je multiplie ce produit par la longueur 4 toiſes 3 pieds, & le produit 112 toiſes, 5 pieds, 4 pouces, 1 ligne ½, eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être la ſolidité du tronc; donc ce produit eſt le nombre de ſolives contenus dans ce tronc.

42 toiſes	3 pieds			
0	3	6 pouc.	6 lig.	
21	1	6		
3	6	3		
0	1	19	3	
25	0	6	3	
4	3			
100	2	1	0	
12	3	3	3	$\frac{1}{2}$
112 ſoliv.	5 pieds	4 pouc.	1 lig.	$\frac{1}{2}$

Des Fractions Décimales.

614. Si au lieu de diviser la toise en pieds, pouces & lignes; on la divise d'abord en dix parties, chacune desquelles sera $\frac{1}{10}$; puis chaque dixiéme en dix parties qui seront des dixiémes de dixiémes ou des centiémes; puis chaque centiéme en dix parties qui seront des dixiémes de centiémes ou des milliémes, & ainsi de suite, les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, &c. seront ce qu'on appelle *Fraction décimales.*

615. Les dixiémes se nomment *Primes*, les centiémes se nomment *Secondes*, les milliémes *Tierces*, les dix milliémes *Quartes*, &c.

616. Pour n'avoir pas l'embarras des dénominateurs & des numerateurs, on écrit $1'$, $2'$, $3'$, &c. au lieu de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, &c. de même au lieu de $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, &c. on écrit $1''$, $2''$, $3''$, &c. au lieu de $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, &c. on écrit $1'''$, $2'''$, $3'''$, &c. & ainsi de suite, de façon que pour dire un dix milliéme ou une quarte, on écrit 1^{IV}; pour dire une quinte on marque 1^{V}, &c. & enfin, pour marquer un entier, ou deux, ou 3, on écrit 1°, 2°, 3°, &c.

617. Au moyen de ceci, il est aisé d'éviter les difficultés & l'ennui que l'on éprouve souvent dans le calcul ordinaire des fractions, ainsi qu'on va voir.

618. Pour reduire $3^{\circ}, 5'$ à la derniere espéce, c'est-à-dire en prismes; il n'y a qu'à écrire $35'$; car $3^{\circ}\ 5'$ sont la même chose que $3\frac{5}{10}$; mais pour reduire $3\frac{5}{10}$ en dixiémes, il faut multiplier l'entier 3 par 10, ce qui fait 30, & y ajouter 5, ce qui fait 35, puis écrire $\frac{35}{10}$, & $\frac{35}{10}$ sont la même chose que $35'$. Donc, &c.

Par la même raison, si l'on veut reduire $2^{\circ}.\ 3'.\ 4''$ en sa derniere espéce, c'est-à-dire en secondes, on écrit $234''$; car pour reduire les prismes ou dixiémes $3'$ en centiémes, il faut les multiplier par 10, ce qui se fait en écrivant $34''$, à cause que le nombre 3 devient par-là dix fois plus grand que s'il étoit seul; & pour reduire l'entier 2°. en secondes ou centiémes; il faut le multiplier par 100, ce qui se fait encore en écrivant $234''$, à cause que le nombre 2 devient par-là 100 fois plus grand qu'il ne faut. Donc, &c.

619. Pour reduire $35'$ en entier, on écrit $3^{\circ}.\ 5'$, car 35 sont la même chose que $\frac{35}{10}$. Or, pour reduire $\frac{35}{10}$ en entier, il faut diviser

ser 35 par 10, & le quotient 3 marque trois entiers avec un reste $\frac{5}{10}$. Donc, &c. De même pour réduire 234″ en entier, on écrit 2°. 3′. 4″; car par-là le nombre 3 devient dix fois plus petit, puisqu'il est seul, & le nombre 2 devient 100 fois plus petit. Ainsi c'est la même chose que si on avoit divisé 234 par 100, ce qui donne 2 entiers, & qu'on eût divisé les 34 restans par 10, ce qui auroit donné 3 dixiémes, & 4 centiémes.

620. Pour ajouter 2°. 3′. 4″ avec 3°. 2′. 3″; on réduit l'un & l'autre nombre à sa derniere espéce, ce qui donne 234″ & 323″; puis ajoutant l'un à l'autre on a la somme 557″ ou 5°. 5′. 7″; & pour ajouter 2°. 3′. 4″. 5‴, avec 3°. 2′. 3″, on réduit l'un & l'autre à sa derniere espéce, ce qui donne 2345‴ & 323″; mais comme ces deux nombres ne sont pas de la même espéce, on ajoute un zero au dernier, ce qui fait 3230‴ qui est encore le même que 325″, à cause que 325″ est la même chose que $\frac{325}{100}$ & 3230‴ est la même que $\frac{3250}{1000}$, & que les deux fractions $\frac{325}{100}$ & $\frac{3250}{1000}$, ne sont pas différentes; c'est pourquoi ajoutant ensemble 2345‴ & 3250‴, la somme sera 5595‴ ou 5°. 5′. 9″. 5‴.

621. Pour soustraire 2°. 3′. 4″ de 4°. 5′. 3″, on réduit tout aux dernieres espéces, ce qui donne 234″ & 453″; puis en faisant la soustraction, le reste est 219″ ou 2°. 1′. 9″, & pour soustraire 2345‴ de 654″, on ajoute un zero à ce dernier, ce qui donne 6540‴, puis faisant la soustraction le reste est 4195‴, ou 4°. 1′. 9″. 5‴.

622. Pour multiplier 235″ par 32′, on multiplie à l'ordinaire, ce qui donne 7520, & ajoutant le caractére du prime avec celui des secondes, on écrit 7520‴; car 235″ sont la même chose que $\frac{235}{100}$, & 32′ sont la même chose que $\frac{32}{10}$; or, pour multiplier des centiémes par des dixiémes ou 100 par 10, il n'y a qu'à ajouter un zero, ce qui donne des $\frac{1}{1000}$, & pour exprimer des milliémes; par exemple 3, on écrit 3‴; donc, &c. De même pour multiplier 235″ par 2351‴, on multiplie à l'ordinaire, ce qui donne 552481, & ajoutant ensemble le caractére des secondes avec celui des tierces, on écrit 552481ᵛ, & ainsi des autres; car des secondes ou des $\frac{1}{100}$, multipliés par des tierces ou des $\frac{1}{1000}$, donnent $\frac{1}{100000}$ ou des quintes.

623. Pour diviser 2784‴ par 232″ on fait la division à l'ordinaire, & le quotient est 12, puis retranchant du caractére des tierces le caractére des secondes, on écrit 12′ ou 1°. 2′; car des

tierces ou des $\frac{1}{1000}$ divisés par des secondes ou des $\frac{1}{100}$, donnent des dixiémes ou des primes, &c.

624. Ce calcul seroit aussi beau qu'il paroît brillant, s'il pouvoit se faire qu'on réduisît toutes les mesures en dixiémes, puis en dixiémes de dixiémes, &c. mais tant que les divisions ou soudivisions ordinaires subsisteront, on n'y gagnera rien par la raison qu'on sera toujours obligé d'évaluer les primes, secondes, ou tierces qu'on trouvera.

625. Par exemple, supposons qu'une surface ait $2^{o}. 3'. 3''$ de largeur, & $3^{o}. 2'. 3''$ de hauteur. Si je veux trouver la valeur de cette surface, il faut que je multiplie $232''$ par $323''$, ce qui donne 74936^{iv}, ou $7^{o}. 4936^{iv}$, ou 7 toises quarrées $\frac{4936}{10000}$. Maintenant si je veux sçavoir combien cette fraction vaut de pieds de toise quarrée; il faut que je dise par Régle de trois; la toise étant divisée en 10000 parties, j'en ai 4936, la même toise étant divisée en 6 pieds, combien aurai-je? Et la Régle faite, je trouve 2 pieds & une fraction $\frac{9616}{10000}$; & pour évaluer cette seconde fraction, il faut que je multiplie le numerateur 9616 par 12, & que je divise le produit par 10000; ce qui donne 11 pouces, & une fraction $\frac{5392}{10000}$, qu'il faut que j'évalue encore, & ainsi de suite; or, il est visible que ces évaluations sont plus pénibles que celles que j'aurois faites, si je m'étois servi du calcul des divisions & soudivisions ordinaires, à cause que les numérateurs & dénominateurs sont beaucoup plus grands; donc il est clair aussi qu'on ne gagne rien par le calcul des décimales, & que si l'on paroît éviter d'abord quelques difficultés, on se jette nécessairement dans des plus grandes sur la fin du calcul.

CHAPITRE XII.

DES SECTIONS CONIQUES.

Definitions & Principes.

626. UN espace ABC (*Fig.* 383.) terminé par une courbe ABC toujours concave du même côté, étant donné avec plusieurs lignes droites MN, OP, QR, &c. paralelles entr'elles, & qui se terminent de part & d'autre à la courbe; s'ils se

trouve une ligne droite XZ qui coupe les paralelles chacune en deux également, cette droite XZ se nomme *Diamétre* de la courbe quand elle n'est pas perpendiculaire sur les paralelles, & *Axe* quand elle est perpendiculaire. Le point B ou la ligne XZ coupe la courbe, se nomme *Sommet* du diamétre ou de l'axe; les paralelles MN, OP, &c. se nomment *Doubles ordonnées*, leurs moitiés HN, VP, sont les *Ordonnées*, & les parties BH, BV, &c. du diamétre ou de l'axe comprises entre le sommet B, & chaque ordonnée sont les *Abscisses*. Ainsi l'abscisse de l'ordonnée HN est la droite BH, celle de l'ordonnée VP est la droite BV, &c.

Si d'un point quelconque M pris sur la courbe on mene une ordonnée MH, & une tangente MX qui coupe le diamétre ou l'axe prolongé en X, la partie XH de cet axe ou diamétre comprise entre la tangente MX, & l'ordonnée MH, se nomme la *Soutangente*, & si au même point M on élevé sur la tangente MX une perpendiculaire MY qui coupe l'axe en Y, la partie HY de cet axe comprise entre l'ordonnée MH, & la perpendiculaire MY, se nomme la *Souperpendiculaire*. C'est par la connoissance de ces lignes & de leurs rapports entr'elles qu'on connoît les proprietés des courbes.

627. Si l'on fait tourner un triangle rectangle ABC (*Fig.* 384.) autour du côté fixe AB, on concevra aisément qu'il décrira un cône droit ACH, & que ses élemens DE, FG, &c. paralelles à la base CB, décriront des cercles qui auront tous leurs centres sur la droite AB qui sera par conséquent l'axe du cône. Or, delà il suit 1°. que si d'un point quelconque Q de la circonférence de la base du cône, on mene une droite QA au sommet A, cette droite sera toute entiere sur la surface du cône, puisqu'elle ne sera autre chose que la droite CA du triangle générateur ABC, lorsqu'en tournant il sera parvenu à la position ABQ. 2°. Qu'en quelque point D qu'on coupe le cône par un plan paralelle à sa base, ce plan sera un cercle, puisqu'il ne différera pas du cercle décrit par l'élement DE. 3°. Enfin, que si l'on coupe un cône par un plan perpendiculaire sur la base, & qui passe par le centre B, la section sera un triangle; car l'axe BA étant perpendiculaire sur la base sera dans le plan coupant, lequel par conséquent passera par le sommet A, & la commune section du plan coupant, & de la base, sera un diamétre CH de la base; ainsi par les points C & H, menant au sommet les droites CA, CH qui seront sur la surface du cône, comme il vient d'être dit, ces droites seront avec

le diamétre CH un triangle qui sera le même que le plan coupant.

628. Si l'on conçoit dans un cône BAC (*Fig.* 385) la section triangulaire BAC, dans laquelle soit une ligne DE paralelle à l'un des côtés AB, & que l'on vienne à couper le cône par un plan perpendiculaire au triangle & qui passe par la ligne DE, la section sera une surface plane QDO terminée par une courbe QDO, qu'on nomme *parabole*.

629. *La droite* DE *est l'axe de la parabole.* Car si l'on coupe le cône & la parabole par une infinité de plans MN, &c. paralelles à la base BC du cône, tous ces plans ou cercles seront perpendiculaires sur le triangle BAC, à cause que ce triangle est perpendiculaire sur la base BC; & comme la parabole est aussi perpendiculaire sur le même triangle, il s'ensuit que les droites RT, &c. OQ qui sont les communes sections des cercles MN, &c. BC, & de la parabole, seront perpendiculaires sur le triangle (*N.* 478), & par conséquent sur les droites MN, BC, DE qui sont dans le plan de ce triangle, & qui se coupent aux points S, E par où les perpendiculaires RT, OQ passent (*N.* 463); or, MN, &c. BC, sont les diamétres des cercles, & RT, &c. OQ sont leurs cordes: donc, puisque ces cordes sont perpendiculaires sur leurs diamétres, elles sont coupées en deux également en S, &c. E; & par conséquent la droite DE qui passe par tous ces points coupe les droites RT, OQ en deux également, & à cause qu'elle leur est perpendiculaire, elle est leur axe (*N.* 626).

630. *La principale propriété de la parabole est, que les quarrés des ordonnées* ST, EQ *sont entr'eux comme leurs abscisses* DS, DE.

Dans les cercles MN, BC, nous avons $\overline{ST}^2 = MS \times SN$ & $\overline{EQ}^2 = BE \times EC$, donc $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$. Mais à cause des paralelles AB, DE les paralelles MS, BE sont égales; donc les rectangles MS × SN & BE × EC ayant une dimension égale, sont entr'eux comme les dimensions inégales SN, EC ainsi nous avons $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: SN . EC$. Mais les triangles semblables DSN, DEC donnent SN. EC :: DS. DE. donc $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: DS . DE$

631. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC (*Fig.* 386.) la section triangulaire BAC avec une droite DE qui coupe les côtés non paralellement à la base BC, & qu'on coupe le cône par un

plan perpendiculaire sur le triangle, & qui passe par la droite DE, la section sera une surface plane terminée par une courbe DTPEQR, qu'on nomme *Ellipse*.

Si l'on coupe le cône & l'ellipse par des plans FG, HI &c. paralelles à la base BC, on démontrera comme dans la parabole que les communes sections TR, PQ, &c. de ces plans ou cercles & de l'ellipse, sont perpendiculaires sur la droite DSE qui les coupe en deux également, & qui par conséquent est leur axe. (*N. 626*).

632. *La principale proprieté de l'ellipse est que les quarrés des ordonnées* TS, PO *sont entr'eux comme les rectangles* DS × SE, DO × OE *des parties de l'axe qu'elles coupent.*

A cause des cercles FG, HI nous avons $\overline{TS}^2 = FS \times SG$, & $\overline{PO}^2 = HO \times OI$; donc $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times SG . HO \times OI$; or, les triangles semblables FSD, HOD donnent $FS . HO :: DS . DO$, & à cause des triangles semblables GSE, IOE nous avons $GS . IO :: SE . OE$; multipliant donc les termes de ces deux proportions les unes par les autres, nous aurons $FS \times GS . HO \times IO :: DS \times SE . DO \times OE$, mais nous venons de trouver $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times GS :: HO \times IO$, donc $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: DS \times SE . DO \times OE$.

633. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC (*Fig.* 387.) la section triangulaire BAC avec une droite DE perpendiculaire à la base BC, & qui soit différente de l'axe, & qu'on coupe le cône par un plan perpendiculaire au triangle & qui passe par la droite DE, la section sera une surface plane terminée par une courbe DQO, qu'on nomme *Hyperbole*.

Si l'on coupe l'hyperbole & le cône par des plans MN, &c. paralelles à la base BC, on démontrera comme dans la parabole que les droites RT, OQ sont perpendiculaires sur DE qui les coupe en deux également, & qui par conséquent est leur axe. (*N. 626*).

Si l'on conçoit un cône XAZ opposé au sommet BAC, & qu'ayant prolongé le côté BA du triangle BAC en Z, on prolonge la droite DE jusqu'à la rencontre de AZ en Z, la partie DZ de cette droite comprise entre les deux cônes, se nomme *premier Axe de l'hyperbole*; nous parlerons du second axe dans la suite.

634. *La principale proprieté de l'hyperbole est que les quarrés des ordonnées* ST, EQ *&c. sont entr'eux comme les rectangles* SD × SZ,

ED × EZ *faits sous les abscisses* SD, ED *& les droites* SZ, EZ *qui sont l'axe* ZD, *prolongé jusqu'aux ordonnées.*

A cause des cercles MN, BC nous avons $\overline{TS}^2 = MS \times SN$, & $\overline{QE}^2 = BE \times EC$; donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2$ :: MS × SN. BE × EC ; mais les triangles semblables MSZ, BEZ donnent MS. BE :: SZ. EZ, & à cause des triangles semblables DSN, DEC, nous avons SN. EC :: DS. DE ; multipliant donc les termes de ces deux dernieres proportions les uns par les autres, nous aurons MS × SN. BE × EC :: SZ × DS :: EZ × DE ; or, nous venons de trouver $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2$ :: MS × SN. BE × EC; donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2$ :: SZ × DS. EZ × DE.

Comme il feroit trop embarraffant de déduire les autres propriétés des fections coniques dans le cône même, nous allons les confidérer dans un plan.

De la Parabole confiderée dans un Plan hors du cône.

635. PROBLEME. *Décrire une parabole fur un plan* (Fig. 388).

Je prens une ligne indéfinie AB que je nomme la *Directrice*, fur le point du milieu C, j'éleve une perpendiculaire indéfinie CS, fur laquelle je prens à difcrétion deux parties égales CD, DO & je nomme le point O, *Foyer ;* je conçois que fur tous les points de DS foient élevées des perpendiculaires indéfinies MN, PQ, RT, VX &c. je prens avec le compas la diftance HC de la perpendiculaire PQ à la directrice, & portant l'une des pointes du compas fur le foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe PQ en deux points P & Q ; je prens de même la diftance LC de la perpendiculaire VX à la directrice, & portant l'une des pointes du compas au foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe la perpendiculaire en deux points V, X ; je fais la même chofe à l'égard des autres perpendiculaires, qui par conféquent me donnent toutes deux points également éloignés de CS, à l'exception de la droite MN qui ne me donne que le point D, à caufe que fa diftance DC à la directrice étant égale à la diftance OD, l'arc que je décrirois avec cette diftance en prenant le foyer pour centre, ne fait que toucher cette perpendiculaire MN en D fans la couper, & quand aux autres perpendiculaires telles que EF qui couperoient la partie CD, il eft clair qu'en pre-

nant leurs diſtances GC à la directrice, & prenant pour centre le foyer, l'arc décrit avec cette ouverture, ne couperoit point la perpendiculaire à cauſe de OG plus grand que GC. Faiſant donc paſſer une courbe ZVRPDQTXY par tous les points trouvés, l'axe de cette courbe eſt la droite DS, ſes ordonnées ſont les droites PH, RO, &c. & ſes abſciſſes ſont les droites DH, DO &c. il reſte donc à faire voir que cette courbe eſt une parabole.

Il y a ici deux ſortes d'ordonnées, les unes VL, ZK, &c. qui ſont en deſſous du foyer, & les autres telles que PH qui ſont entre le foyer O & le ſommet D. Commençons par les premieres.

Je mene du foyer O la droite OV (*Fig. 389.*) à l'extrêmité de l'ordonnée VL; ce qui me donne un triangle rectangle VOL, dans lequel j'ai $\overline{VL}^2 = \overline{VO}^2 - \overline{OL}^2$ & à cauſe de VO = LC, par la conſtruction, j'ai $\overline{VL}^2 = \overline{LC}^2 - \overline{OL}^2$, & faiſant le quarré LB de LC, & le quarré LR de LO, j'ai le quarré $\overline{VL}^2$ égal au gnomon ou équerre CBFIRO; or, la ligne CL eſt diviſée en deux parties CO, OL, le gnomon contient le quarré RB de la partie CO, plus, deux rectangles égaux CR, RF des parties CO, OL; (*N.* 140.) ainſi coupant le quarré RB en deux également par la droite MN paralelle à RE, & donnant la moitié de ce quarré à chacun des deux rectangles; le gnomon ſera égal à deux fois le rectangle IMNF, c'eſt-à-dire à IM multiplié par deux fois IF; or, IM = DL; car à cauſe de HR égal à CO, & du point M qui diviſe HR en deux également, de même que CO eſt diviſé en deux également en D, on a DO = MR & DO + OL = MR + RI = MI, & IF égal à OC à cauſe de LC = LF & de LI = LO; donc le rectangle IMNF = DL × OC, & par conſéquent 2IMNF = DL × 2OC; c'eſt-à-dire le gnomon ou le quarré de l'ordonnée VL, eſt égal à l'abſciſſe correſpondante DL multipliée par 2 fois la diſtance OC du foyer à la directrice, ou par 4 fois la diſtance OD du foyer au ſommet. Or, je prouverai de la même façon que le quarré de l'ordonnée ZY eſt égal à ſon abſciſſe DY multipliée par 4 fois la diſtance OD, donc les quarrés des ordonnées VL, ZV, &c. ſont entr'eux comme leur abſciſſes, DL, DV, &c. multipliées chacune par 4OD, & par conſéquent comme leur abſciſſes, à cauſe du multiplicateur commun 4OD.

Maintenant, ſoit une ordonnée PM (*Fig. 390.*) entre le foyer O & le ſommet D; je mene du foyer O la droite OP, & dans

le triangle rectangle PMO, j'ai $\overline{PM}^2=\overline{PO}^2-\overline{MO}^2=\overline{MC}^2-\overline{MO}^2$; car par la construction, j'ai $PO=MC$; je fais le quarré CH de CM, & prenant $CL=MO$, je fais le quarré CR, & par conséquent le quarré $\overline{PM}^2$ est égal au gnomon MHASRL qui contient le quarré RH de la partie LM, & deux rectangles AR, RM des parties CL, LM; je divise le quarré RH en deux également par la ligne QX, & donnant la moitié de ce quarré à chaque rectangle, le gnomon ou le quarré PM est égal à 2 fois le rectangle SXQA ou à $2SX\times SA$; mais $SA=LM$, & $LM=2MD$, à cause de $DO=DC$, & de $MO=CL$; donc le quarré $\overline{PM}^2$ $=2SX\times 2MD=4SX\times MD$, c'est-à-dire le quarré de l'ordonnée PM égal à son abscisse MD multipliée par 4SX ou 4CD ou 4DO; ainsi le quarré de l'ordonnée PM est au quarré de l'ordonnée VE, qui est au-dessous du foyer, comme l'abscisse DM multipliée par 4DO, est à l'abscisse DE multipliée par 4DO, ou comme DM est à DE; donc la courbe est une parabole (*N.* 630.).

636. La droite égale à 4DO, se nomme *Parametre* de l'axe.

637. COROLLAIRE Ier. *La droite* MN (Fig. 388.) *paralelle aux ordonnées, & qui passe par le sommet* D, *est tangente de la parabole*; car tous les autres points de la parabole sont au-dessous de cette droite par la construction.

Nota. Que lorsqu'on veut construire une parabole par plusieurs points, cette parabole sera d'autant plus exacte que les perpendiculaires PQ, RT, &c. (*Fig.* 388.) seront plus proches entre-elles.

638. COROLLAIRE II. *Du foyer* O (Fig. 391.) *étant menée une droite* OS *qui coupe la parabole en un point quelconque* V. *Je dis* 1°. *Que si du point* V, *on mene une perpendiculaire* VT *sur la directrice, cette perpendiculaire* VT *sera toujours égale à la droite* VO, *comprise entre la courbe & le foyer.* 2°. *Que si du point* X *de la droite* SO *pris entre la courbe & le foyer, on mene une perpendiculaire* XH *sur la directrice, cette perpendiculaire sera plus grande que la droite* XO *comprise entr'elle & le foyer.* 3°. *Enfin qne si du point* S *de la droite* OS *pris hors de la courbe, on mene une perpendiculaire* SA *sur la directrice, cette perpendiculaire* SA *sera plus courte que la droite* SO *comprise entr'elle & le foyer.*

Du point V je mene l'ordonnée VE à l'axe, & par la construction de la parabole, j'ai $EC=OV$; mais à cause des paralelles,

les, j'ai EC=VT; donc VT=VO : ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Du point X je mene XR perpendiculaire ſur TV; dans le triangle rectangle VRX, l'hypoténuſe XV eſt plus grande que le côté RV; or nous avons TV=VO, donc TV—VR, c'eſt-à-dire TR eſt plus grand que VO—VX, c'eſt-à-dire que XO; mais TR=HX; donc HX eſt plus grande que XO: ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Du point V je mene VM perpendiculaire ſur SA, & dans le triangle rectangle SMV, j'ai MS plus petite que SV; or, nous avons TV ou AM=VO; donc AM+MS eſt plus petite que VO+VS, c'eſt-à-dire AS plus petite que SO : ce qu'il falloit 3°. démontrer.

639. Corollaire III. Donc, 1°. quand la perpendiculaire VT menée ſur la directrice, eſt égale à VO, le point V eſt ſur la courbe. 2°. Quand la perpendiculaire XH eſt plus grande que XO, le point X eſt entre la courbe & le foyer. 3°. Quand la perpendiculaire SA eſt moindre que SO, le poinr S eſt hors de la courbe.

640. Probleme. *D'un pint donné* P (Fig. *392.*) *pris ſur la courbe d'une parabole hors du ſommet* A *de l'axe, mener une tangente à la parabole.*

Du point P je mene l'ordonnée PS, la droite PR perpendiculaire ſur la directrice, la droite PO au foyer O, & joignant la droite RO, que je diviſe en deux également en H; je mene par les points P, H la droite PHT qui eſt la tangente demandée.

Car ſi on veut que la droite PT touche la courbe en quelqu'autre point, ce point ſera, ou entre P & T comme en M, ou en delà comme en Z; ſuppoſé donc qu'il ſoit en M, je mene du point M la droite MO au foyer, la droite MR au point R, & la droite MV perpendiculaire ſur la directrice. Le triangle RPO eſt iſoſcele; car PR=NS à cauſe des paralelles, & PO=NS par la conſtruction de la parabole; or la droite PH étant perpendiculaire ſur le milieu de RO, tous ſes points tels que M ſont également éloignés de R & O; donc RM = MO, & le triangle RMO eſt iſoſcele; mais dans le triangle rectangle RVM, l'hypothenuſe RM eſt plus grande que le côté MV; donc MO eſt auſſi plus grand que MV, & par conſéquent le point M eſt hors de la parabole (*N. 639.*). On

prouvera de la même façon que le point Z est hors de la parabole. Donc la droite ZT ne touche la parabole qu'en P.

641. COROLLAIRE Ier. *La soutangente* TS *est coupée en deux également au sommet* A *de l'axe.* Les triangles rectangles PRH, THO sont semblables & égaux, à cause de l'angle aigu RPT, égal à son alterne PTO, ce qui rend les trois angles égaux chacun à chacun, & du côté RH égal au côté HO; donc PR = TO; mais PR = NS, donc TO = NS, & retranchant de TO la partie AO, & de la droite NS la partie NA = AO par la construction de la parabole, j'ai TA = AS.

642. COROLLAIRE II. Donc pour mener une tangente d'un point P, il n'y a qu'à mener l'ordonnée, puis prolonger l'axe au-delà du sommet jusqu'à ce que TA soit égal à AS, & mener la droite PT qui sera la tangente demandée.

643. COROLLAIRE III. *Si sur le point d'attouchement* P *on éleve la droite* PL *perpendiculaire sur la tangente, la souperpendiculaire* SL *est égale à la moitié du paramétre.* La droite RO étant perpendiculaire sur la tangente est par conséquent paralelle & égale à PL à cause des paralelles PR, LN, & la droite RN est aussi égale à PS; donc les triangles rectangles PSL, RNO sont semblables & égaux & SL = NO, mais NO est la moitié du paramétre (*N. 636.*); donc la souperpendiculaire SL est égale à la moitié du paramétre.

644. COROLLAIRE IV. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la parabole sont inclinées entr'elles, & se coupent entre les points d'attouchement.*

Soient les points d'attouchement H, Q (*Fig. 393.*) pris l'un à gauche & l'autre à droite de l'axe; je mene les ordonnées HS, QE, & faisant AB = AS, & AC = AE, la tangente au point H sera HB, & la tangente au point Q sera QC (*N. 642.*); ainsi comme ces deux tangentes sont inclinées sur l'axe; il est clair qu'en prolongeant la plus courte HB, elle coupera l'autre en un point D qui sera entre les points d'attouchement H, Q.

De même soient les points d'attouchement H, P pris du même côté de l'axe; menant les ordonnées HS, PN, & faisant BA=AS, & AT égal à AN, la tangente du point H sera BH ou BX, & la tangente du point P sera PT; or, PT ne peut aller aboutir en T qui est plus éloigné du sommet A que le point B sans couper BX, & elle ne peut couper BX entre B & H; par exemple, en R, car si cela étoit, il faudroit qu'elle passât entre l'axe & le point

d'attouchement H, & par conséquent elle couperoit la parabole, & ne seroit plus tangente; donc il faut nécessairement qu'elle coupe BX en quelque point M entre les points d'attouchemens P & H.

645. Corollaire V. *Une tangente* PT (Fig. 394.) *ne peut toucher la parabole en deux points.* Si l'on veut que PT touche la parabole en P & R, la droite PR menée entre ces deux points sera la plus courte qu'on puisse mener; or, l'arc parabolique PR est courbe, & comme par la formation de la parabole dans le cône, sa concavité est toujours tournée vers l'axe, la droite PR doit passer entre l'axe & la courbe; donc PR doit couper la courbe au lieu de la toucher, ce qui est contre la supposition.

646. Corollaire VI. *D'un même point* P (Fig. 395.) *on ne peut mener deux tangentes.* Si on veut qu'on puisse en mener deux, la seconde tangente coupera l'axe en un point C plus près du sommet A que le point T ou la premiere tangente PT la coupe, ou en un point S plus éloigné. Supposons donc qu'elle la coupe en C. Je prens AN=CA; du point N, je mene l'ordonnée NQ, & du point Q par le point C, je mene la droite QC qui sera tangente en Q, puisque la soutangente NC est double de l'abscisse AN (*N.* 641.); & CQ prolongée coupera PT en un point M entre les points d'attouchement P, Q (*N.* 644.). Or, la seconde tangente menée du point P au point C, passera nécessairement entre M & Q; car autrement elle entreroit dans la parabole; ainsi elle coupera CM entre M & Q, & ensuite en Q, ce qui n'est pas possible; & on démontreroit la même chose, si la seconde tangente coupoit l'axe en S.

647. Proposition CXXIV. *Toutes les lignes* DK (Fig. 396.) *paralelles à l'axe* AB *coupent la parabole, & ne la coupent qu'en un point, & toutes les lignes* RT *qui ne sont pas paralelles à l'axe, & qui coupent la parabole en un point, la coupent encore en un autre point.*

Les quarrés des ordonnées étant entr'eux comme leurs abscisses, il est clair qu'à mesure que les abscisses sont plus grandes, les quarrés des ordonnées sont plus grands, & par conséquent les ordonnées sont aussi plus grandes. Ainsi la courbe de la parabole s'éloigne de plus en plus de son axe; or, la distance DN de la ligne DK à l'axe, quelque grande qu'elle soit, est toujours la même, à cause du paralellisme; donc il se trouvera toujours quelque ordonnée OF égale à DN, & par conséquent DK cou-

pera la parabole en O, après quoi les autres ordonnées croissant toujours, la courbe s'éloignera de plus en plus de DK, qui par conséquent ne la coupera plus : ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Par la supposition la ligne RT est oblique à l'axe & coupe la parabole en R. Or, de tous les points H, X, &c. de l'arc parabolique indéfini RHXP, on peut mener des tangentes MHN, SXQ, &c. & ces tangentes sont toutes diversement inclinées, de façon que les inférieures SXQ coupent les supérieures MHN (*N. 644.*) ; ainsi les angles NHE, QXF, &c. qu'elles font avec les ordonnées HE, XF menées des points d'attouchement H, X, &c. vont en augmentant à mesure que les points d'attouchement s'éloignent du sommet A de la parabole. Donc il faut nécessairement qu'il se trouve quelque tangente, telle que QXS, qui fasse avec l'ordonnée XF un angle QXF, plus grand que l'angle que la ligne RT fait avec la même ordonnée ; or, en ce cas les droites QXS, RTS n'étant pas paralelles, se couperont en quelque point S, & ce point sera hors de la parabole, à cause que QXS est tangente ; donc la ligne RT qui entre dans la parabole en R, & qui viendra couper la tangente QXS en S, doit nécessairement couper la parabole en un autre point T.

648. *Definition.* Toute ligne DK paralelle à l'axe AB (*Fig. 396.*), se nomme *Diamétre* de la parabole, à cause qu'on peut toujours trouver une infinité de lignes paralelles entr'elles, & terminées de part & d'autre à la courbe, lesquelles seront coupées chacune en deux également par la ligne DK, comme il sera démontré plus bas.

649. Proposition CXXV. *L'axe* AB (Fig. 397.) *un diamétre* PR, *& leurs tangentes* AP, NT *aux sommets* A, N *étant donnés, le triangle* TOA *fait par ces tangentes & l'axe, est égal au triangle* PON *fait par les mêmes tangentes & le diamétre.*

Les triangles rectangles TOA, PON sont semblables, à cause de l'angle aigu PNT, égal à son alterne NTA ; mais en menant du point N l'ordonnée NB à l'axe, on a PN = AB, & nous avons aussi AB = AT (*N. 641.*) ; donc le côté AB étant égal au côté AT, les deux triangles sont non-seulement semblables, mais encore égaux.

650. Corollaire. *Le rectangle* PANB *fait par la tangente* PA, *& l'ordonnée* NB, *avec l'axe & le diamétre est égal au triangle* NTB *fait par l'autre tangente avec l'ordonnée* NB, *& sa soutangente.* Car si à chacun des triangles égaux TOA, PON, on ajoute le quadrilatére OANB, on aura PANB = NTB.

651. Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont le fondement de preſque tout ce que nous allons dire, & par conſéquent il faut y faire attention. Il faut auſſi remarquer que les tangentes NT, AP compriſes entre l'axe & le diamétre ſont coupées chacune également au point O; car les triangles TOA, PON ſemblables & égaux donnent NO = OT, & PO = OA.

652. PROPOSITION CXXVI. *L'axe* AB (Fig. 398.) *un diamétre* PR *& leur tangente* AP, NT *aux ſommets* A, N *étant donnés, ſi d'un point quelconque* S *pris ſur la courbe on mene deux droites* ZSX, CD, *paralelles aux tangentes, il ſe formera deux triangles, l'un* SZD *avec l'axe, & l'autre* CSV *avec le diamétre; & je dis* 1°. *Que le triangle* SZD *fait par les paralelles & l'axe eſt égal au rectangle* PADC *fait par la tangente de l'axe & ſa paralelle entre l'axe & le diamétre.* 2°. *Que le triangle* CSV *fait par les mêmes paralelles & le diamétre eſt égal au paralellogramme* NTZV *fait par la tangente du diamétre & ſa paralelle compriſes entre l'axe & le diamétre.*

Commençons par le triangle fait avec l'axe; mais auparavant il faut remarquer, 1°. Que le point d'où l'on mene les paralelles peut-être pris entre le diamétre & l'axe comme le point S, & alors le triangle fait par les paralelles & l'axe eſt ZSD, 2°. Que ce point peut être pris en-delà du diamétre comme le point X, auquel cas le triangle par les paralelles XZ, XB, & l'axe eſt ZXB; 3°. enfin, que ce point peut être pris au-delà de l'axe comme le point E, & alors le triangle fait par les paralelles DC, DH, & l'axe eſt DEH. Cela poſé.

Si le point eſt en S, je ſçais que le triangle TNQ eſt égal au rectangle PAQN (*N.* 650); or à cauſe des paralelles NT, SZ & NQ, SD, ces deux triangles ſont ſemblables & ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues NQ, SD; donc TNQ, ZSD :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$; mais NQ, SD étant ordonnées à l'axe, nous avons $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$ :: QA, DA. Donc TNQ, ZSD :: QA, DA, & multipliant les deux derniers termes par la même grandeur AP, nous aurons TNQ, ZSD :: QA × AP, DA × AP; or QA × AP = PAQN & DA × AP = PADC; donc TNQ, ZSD :: PAQN, PADC, mais TNQ = PAQN; donc ZSD = PADC.

De même ſi le point d'où l'on mene les paralelles eſt X, le triangle TNQ eſt ſemblable au triangle ZXB fait par les para-

lelles ZX, XB & l'axe; donc on aura encore TNQ, ZXB :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{XB}^2$ :: QA, BA :: QA × AP, BA × AP :: PAQN, PABR; or TNQ = PAQN; donc ZXB = PABR.

Enfin si le point d'où l'on mene les paralelles est E, le triangle TNQ est encore semblable au triangle DEH fait par les paralelles & l'axe, à cause de l'angle aigu NTH égal à son alterne THE; donc on aura encore TNQ, DEH :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{DE}^2$ :: QA, DA :: QA × AP, DA × AP :: PAQN, PADC; or TNQ = PAQN; donc DEH = PADC. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Venons au triangle fait avec les paralelles & le diamétre; 1°. Si le point d'où l'on mene les paralelles est S, le triangle est CSV; or je dis : le triangle TNQ est égal au rectangle PAQN, & retranchant du triangle TNQ, le triangle ZSD, & du rectangle PAQN, le rectangle PADC égal au triangle ZSD, comme on vient de voir, il reste TNLZ + SLQD = CDNQ, & retranchant la partie commune SLQD, il reste TNLZ = CSLN, & ajoutant de part & d'autre le triangle NLV, nous aurons TNVZ = CSV.

2°. Si le point d'où l'on mene les paralelles est X, le triangle fait avec les paralelles, & le diamétre est VXR. Or nous avons trouvé ZXB = PABR, retranchant donc du triangle ZXB, le triangle ZSD, & du rectangle PABR, le rectangle PADC = ZSD, nous aurons SDBX = CDBR, & retranchant la partie commune SDBRV, nous aurons XVR = CSV, mais CSV = NTZV donc XVR = NTZV.

3°. Enfin, si le point d'où l'on mene les paralelles est E, le triangle fair avec les paralelles, & le diamétre sera EKC; or le triangle EDH fait par les mêmes paralelles avec l'axe est égal à PADC; donc le triangle EKC = PAHK, & retranchant du second membre le triangle PNO, & lui donnant en sa place le triangle TOA = PON (*N. 649*) nous aurons EKC = NTHK, ce qu'il falloit en second lieu démontrer.

653. COROLLAIRE. *Toute ligne* SX *paralelle à une tangente* NT *& terminée de part & d'autre à la courbe parabolique, est divisée en deux également en* V *par le diamétre* PR *qui passe par le point d'attouchement.* Nous venons de trouver le triangle CSV égal au triangle XVR (*N. 652.*) or ces deux triangles sont semblables à cause des angles opposés au sommet égaux, &

de l'angle aigu VXR égal à son alterne VSC; donc les côtés de ce triangle sont égaux, & nous avons SV = VX.

Nota. On a donc eu raison de dire (*N.* 648) que toute ligne PR paralelle à l'axe est un diamétre; car en quelque point N que cette ligne coupe la courbe, on n'aura qu'à mener une tangente par ce point, & des paralelles à cette tangente comprises entre la courbe, & l'on prouvera toujours que PR est un diamétre; d'où il suit que tous les diamétres sont paralelles à l'axe.

654. COROLLAIRE II. *Donc les moitiés de toutes les lignes telles que* SV *paralelles à une tangente* NT *sont les ordonnées du diamétre* PR *qui passe par le point d'attouchement* (*N.* 626.)

655. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées à un diamétre sont entr'eux comme les abscisses de ce diamétre.*

Soit le diamétre PR (*Fig.* 399.) l'axe AB, les tangentes NT, AP & les droites SM, EH ordonnées au diamétre PR; je prolonge ces ordonnées jusqu'à l'axe, & des points S, E je mene des droites SI, EL paralelles à la tangente AP. Le triangle ISM fait par deux paralelles aux tangentes & par le diamétre, est donc égal au paralellogramme NTOM (*N.* 652.) & par la même raison le triangle LEH est égal au paralellogramme NTQH; donc ISM, LEH :: NTOM, NTQH; mais à cause de la similitude des triangles ISM, LEH, nous avons ISM, LEH :: $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$; donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NTOM, NTQH; mais ces deux derniers termes ou paralellogrammes étant entre mêmes paralelles PR, TB, sont entr'eux comme leur bases NM, NH; donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH.

656. PROPOSITION CXXVII. *Si l'on cherche une troisiéme proportionnelle à une Abscisse* NM (Fig. 399.) *d'un diamétre* PR *& à son ordonnée* MS, *les quarrés des ordonnées à ce diamétre seront égaux à leurs Abscisses multipliées par cette troisiéme proportionnelle.*

Nous avons $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH (*N.* 655.); nommant donc la troisiéme proportionnelle x, & multipliant les deux Abscisses par la même grandeur x, nous aurons encore $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$. :: NM × x. NH × x; mais à cause de la proportion continue ∺ NM. MS. x, nous avons $\overline{MS}^2$ = NM × x, c'est-à-dire

les deux antécedens $\overline{MS}^2$, $NM \times x$ de la proportion $\overline{MS}^2 . \overline{HE}^2 ::$ $NM \times x . NH \times x$ font égaux ; donc les deux conséquens $\overline{HE}^2$, $NH \times x$ sont aussi égaux.

657. La troisiéme proportionnelle à l'abscisse NM, & à l'ordonnée MS d'un diamétre PR, se nomme le *Paramétre* de ce diamétre, à cause que cette proportionnelle multipliant l'abscisse, fait un produit égal au quarré de l'ordonnée, de même qu'à l'égard de l'axe, le produit de l'abscisse par le paramétre est égal au quarré de l'ordonnée.

658. COROLLAIRE Ier. *Le paramétre d'un diamétre ayant été pris troisiéme proportionnel à une abscisse* NM, *& à son ordonnée* MS, *est aussi troisiéme proportionnel à une autre abscisse quelconque* NH, *& à son ordonnée* HE. Car nommant ce paramétre x, nous avons $\overline{HE}^2 = NH \times x$ (*N.* 656.); donc :: NH. HE. x.

659. COROLLAIRE II. *Si du sommet* N *d'un diamétre* PR (Fig. 400.), *on mene une ordonnée* NB *à l'axe, le paramétre du diamétre* PR *sera égal au paramétre de l'axe, plus quatre fois l'abscisse* AB *de cet axe.* Du sommet A, je mene l'ordonnée AR au diamétre PR ; ainsi le paramétre du diamétre sera une troisiéme proportionnelle à l'abscisse NR, & à l'ordonnée AR ; mais à cause des paralelles NT, RA, & NR, TA ; nous avons NR $=$ TA, & AR $=$ NT ; donc le paramétre du diamétre sera troisiéme proportionnelle à la moitié TA de la soutangente TB, & à la tangente NT, & par conséquent :: TA. TN. x ; d'où je tire $\overline{TN}^2 = TA \times x$; mais à cause du triangle rectangle NTB ; j'ai $\overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{TB}^2 = AB \times 4AO + 4\overline{TA}^2 = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; car TA $=$ BA (*N.* 641.), & par la proprieté de la parabole $\overline{NB}^2 = AB \times 4AO = TA \times 4AO$, en supposant que le point O soit le foyer ; comparant donc ensemble les deux valeurs de $\overline{TN}^2$; j'ai $TA \times x = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; & divisant tout par TA, le quotient est $x = 4AO + 4TA = 4AO + 4AB$, c'est-à-dire le paramétre du diamétre PR est égal à 4AO ou au paramétre de l'axe, plus quatre fois l'abscisse AB.

660. COROLLAIRE III. *Si du sommet* N *d'un diamétre* PR (Fig. 400.), *on mene la droite* NO *au foyer, cette droite sera le quart du paramétre du diamétre* PR, *de même que la droite* AO *menée du sommet*

sommet de l'axe au foyer ; est le quart du paramétre de l'axe.

Je mene la directrice PQ, & j'ai NO = LB = AB + LA ; c'est-à-dire NO égal à l'abscisse AB de l'axe, plus le quart du paramétre de cet axe. Mais le paramétre du diamétre est égal à 4 fois l'abscisse AB, plus le paramétre ou 4LA (*N. 659.*) ; donc le paramétre du diamétre est quadruple de NO.

661. COROLLAIRE IV. *L'angle* ONT *fait par la droite* NO *menée du sommet* N *du diamétre* PR *au foyer* O, *avec la tangente* NT *est égal à l'angle* XNR *fait par la même tangente avec le diamétre* PR.

Du point P où le diamétre PR coupe la directrice ; je mene au foyer la droite PO ; ainsi la tangente NT coupe PO en Z en deux également (*N. 640.*), & à cause des triangles semblables & égaux PZN, TZO, j'ai PN = TO ; mais PN = LB = NO par la construction de la parabole ; donc NO = TO ; & par conséquent le triangle NOT étant isoscele, l'angle TNO est égal à l'angle NTO ; mais celui-ci est égal à l'angle XNR, à cause des paralelles PR, TB ; donc l'angle ONT est égal à l'angle XNR.

662. PROPOSITION CXXVIII. *Deux diamétres, ou l'axe & deux diamétres étant donnés avec leurs tangentes* PO, OM (Fig. 401.), *si l'on mene d'un point d'attouchement à l'autre la droite* PM, *& qu'on la divise en deux également en* V, *la droite* OV *qui passera par le point* V, *& par le point* O *où les deux tangentes se coupent, sera le diamétre de la droite* PM *& de ses paralelles.*

La droite PM & ses paralelles ont nécessairement un diamétre, car les tangentes en nombre infini qu'on peut mener sur tous les points de l'arc parabolique PM, étant toutes diversement inclinées entr'elles, il faudra bien qu'il y en ait quelqu'une qui soit paralelle à la droite PM, & par conséquent du point d'attouchement de cette tangente, menant une ligne paralelle à l'axe, cette ligne coupera PM, & ses paralelles chacune en deux également (*N. 653.*). Si l'on veut donc que la ligne OV qui coupe PM, ne coupe pas les paralelles à PM aussi en deux également ; il y aura donc quelqu'autre ligne qui passera par le point V, & qui divisera les paralelles en deux également, & cette ligne prendra sa direction ou à droite ou à gauche du point O où les tangentes PO, MO se coupent, lequel point est entre les points P, M d'attouchement (*N. 644.*) ; supposons donc que ce soit la ligne VL, du point L, je mene la droite LP, laquelle coupera la parabole, à cause que PO qui passe par le même point P est tangente ; ainsi

PL aura une partie PE dans la parabole. Je mene une droite ST paralelle à PM, & qui coupe PE en un point R, & je prolonge ST en H. Les triangles semblables LPV, LRK, donnent PV. RK :: VL. KL; & à cause des triangles semblables LVM, LKH, j'ai VM. KH :: VL. KL, donc PV. RK :: VM. KH; or, PV = VM; donc RK = KH, mais SK est plus grand que RK, & au contraire KT est moindre que KH; donc SK est plus grand que KT, & par conséquent la droite LV qui divise PM en deux parties égales, ne divise pas en deux également la droite ST paralelle à PM; d'où il suit qu'elle n'est pas un diamétre.

On démontrera de la même façon que toute autre ligne qui passera par le point V, & qui prendra sa direction entre P & O, ne sera pas un diamétre; donc puisqu'il doit y en avoir un, il faut nécessairement que ce soit la droite VO.

663. Corollaire. La droite VO menée du point O où les tangentes se coupent, sur le milieu de la droite PM qui joint les points d'attouchement est paralelle aux diamétres PZ, MN; car tous les diamétres d'une parabole doivent être paralelles à l'axe (*N.* 648, 653.), & par conséquent paralelles entr'eux.

664. *Remarque.* Tout ce que nous avons dit (*N.* 649, 650, & 652.), à l'égard de l'axe & d'un diamétre peut se démontrer aussi à l'égard de deux diamétres par le moyen de la Proposition précédente.

Soit par exemple, les deux diamétres PZ, MN (*Fig.* 402.); & leurs tangentes PT, MD qui se coupent en O; je mene la droite PM, que je divise en deux également en V; je mene aussi la droite VO, laquelle étant un diamétre (*N.* 662.) est paralelle aux deux diamétres PZ, MN; du point P, je mene PN paralelle à la tangente MD, & du point M la droite MZ paralelle à la tangente PT, & par conséquent PN est ordonnée au diamétre MN, & MZ est ordonnée au diamétre PZ; & la figure POMR est un paralellogramme. Or, la diagonale PM est divisée en deux également en V par la droite OV; donc cette droite OV étant prolongée doit être l'autre diagonale, & passer par le point R. Ainsi à cause des paralelles PT, ZM les paralelles PZ, OR, TM sont égales, c'est-à-dire OR est égale à chacune des droites PZ, TM; & à cause des paralelles DM, PN la droite OR est aussi égale à chacune des droites PD, NM; d'où il suit que les quatre lignes TM, MN, PD, PZ sont égales.

Donc 1°. A cauſe de TM = MN, la ſoutangente TN du diamétre MN eſt diviſée en deux également au ſommet M de ce diamétre, & par conſéquent elle eſt double de l'abſciſſe MN, & à cauſe de DP = PZ, la ſoutangente DZ du diamétre PZ eſt double de l'abſciſſe PZ.

Donc 2°. Les triangles DOP, TOM faits par les tangentes & les diamétres ſont égaux, car ces triangles ſont ſemblables, & le côté PD eſt égal au côté TM.

Donc 3°. Le triangle PTN fait par la tangente PT, par la ſoutangente TN & par l'ordonnée PN au diamétre MN, eſt égal au paralellogramme MNPD fait par la même ordonnée PN & par la tangente MD du même diamétre MN compriſes entre les deux diamétres. Car ſi à chacun des triangles égaux TOM, DOP on ajoute la partie commune OPNM, on aura PTN = MNPD. & on démontrera de même que MDZ = PZMT.

Donc 4°. Si d'un point quelconque S (*Fig.* 403.) pris ſur la courbe, on mene XR, LH paralelles aux deux tangentes TP, MD, le triangle HSR faits par les deux paralelles avec le diamétre MN, eſt égal au paralellogramme MDXR fait par la tangente MD de ce diamétre, & ſa paralelle compriſe entre les deux diamétres. Car menant du point P l'ordonnée PN, nous aurons TPN=MDPN, comme on vient de voir: or, les triangles TPN, HSR étant ſemblables, nous avons TPN. HSR :: $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$, mais PN, SR étant ordonnées au diamétre MN, donnent $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$ :: MN. MR, donc TPN. HSR :: MN. MR; mais les paralellogrammes MNPD, MRXD étant entre deux paralelles, ſont entr'eux comme leur baſe MN. MR, donc TPN. HSR :: MNPD. RXD, or, TPN = MNPD, donc HSR = MRXD.

Et on prouvera de même que l'autre triangle XSL fait par les deux paralelles, & l'autre diamétre eſt égal au paralellogramme fait par la tangente PT de ce diamétre, & par ſa paralelle compriſes entre les diamétres; car de l'autre point d'attouchement M menant l'ordonnée MZ au diamétre PZ; les triangles ſemblables DMZ, XSL ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs baſes ou des ordonnées MZ, SL, & par conſéquent comme les abſciſſes PZ, PL, ou comme les paralellogrammes PTMZ, PTHL qui ſont dans la même raiſon que leurs baſes PZ, PL, à cauſe qu'ils ſont entre deux paralelles; donc on aura DMZ. XSL :: PTMZ, PTHL. mais DMZ = PTMZ, donc XSL = PTHL.

Et on prouvera la même chose en quelque point de la courbe que soit le point S.

665. COROLLAIRE. *Dans la parabole, deux tangentes* PT; DM (Fig. 403.) *qui se coupent en allant aboutir aux diamétres opposés, se coupent chacune en deux parties égales*, car les triangles DOP, TOM étant semblables & égaux, on a PO = OT, & DO = OM.

666. PROPOSITION. CXXIX. *Deux diamétres* PZ, MN (Fig. 404.) *étant donnés avec leurs tangentes* PT, MD, *si l'on prend sur la courbe deux points* R, S, *entre les deux sommets* P *&* M, *& que de chacun de ces points on mene des droites* RL, RC, SH *ou* IH, SE *ou* XE; *paralelles aux tangentes, le trapezoïde* QCES *fait avec le diamétre* MN, *par les deux paralelles* QC, SE *qui le coupent, & par la plus proche* HS *des deux autres, est égal au trapezoïde* LRQH *fait avec l'autre diamétre* PZ *par les deux paralelles* QH, RL *qui le coupent, & par la plus proche* RC *des deux autres.*

A cause que RC, LN sont paralelles aux tangentes, nous avons CRN = NMDL (*N.* 664.) & retranchant de part & d'autre la partie commune RBMN, nous aurons CBM = BDLR; de même à cause des droites HI, SE paralelles aux tangentes, nous avons ESI = IHDM, & retranchant de part & d'autre la partie commune SVMI, nous aurons EVM = VDHS, & par conséquent CBM — EVM = BDLR — VDHS; mais CBM — EVM = CBVE; donc CBVE = BDLR — VDHS, ou CBVE + VDHS = BDLR, & retranchant de part & d'autre la partie commune VDHS, nous aurons enfin CQSE = HQRL.

667. COROLLAIRE. Si on ajoute à chacun des trapezoïdes égaux CQSE, HQRL le petit paralellogramme QRXS, nous aurons CRXE = HSXL, c'est-à-dire: *le trapezoïde* CRXE *fait avec le diamétre* MN *par les paralelles* RC, XE *qui le coupent, & par la plus éloignée* XL *des deux autres paralelles, est égal au trapezoïde* HSXL *fait avec l'autre diamétre par les paralelles* HS, LX *qui le coupent; & par la plus éloignée* XE *des deux autres.*

Nota. Cette proposition & son Corollaire sont d'une grande utilité dans les trois sections coniques, comme on va voir dans les propositions suivantes touchant la parabole, & dans celles que nous donnerons touchant l'ellipse & l'hyperbole.

668. PROPOSITION CXXX. *Si deux droites* SX, RY (Fig. 405. 406. 407.) *qui se terminent de part & d'autre à la courbe parabolique, se coupent dans la parabole, le rectangle* SK × KX *des parties inégales*

de la premiere, est au rectangle RK × KY *des parties inégales de la seconde, comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamétre* PB *de la premiere, est au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente du diamétre* MV *de la seconde.*

Il peut arriver que les deux lignes SX, RY coupent toutes les deux l'arc parabolique PM compris entre les deux diamétres PB, MV (*Fig.* 405.) ou que l'une SX (*Fig.* 406.) coupe l'arcPM, & l'autre RY ne le çoupe pas, ou enfin que toutes les deux SX, RY ne coupent point cet arc (*Fig.* 407.) Dans le premier cas (*Fig.* 405.) je prolonge les lignes SX, RY jusqu'à la rencontre des diamétres prolongés en E & L, & de leurs points S, R qui sont sur l'arc PM, je mene les droites SH, RC paralelles aux tangentes, la droite SX étant coupée en deux également en B par son diamétre, & en deux inégalement en K, nous avons SK × KX $= \overline{SB}^2 - \overline{KB}^2$ (*N.* 146.) or, dans les triangles semblables BSH, BKL nous avons $\overline{SB}^2$. $\overline{KB}^2$ :: BSH, BKL (*N.* 352.) donc $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2$. $\overline{SB}^2$ :: BSH — BKL. BSH, ou $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2$. BSH — BKL :: $\overline{SB}^2$. BSH, c'est-à-dire, SK × KX. KSHL :: $\overline{SB}^2$. BSH ; mais les triangles semblables BSH, POD donnent $\overline{BS}^2$. BSH :: $\overline{PO}^2$. POD, donc SK × KX. KSHL :: $\overline{PO}^2$. POD, ou SK × KX. $\overline{PO}^2$ :: KSHL. POD. Je trouverai par un raisonnement tout semblable que RK × KY. $\overline{OM}^2$ :: RCEK. TOM ; nous avons donc d'une part SK × KX. $\overline{PO}^2$ :: KSHL. POD, & de l'autre RK × KY. $\overline{OM}^2$ :: RCEK. OMT ; or, à cause de KSHL $=$ RCEK (*N.* 667.) & de POD $=$ OMT (*N.* 664.) la derniere raison KSHL, POD de la premiere proportion est égale à la derniere raison RCEK, OMT de la seconde proportion, donc les deux premieres raisons de ces proportions sont égales, & partant SK × KX. $\overline{OP}^2$ :: RK × KY. $\overline{OM}^2$, ou SK × KX RK × KY :: $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Dans le second cas (*Fig.* 406) je prolonge XS en E, & des points S, X je mene les droites SH, XZ paralelles à la tangente DM ; je mene aussi du point R la droite RC paralelle à la tangente PT, & du point Q la droite QL paralelle à la tangente DM. Cela fait je trouverai en raisonnant comme ci-dessus SK

$\times$KX, XKFZ :: $\overline{XB}^2$, XBZ :: $\overline{PO}^2$, POD ou SK$\times$KX, $\overline{PO}^2$ :: XKFZ, POD, & de même RK$\times$KY, $\overline{MO}^2$ :: RCEK, MOT; or POD = MOT; ſi je prouve donc que XKFZ = RCEK, nous aurons SK $\times$ KX, RK $\times$ KY :: $\overline{PO}^2$. $\overline{MO}^2$. Or pour le prouver j'obſerve d'une part que XKFZ=XBZ — KBF, & qu'à cauſe de l'ordonnée XS diviſée en deux également en B, les triangles ſemblables XBZ, BHS ſont égaux; donc XKFZ = BHS — KBF; mais à cauſe des droites *SH*, SB paralelles aux tangentes, nous avons BHS=PTEB(*N.* 6 4.) Donc XKFZ = PTEB — KBF; d'autre part la partie RGBK du trapezoïde RCEF eſt égale au triangle RGF moins le triangle KBF; or à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G, les triangles ſemblables RGF, GQL ſont égaux; donc RGBK=QGL — KBF; mais à cauſe des droites QL, QG paralelles aux tangentes, nous avons GQL = PTCG (*N.* 664.) donc RGBK=PTCG — KBF, & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCFB, nous aurons RCEK =PTEB—KBF; mais nous avons trouvé XKFZ = PTEB — KBF; donc RCEK=XKFZ.

Dans le troiſiéme cas (*Fig.* 407.) je mene des points R, S des paralelles RC, SH aux tangentes, & des points Q, F où ces droites coupent la courbe, je mene auſſi des droites QL,FE paralelles aux tangentes. Cela fait nous aurons comme auparavant SK $\times$ KX, $\overline{PO}^2$ :: SHIK, POD & RK$\times$KY, $\overline{OM}^2$, :: RCNK, OMT, & à cauſe de POD = OMT, il ne reſte qu'à prouver que SHIK=RCNK, ce qui donnera SK $\times$ KX, RK$\times$KY, $\overline{PO}$, $\overline{MO}^2$. J'obſerve donc d'une part qu'à cauſe de l'ordonnée SF diviſée en deux également en Z, les triangles ſemblables ZSN, ZEF ſont égaux; or à cauſe de FE, FZ paralelles aux tangentes, nous avons ZEF=MDHZ; donc ZSN =MDHZ, & ajoutant de part & d'autre la partie commune ZHIKN, nous aurons SHIK=MDIKN. D'autre part à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G, les triangles ſemblables GRI, HQG ſont égaux; or à cauſe des droites GL, GQ paralelles aux tangentes, nous avons LQG=PTCG; donc GRI=PTCG, & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCNKI, nous aurons RCNK=PTNKI; mais OMT=POD; donc en ajoutant la partie commune POMNKI, nous aurons

PTNKI $=$ MDIKN; donc RCNK $=$ MDIKN; mais nous avons trouvé SHIK$=$MDIKN; donc SHIK$=$RCNK.

669. PROPOSITION CXXXI. *Si deux lignes* AX, AZ (*Fig.* 408.) *qui coupent la parabole se coupent en un point* A *hors de la parabole, le rectangle* AX $\times$ AQ *de la premiere* AX *par sa partie extérieure* AQ *est au rectangle* AZ$\times$AS *de la seconde* AZ *par sa partie extérieure* AS, *comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamétre* PD *de la premiere, est au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente du diamétre* ME *de la seconde.*

Je prolonge les droites AX, AZ jusqu'à la rencontre des diamétres en C & H, & des points Q, S où elles coupent la courbe, je mene les droites QL, SE paralelles aux tangentes, la droite QX étant divisée en deux également en B, & la droite QA lui étant ajoutée, nous avons AX $\times$ AQ $= \overline{AB}^2 - \overline{BQ}^2$ (*N.* 148.); or les triangles BAH, BQL semblables donnent $\overline{AB}^2$, $\overline{BQ}^2$ :: ABH, BQL; donc $\overline{AB}^2 - \overline{BQ}^2$, $\overline{AB}^2$ :: ABH $-$ BQL, ABH, c'est-à-dire AX $\times$ AQ, $\overline{AB}^2$ :: AHLQ, ABH, ou AX $\times$ AQ, AHLQ :: $\overline{AB}^2$. ABH; mais les triangles semblables ABH, OPD donnent $\overline{AB}^2$, ABH :: $\overline{OP}^2$, OPD; donc AX $\times$ AQ, AHLQ :: $\overline{OP}^2$. OPD ou AX $\times$ AQ. $\overline{OP}^2$. AHLQ. OPD, & par un semblable raisonnement nous trouverons AZ $\times$ AS. $\overline{OM}^2$ :: ACES. OMT, mais OPD$=$OMT. (*N.* 664. & AHLQ $=$ ACES (*N.* 666.) donc dans les deux dernieres proportions que nous venons de trouver, la raison AHLQ, OPD est la même que la raison ACES. OMT, & par conséquent les deux autres raisons sont égales, & nous avons AX $\times$ AQ. $\overline{OP}^2$ :: AZ $\times$ AS. $\overline{OM}^2$. ou AX $\times$ AQ. AZ $\times$ AS :: $\overline{OP}^2$. $\overline{OM}^2$.

670. PROPOSITION CXXXII. *L'axe* AB (*Fig.* 409.) *un diamétre* PK *& leur tangente* AY, PT *étant données avec l'ordonnée* PZ *menée à l'axe du point d'attouchement* P, *je dis que si du point* T *on mene une secante* TS *qui coupe la parabole en* R *&* S, *& l'ordonnée* PZ *en* N, *cette secante sera coupée harmoniquement aux points* R, N.

Des points R, S je mene les droites MC, BV paralelles à la

tangente AY, & les droites LE, SH paralelles à la tangente TPV; enfin du point X où la droite SH coupe la courbe, je mene XD paralelle à AY. Les triangles ſemblables BVT, MQT donnent BV, MQ :: BT. MT, & à cauſe des triangles ſemblables BST, MRT nous avons BS, MR :: BT, MT. Donc BV, MQ :: BS, MR, & partant $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$ :: $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$; mais les triangles ſemblables BVT, MQT ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$ de leurs côtés homologues BV, MQ, & par la même raiſon les triangles ſemblables BSH, MRL ſont entr'eux comme $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$; donc BVT, MQT :: BSH, MRL, ou BVT, BSH :: MQT, MRL, & par conſéquent BVT, BVT — BSH :: MQT, MQT — MRL, c'eſt-à-dire BVT, TVSH :: MQT, TQRL; mais à cauſe de l'ordonnée au diamétre XS diviſée en deux également en O, les triangles ſemblables KOS, XDO ſont égaux, & à cauſe des droites XD, XO paralelles aux tangentes, le triangle XDO eſt égal au paralellogramme PTHO; donc KOS = PTHO, & ajoutant de part & d'autre le trapezoïde POSV, nous aurons KPV = VTHS. De même le triangle CRE eſt égal au paralellogramme PTLE, & retranchant la partie commune PQRE, nous aurons CQP = QTLR; mettant donc dans la proportion trouvée ci-deſſus BVT, TVSH :: MQT, TQRL, les valeurs de TVSH, TQRL que nous venons de trouver, nous aurons BVT, KPV :: MQT, CQP ou BVT, MQT :: KPV, CQP. Mais les triangles BVT, MQT ſont entr'eux comme les quarrés $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$ de leurs côtés homologues, & les triangles KPV, CQP ſont entr'eux comme $\overline{VP}^2$, $\overline{QP}^2$; donc $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$ :: $\overline{VP}^2$, $\overline{QP}^2$, & partant VT, QT :: VP, QP ou QT, QP :: VT, VP; mais à cauſe des paralelles MR, ZP, BV, la droite TS eſt diviſée en même raiſon que la droite VT; donc TR, RN :: TS, SN, & on démontreroit la même choſe quand même TB ſeroit un diamétre.

671. *Remarque.* De cette propoſition on peut en tirer les ſuivantes. 1°. *L'axe* AB (Fig. 410.) *une tangente* TP *& l'ordonnée* PR *étant données; ſi par le point* T *on mene* MN *paralelle à* PR *& deux ſecantes* TV, TZ *également éloignées de l'axe, je dis que les droites* QZ, XV *qui paſſent par les points où les ſe-*

cantes

cantes coupent la courbe, passeront par le point R. 2°. *Posant toujours les mêmes choses, si d'un point quelconque* M *pris sur* MN *on mene une droite* MV *qui coupe la courbe en* X *&* V *& qui passe par le point* R, *cette ligne sera coupée harmoniquement aux points* X, R, V. 3°. *Posant toujours les mêmes choses, si d'un point quelconque* P (Fig. 411.) *pris sur* MN *on mene deux tangentes* PV, PX, *à la courbe, ainsi qu'il sera enseigné plus bas, la ligne* XV *menée par les points d'attouchement passera par le point* R. 4°. *Posant toujours les mêmes choses, si l'on prolonge* RP *en* H (Fig. 412.) *& que d'un point quelconque* H *pris sur* PH *on mene deux tangentes* HQ, HZ *à la courbe, la droite* ZQ *menée par les points d'attouchement passera par le point* T. Ces propositions se démontrent de la même façon que nous les avons démontrées à l'égard du cercle (*N.* 300. 302. 303. &c.) & si l'on se donne la peine de relire ce que nous avons dit dans le Chapitre du Cercle touchant la ligne divisée harmoniquement, on en déduira sans peine d'autres proprietés de la parabole.

672. PROPOSITION CXXXIII. *Deux diamètres* PB, MV (Fig. 413.) *étant donnés avec leurs tangentes* PT, MD, *si l'on mene une ordonnée* CA *à l'un des diamètres, & qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre en* E *la tangente* DM *de l'autre diamètre, le rectangle* CE × EA *de la toute* CE *par l'ajoutée* EA *est au quarré* $\overline{EM}^2$ *de la partie* EM *de la tangente* DM *qu'elle coupe comme le quarré* $\overline{PO}^2$ *de la tangente du diamètre* PB *est au quarré* $\overline{OM}^2$ *de la tangente de l'autre diamètre.*

Du point A je mene LX paralelle à la tangente, & par conséquent en suivant le raisonnement que nous avons fait ci-dessus (*N.* 669.) j'ai EC × EA, EDLA :: $\overline{PO}^2$, POD; or à cause des droites XL, AN paralelles aux tangentes, nous avons NAX = MDLX; donc en retranchant la partie commune MEAX, nous aurons ENM = EDLA, mais nous avons aussi POD = MOT (*N.* 664.) mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC × EA. ENM :: $\overline{PO}^2$, MOT, ou EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: ENM. MOT; & au lieu de ces deux derniers triangles qui sont semblables, mettant les quarrés $\overline{EM}^2$, $\overline{OM}^2$ de leurs côtés homologues, nous aurons EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: $\overline{EM}^2$. $\overline{OM}^2$, ou EC × EA. $\overline{EM}^2$ :: $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Si la droite CA (*Fig.* 414.) coupe la parabole à un point A hors de l'arc parabolique PM compris entre les diamétres, je mene AL paralelle à la tangente DM, & du point Q où cette paralelle coupe la parabole, je mene QN paralelle à l'autre tangente. Ainsi j'ai toujours EC × EA. EDLA :: $\overline{PO}^2$. POD ; or les triangles semblables AVX, NQX étant égaux à cause de l'ordonnée AQ divisée en deux également par son diamétre MV, & le triangle NQX étant égal au paralellogramme MDLX, nous avons AVX = MDLX ; & ajoutant de part & d'autre la partie commune MXAE, nous aurons MVE = EDLA ; mais POD = MOT ; mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC × EA. MVE. $\overline{PO}^2$. MOT, ou EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: MVE. MOT, & mettant les quarrés des côtés homologues de ces deux derniers triangles, nous aurons EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: $\overline{ME}^2$. $\overline{OM}^2$, ou EC × EA. $\overline{ME}^2$. $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Nota. Ce seroit la même chose si l'un des diamétres étoit l'axe.

673. Definition. La portion ABC (*Fig.* 415.) d'une parabole coupée par une droite AC se nomme *segment de parabole*, la droite AC en est la *corde* ou la *base*. Tout triangle AEC, ABC, &c. qui a pour base la base AC du segment, & dont le sommet est sur l'arc parabolique ABC se nomme triangle *inscrit*, & celui dont le sommet est au sommet B du diamétre BR de la base est le *plus grand*; car si à ce même point B on mene la tangente MN qui sera paralelle à l'ordonnée ou base AC, & qu'entre ces deux paralelles on mene la perpendiculaire BR, il est aisé de voir que le point B est de tous les points de l'arc ABC celui qui est le plus éloigné de la base, & que par conséquent tous les triangles inscrits ayant même base, ceux qui n'auront pas le sommet en B seront moindres que le triangle ABC, à cause qu'ils auront moins de hauteur ou moins de distance du sommet à la base.

674. Proposition CXXXIV. *Deux segmens* APC, BME (Fig. 415, 416, 415.) *d'une même parabole* ACE *étant donnés, si les parties* PR, MV *des diamétres de leurs bases comprises dans ces segmens sont égales, les plus grands triangles inscrits dans ces mêmes segmens sont égaux.*

Il peut arriver que les bases AC, BE des segmens se coupent dans la parabole (*Fig.* 415.) ou qu'elles se coupent en dehors en X (*Fig.* 416.) ou qu'elles se coupent à un point de la courbe (*Fig.* 417.)

Si les bases se coupent en dedans (*Fig.* 415.) je mene les droites AP, EM, ce qui donne les moitiés APR, EMV des plus grands triangles inscrits à cause de AR=RC & de EV=VP; ainsi ce que nous dirons des triangles APR, EMV, se dira des plus grands triangles inscrits. Des sommets P, M des diamétres je mene les tangentes PO, MO & la droite PM; je mene aussi par les extrémités & les milieux des bases, les droites BC, AE, RV, & cette derniere est paralelle à PM à cause des paralelles égales PR, MV; enfin par le point O où les tangentes se coupent & par le milieu de la ligne PM qui joint leurs points d'attouchement, je mene la droite OL, laquelle est un diamétre (*N.* 662.) & par conséquent cette droite est paralelle aux deux diamétres & coupe aussi en deux également la droite RV paralelle à PM. Or les triangles semblables POM, RXV ayant les bases PM, RV égales sont égaux, & partant RX = PO, VX = MO, $\overline{RX}^2 = \overline{PO}^2$ & $\overline{VX}^2 = \overline{MO}^2$, d'où il suit que $\overline{RX}^2 . \overline{VX}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$; mais à cause que les bases AC, BE des segmens se coupent en X, nous avons $CX \times AX . BX \times XE :: \overline{PO}^2 \; \overline{MO}^2$ (*N.* 668.) ou $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 . \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$, à cause des bases AC, BM divisées en deux également en R & V, & en deux inégalement en X; donc $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 :: \overline{RX}^2 . \overline{VX}^2$, ou $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 . \overline{XV}^2$, & composant $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 + \overline{XR}^2 . \overline{XR}^2 . \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 + \overline{XV}^2 . \overline{XV}^2$, ce qui se réduit à $\overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$; d'où l'on tire CR. XR :: BV. XV, ce qui rend paralelles les lignes RV, BC; or CR = AR & BV = VE; donc AR. XR :: VE. VX, & par conséquent les lignes AE, RV sont paralelles; ainsi les quatre lignes BC, PM, RV, AE sont paralelles entr'elles & coupées en deux également par le diamétre OL, ce qui fait que le paralellogramme PMVR, le trapezoïde RVEA & le trapezoïde PMEA sont tous divisés en deux également par le même diamétre; retranchant donc de ce dernier trapezoïde, d'une part le paralellogramme PSIR,

& le trapezoïde RILA, & de l'autre le paralellogramme MSIV = PSIR, & le trapezoïde VILE = RILA ; il reftera PAR = MVE, & par conféquent les doubles de ces triangles, c'eft-à-dire les plus grands triangles infcrits dans les fegmens APC, BME font égaux.

Si les bafes AC, EB des fegmens fe coupent en dehors en X (*Fig.* 416.) ; je mene les droites CB, PM, RV, AE, & la droite OL par le milieu S de PM, & par conféquent la droite OL étant un diamétre (*N.* 662.) eft paralelle aux deux autres diamétres, & coupe auffi en deux également la ligne RV égale & paralelle à PM, à caufe des paralelles égales PR, MV. De plus les triangles femblables POM, RXV ayant leurs bafes PM, RV égales font égaux, & RX = PO, VX = OM, $\overline{RX}^2 = \overline{PO}^2$, $\overline{XV}^2 = \overline{OM}^2$; d'où je tire $\overline{RX}^2 . \overline{XV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{OM}^2$; or, les fecantes AX, XE, donnent $AX \times XC . EX \times XB :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$ (*N.* 669.), ou $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$, à caufe des lignes AC, BE divifées également en R, V, & des ajoutées CX, BX; donc $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 :: \overline{RX}^2 . \overline{XV}^2$, ou $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, & retranchant de chaque conféquent fon antécedent, puis comparant le refte au conféquent, nous aurons $\overline{XR}^2 - \overline{XR}^2 + \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2 - \overline{XV}^2 + \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, ce qui fe réduit à $\overline{XR}^2 . \overline{CR}^2 :: \overline{XV}^2 . \overline{BV}^2$; donc XR. CR :: XV. BV, & par conféquent les lignes CB, RV font paralelles. Or, RC = AR, & VB = EV; donc XR. AR. XV. VE, ce qui rend auffi les droites RV, AE paralelles ; ainfi les quatre lignes CB, PM, RV, AE font paralelles & divifées chacune en deux également par le diamétre OL, d'où il fuit que le paralellogramme PMVR, le trapezoïde RVAE, & le trapezoïde PMAE font auffi divifés chacun en deux également par le même diamétre. Retranchant donc de ce dernier d'une part PSIR, & RILA, & de l'autre SMVI = PSIR, & VILE = RILA, il reftera PAR = MVE.

Enfin, fi les bafes AC, BE des fegmens fe coupent à un point de la courbe (*Fig.* 417.), je mene les droites PM, RV, AE lefquelles font paralelles entr'elles, car PM eft paralelle à RV, & à caufe de CR. CA :: BV. BE, la droite RV eft paralelle à AE; menant donc le diamétre OS, & achevant le refte, comme ci-deffus, on trouvera APR = MVE.

675. PROBLEME. *Une parabole* ABC (Fig. 418.) *étant donnée, trouver son axe, son paramétre & son foyer.*

Je mene plusieurs lignes paralelles AN, QD, &c. qui se terminent de part & d'autre à la courbe; je les divise chacun en deux également en R, S, &c. & par les points de division, je fais passer une ligne droite SH, laquelle sera le diamétre des paralelles; ainsi si ce diamétre est perpendiculaire sur ses ordonnées, il sera l'axe cherchée; mais si cela n'est pas, du point H où ce diamétre coupe la courbe, je mene HG perpendiculaire sur HS, & coupant HG en deux également en X; j'éleve la perpendiculaire XB, qui est l'axe demandé; car HG doit avoir un diamétre qui la coupe en deux également, & ce diamétre doit être paralelle au diamétre HS; or, nulle autre ligne que XB ne peut avoir ces conditions. Donc, &c.

L'axe étant trouvé, je mene en H la droite HT paralelle aux ordonnées RN, SD, &c. du diamétre HS, & par conséquent HT sera tangente en H; du point H, je mene HZ perpendiculaire sur HT, & la souperpendiculaire XZ est égale à la moitié du paramétre (*N. 643.*); donc le double de cette droite est le paramétre de l'axe, & prenant le quart de ce paramétre, & le portant de B en O, le point O est le foyer.

Ou bien je fais en H avec la tangente TH, l'angle THO égal à l'angle EHS que cette tangente fait avec le diamétre HS, & le point O où la droite HO coupe l'axe, est le foyer (*N. 661.*), & par conséquent BO est le quart du paramétre.

Ou bien encore par le sommet B de l'axe, je mene la droite BL perpendiculaire à l'axe; je divise l'angle droit XBL en deux également par la ligne BV, & du point V où cette ligne coupe la parabole, je mene l'ordonnée VM, laquelle est égale au paramétre, car l'angle XBL étant droit, sa moitié XBV est de 45 degrés; donc dans le triangle rectangle BMV, l'autre angle aigu BVM est aussi de 45 degrés, & par conséquent ce triangle est isoscele & MV = BM; d'où il suit que $\overline{MV}^2 = \overline{MB}^2 = MB \times MB$; mais en nommant p le paramétre; nous avons par la proprieté de la parabole $\overline{MV}^2 = MB \times p$; donc $MB \times p = MB \times MB$, & partant en divisant par MB, nous aurons $p = MB$.

Ou bien enfin, je cherche une troisiéme proportionnelle à une abscisse quelconque BX, & à son ordonnée XG, & cette troisié-

me proportionnelle que je nomme p sera le paramétre, car à cause de :: BX. XG. p, nous aurons $\overline{XG}^2 = BX \times p$.

676. *Definition.* Une parabole ABC terminée par une base AC (*Fig.* 419.) étant donnée, si par le sommet B, on mene la tangente MN, & par les extrémités A, C de sa base, les droites AM, CN perpendiculaires sur MN, le rectangle AMNC se nomme *Rectangle circonscrit*; la figure mixtiligne AFBECNM est le *Complement* de la parabole, & la figure mixtiligne BECN est le *Complement* de la demi-parabole.

677. Probleme. *Mesurer une parabole* ABC (Fig. 419.), *terminée par une base ou double ordonnée* AC.

Je décris le rectangle circonscrit AMNC, & les deux tiers de ce rectangle sont la valeur de la parabole, ce que je démontre ainsi.

Je conçois que BN soit divisé en une infinité de parties égales BH, HL, &c. & que des points de division soient menées à la courbe des droites HR, LV, &c. lesquelles seront les élemens du demi-complement BVCN; des points R, V, &c. je mene les ordonnées SR, TV, &c. ainsi les élemens HR, LV, &c. du demi-complement seront égaux aux abscisses BS, BT, &c. & les distances BH, BL, &c. des droites HR, LV, &c. au sommet B du demi-complement seront égales aux ordonnées SR, TV, &c. mais par la proprieté de la parabole, les abscisses BS, BT, &c. sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées SR, TV, &c. donc les élemens HR, SV, &c. seront entr'eux comme les quarrés de leurs distances BH, BL, &c. au sommet B.

Or, selon ce que nous avons démontré (*N.* 499.), si l'on coupe une pyramide par une infinité de plans paralelles à sa base, lesquels seront les élemens de cette pyramide, ces plans sont entr'eux comme les quarrés de leurs distances au sommet de la pyramide; donc les élemens du demi-complement BVCN sont entr'eux comme les plans élementaires d'une pyramide. Mais la somme des plans élementaires d'une pyramide est égale à la base multipliée par le tiers de sa distance au sommet (*N.* 504.); donc la somme des élemens du demi-complement BVCN est égale à la base ou plus grand élement NC multiplié par le tiers de sa distance NB au sommet B. Or, NC multiplié par NB est le rectangle BDCN, & NC×⅓NB en est le tiers; donc la somme des élemens du demi-complement, c'est-à-dire le demi-complement

lui-même est égal au tiers du rectangle BDCN; or, si de ce rectangle nous retranchons le demi-complement, le reste est la demi-parabole DBNC; donc cette demi-parabole est égale aux deux tiers du rectangle BDCN, & comme on démontrera de la même façon que l'autre demi-parabole est égale aux deux tiers du rectangle BDAM; il s'ensuit que la parabole entiere ABC est égale aux deux tiers du rectangle circonscrit AMNC.

678. Corollaire I[er]. Si le rectangle circonscrit est un, la parabole sera $\frac{2}{3}$, & le triangle ABC sera $\frac{1}{2}$, à cause qu'il est la moitié; ainsi en réduisant tout en même dénomination, ces trois Figures seront entr'elles comme $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, ou comme 6, 4, 3. or, en retranchant de la parabole le triangle ABC, le reste est la valeur des deux segmens AFBX, BVCZ pris ensemble; donc le rectangle circonscrit, la parabole, le triangle inscrit, & la somme des deux segmens sont entr'eux comme 6. 4. 3. 1, & par conséquent la somme des deux segmens est le $\frac{1}{6}$ du rectangle le $\frac{1}{4}$ de la parabole, & le $\frac{4}{3}$ du triangle; d'où il suit que le segment BVCZ est aussi le $\frac{1}{6}$ du rectangle BNCD, le $\frac{1}{4}$ de la demi-parabole BDC, & le $\frac{1}{3}$ du triangle BDC.

679. Corollaire II. *Un segment* ABC (Fig. 420.) *de parabole dont le diamétre* BP *est incliné sur la base* AC *est aussi les deux tiers du paralellogramme circonscrit, c'est-à-dire du paralellogramme* AMNC, *dont les côtés* AM, NC *sont paralelles & égaux au diamétre* BP. Car menant les élemens HQ, LV, &c. du demi-complement BNCV paralelles à la base NC de ce demi-complement, & les ordonnées QS, TV, &c. les élemens HQ, LT, &c. seront égaux aux abscisses BS, BT, &c. & les parties BH, BL, &c. que les élemens coupent sur BN seront égales aux ordonnées QS, VT, &c. donc les élemens HQ, LV, seront entr'eux comme les quarrés des parties BH, BL, &c. qu'ils coupent; or, si du sommet B j'abaisse la perpendiculaire BK sur la base CN prolongée, les élemens étant prolongés couperont cette perpendiculaire en E, O, &c. en même raison qu'ils coupent la droite BN en H, L, &c. & par conséquent les distances BE, BO, &c. des élemens au sommet, seront entr'elles comme les droites BH, BL, &c. que ces élemens coupent; donc les quarrés de BE, BO, &c. seront aussi en même raison que les quarrés de BH, BL, &c. ainsi les élemens HQ, LV, &c. seront entr'eux comme les quarrés de leurs distances BE, BO, &c. au sommet B, & partant ils seront le tiers du plus grand élement NC mul-

tiplié par sa distance BK, au sommet B, ainsi qu'il a été démontré ci-dessus (*N. 677.*); or, le rectangle CN × BK est égal au paralellogramme PBNC de même base & de même hauteur, donc la somme des élemens HQ, LV, &c. c'est-à-dire le demi-complement BNCV est le tiers du paralellogramme PBNC, & par conséquent le demi-segment PBC est les deux tiers de ce paralellogramme; d'où il est aisé de voir que le segment entier ABC est les deux tiers du paralellogramme AMNC.

680. COROLLAIRE III. *Si deux segmens* ABC, DEF (Fig. 421.) *d'une même parabole ont les portions* BP, RE *de leurs diamétres comprises dans ces segmens, égales entr'elles, ces segmens sont égaux.* Les plus grands triangles ABC, DEF inscrits dans ces segmens sont égaux (*N. 674.*); donc les paralellogrammes circonscrits sont égaux, puisqu'ils sont doubles des triangles; or, les segmens sont les deux tiers de leurs paralellogrammes (*N. 679.*); donc ils sont égaux.

681. PROBLEME. *Une parabole* VHAS (Fig. 422.) *étant donnée avec son axe* AX, *mener deux tangentes* PS, PV *d'un point* P *qui n'est pas sur l'axe.*

Du point P, je mene un diamétre PHR, qui coupe la parabole en H; je mene en H la tangente HT, je prens l'abscisse HR égale à PH, & par le point R, menant au diamétre PR l'ordonnée VS qui coupe la parabole en V & S, je mene de ces points les droites SP, V, qui sont les tangentes demandées. Car à cause que la droite SP est menée de l'extrémité S de l'ordonnée RS, & que la droite PR est divisée en deux également en H; il est clair que PR est soutangente, & que PS est tangente, & par la même raison PV est aussi tangente.

682. COROLLAIRE I[er]. *D'un point extérieur* P, *on ne peut mener que deux tangentes à la parabole.* Ce qui est évident, car une autre ligne qu'on voudroit mener du point P passeroit ou entre les deux points V, S d'attouchement ou en dehors; ainsi dans le premier cas elle couperoit la parabole; & dans le second, elle seroit toute entiere hors de la courbe, & ne la toucheroit pas.

683. COROLLAIRE II. *Les deux tangentes* PS, PV *qu'on peut mener à la parabole d'un point extérieur* P *qui n'est pas sur l'axe, sont nécessairement inégales.*

Du point H, je mene l'ordonnée HM à l'axe. Le triangle XHR étant rectangle en H, l'angle HRX est aigu, & son angle de suite HRV est obtus. Or, les deux triangles PRS, PRV ont le

le côté PR commun, le côté RS égal au côté RV; mais l'angle compris PRS est moindre que l'angle compris PRV; donc la base PS est moindre que la base PV.

684. COROLLAIRE III. *Au contraire les deux tangentes* TH, TL *qu'on peut mener d'un point* T *pris sur l'axe, sont égales.* Car prenant l'abscisse AM égale à TA, & menant la double ordonnée HL, les deux tangentes passeront par les points H, L, & à cause que les triangles rectangles TMH, TML, ont le côté TM commun, & le côté HM égal au côté ML; il est clair que le troisiéme TH est égal au troisiéme TL.

685. *DEFINITION.* Deux paraboles ABC, *abc* (*Fig.* 423.) qui ont des paramétres BR, *br* différens, & qui sont terminées par des bases AC, *ac*, sont dites *Semblables*, lorsqu'une figure quelconque AMBNC étant inscrite dans l'une, on peut en inscrire une semblable *ambnc* dans l'autre.

686. PROBLEME. *Une parabole* ABC (Fig. 423.) *étant donnée, décrire avec un autre paramétre* br, *une autre parabole* abc *semblable à la parabole donnée.*

Je décris une parabole dont la distance de la directrice au foyer soit égale à la moitié du paramétre *br*; cette parabole étant décrite, supposons que la ligne des abscisses soit la droite indéfinie *bx*; je prens une quatriéme proportionnelle au paramétre BR de la parabole donnée à sa hauteur PB, & au paramétre *br*, & portant cette quatriéme proportionnelle sur *bx*, de *b* en *p*; je mene par le point *p* la base *ac*; & je dis que la parabole *abc* terminée par la double ordonnée ou base *ac*, est semblable à la parabole donnée ABC, terminée par la double ordonnée ou base AC.

Car soient menées dans la parabole ABC, la double ordonnée MN & les cordes MB, MA, BN, NC, je divise la hauteur *bp* en *t* en même raison que la hauteur BP est divisée en T, & menant par le point *t* la double ordonnée *mn*, & ensuite les cordes *mb*, *ma*, *nb*, *nc*, la figure inscrite *ambnc* est semblable à la figure inscrite AMBNC, & par conséquent les deux paraboles sont semblables; ce que je prouve ainsi.

Par la proprieté de la parabole, nous avons $\overline{TN}^2 = TB \times BR$; donc $::$ TB. TN. BR, & partant $\overline{TB}^2 . \overline{TN}^2 :: TB . BR$ (*N.* 393.); de même dans la parabole *abc*, nous trouverons $\overline{tb}^2 . \overline{tn}^2 :: tb . br$;

mais nous avons fait TB. *tb* :: BP. *bp*. & BP. *bp* :: BR. *br*; donc TB. *tb* :: BR. *br*, ou TB. BR :: *tb*. *br*, & par conſéquent $\overline{TB}^2$. $\overline{TN}^2$ :: $\overline{tb}^2$. $\overline{tn}^2$; d'où l'on tire TB. TN :: *tb*. *tn*. Ainſi les deux triangles rectangles BTN, *btn* ſont ſemblables, & partant le triangle entier MBN eſt ſemblable au triangle entier *mbn*.

Je mene les droites TC, TA, *tc*, *ta*, & je prouverai aiſément comme ci-deſſus que PC. PT :: *pc*. *pt*, & que par conſéquent le triangle TPC eſt ſembable au triangle *tpc*, ce qui rend auſſi ſemblables les triangles ATC, *atc*; enfin comme à cauſe des triangles ſemblables TPC, *tpc*, nous avons TC. *tc* :: TP. *tp*, & que TP. *tp* :: BT. *bt*, nous aurons TC. *tc* :: BT. *bt*; mais nous avons trouvé BT. *bt* :: TN. *tn*; donc TC. *tc* :: TN. *tn*; or à cauſe des angles droits PTN, *ptn*, & des angles égaux PTC, *ptc*, les angles CTN, *ctn* ſont auſſi égaux; donc les deux triangles CTN, *ctn* ſont ſemblables, puiſque les côtés TC, *tc* & TN, *tn* qui comprennent les mêmes angles ſont proportionnels; & de-là il ſuit que les deux autres triangles MTA, *mta* ſont auſſi ſemblables. Ainſi les figures inſcrites AMBNC, *ambnc* étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblable chacun à chacun, ſont ſemblables entr'elles.

687. Corollaire. *Les paraboles ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs baſes ou de leurs côtés homologues.* Nous avons trouvé PC. *pc* :: PT, *pt*; & à cauſe que nous avons fait PT. TB :: *pt*. *tb*, nous aurons en compoſant PT. PB :: *pt*. *pb*, ou PT. *pt* :: PB. *pb*. Donc PC. *pc* :: PB. *pb*; or la demi-parabole BPC eſt les deux tiers du rectangle PC × PB, & la demi-parabole *bpc* eſt les deux tiers du rectangle *pc* × *pb*, & ces deux rectangles ayant les côtés proportionnels, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc les deux demi-paraboles, & par conſéquent les deux paraboles ſont comme les quarrés de leurs côtés homologues,

688. Corollaire II. *Toutes les paraboles peuvent être ſemblables.* Car il n'y a qu'à prendre les Abſciſſes BP, *bp* en même raiſou que les paramétres BR, *br*, & mener par les points P*p* les baſes AC, *ac*.

De l'Ellipſe conſideréé ſur un Plan hors du Cône.

689. Probleme. *Conſtruire une Ellipſe.*

Je prens deux lignes droites AB, CD (*Fig.* 424.) inégales entr'elles, je leur fais faire un angle droit ensorte qu'elles se coupent l'une & l'autre en deux parties égales au point O. De ce point pris pour centre & d'un rayon égal à la moitié OA de la plus grande des deux lignes, je décris un cercle AEBH; je prolonge CD de part & d'autre jusqu'à la circonference du cercle en H & E, & divisant AB en plusieurs parties égales, j'éleve des perpendiculaires *n*N, *t*T, & qui se terminent de part & d'autre à la circonference. Cela fait, je commence par le demi cercle AEB, & je cherche une quatriéme proportionnelle au rayon OE à la droite OD & à la perpendiculaire MN; cette quatriéme proportionnelle étant trouvée, je le porte sur MN de M en R. Je cherche de même une quatriéme proportionnelle SV aux deux OE, OD & à la perpendiculaire ST; je continue ainsi à chercher des quatriémes proportionnelles toujours aux deux lignes OE, OD & à quelqu'une des perpendiculaires du demi-cercle AED, & je fais passer une courbe ARVDPB par les extrémités des quatriémes proportionnelles. Je fais la même chose à l'égard du demi-cercle AHB, ce qui me donne une courbe ADBC dont la ligne AB est un axe à cause qu'elle coupe en deux également toutes les droites *r*R, *u*V sur lesquelles elle est perpendiculaire, & la ligne CD est l'autre axe, parce qu'elle coupe aussi en deux également toutes les lignes paralelles à AB qui se terminent de part & d'autre à la courbe, comme nous démontrerons plus bas. Il ne reste donc qu'à faire voir que cette courbe est une Ellipse, c'est ce que je démontre.

Par la construction nous avons OE. OD :: MN. MR. & OE. OD :: ST. SV; donc MN. MR :: ST. SV, ou MN. ST :: MR. SV, c'est-à-dire les ordonnées MR. SV, &c. de la courbe ADBC sont entr'elles comme les ordonnées MN. ST, &c. du demi-cercle AEB, & par conséquent en élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 :: \overline{MN}^2 . \overline{ST}^2$. mais par la proprieté du cercle $\overline{MN}^2 = AM \times MB$ & $\overline{ST}^2 = AS \times SB$; donc $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 :: AM \times MB . AS \times SB$, c'est-à-dire les quarrés des ordonnés MR, SV &c. de la courbe ADBC sont entr'eux comme les rectangles AM × MB, AS × SB, &c. des parties de l'axe AB qu'elles coupent, & par conséquent cette courbe est une Ellipse (*N.* 632.)

690. COROLLAIRE I[er]: *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *au grand axe* AB *est au rectangle* AM × MR *des parties de l'axe*

qu'elle coupe, comme le quarré du petit axe CD *est au quarré du grand axe* AB. Les droites MR, OD étant ordonnées au grand axe, nous avons $\overline{MR}^2$. $\overline{OD}^2$ :: AM × MB. AO × OB (*N. 689.*) ou $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{OD}^2$. AO × OB; mais à cause de AO = OB, nous avons AO × OB = $\overline{AO}^2$; donc $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{OD}^2$. $\overline{AO}^2$; or OD étant le demi petit axe, & AO le demi grand axe, les quarrés $\overline{OD}^2$, $\overline{AO}^2$ de ces moitiés sont entr'eux comme les quarrés de leur tous CD, AO; donc le quarré de l'ordonnée MR est au rectangle AM × MB, comme le quarré du petit axe CD est au quarré du grand axe AB.

691. *Definition.* Si l'on prend une troisiéme proportionnelle au grand axe AB & au petit axe CD, cette troisiéme proportionnelle se nommera *Paramétre* du grand axe, & si l'on prend une troisiéme proportionnelle au petit axe CD & au grand axe AB, cette troisiéme proportionnelle se nommera *Paramétre* du petit a e.

692. Corollaire II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *au grand axe, est au rectangle* AM × MB *des parties de l'axe qu'elle coupe, comme le paramétre du grand axe* AB *est à cet axe.* Je nomme p le paramétre du grand axe, & j'ai :: AB. CD. p (*N. 691.*) donc $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$ :: AB. p, ou $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: p. AB. Or j'ai $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ (*N. 690.*) donc $\overline{MR}^2$. AM × MB :: p. AB.

693. Corollaire III. *Si sur l'une des extrémités* A *du grand axe* AB (Fig. 425.) *on éleve une perpendiculaire* AX *égale au paramétre de cet axe, & que de l'extrémite* X *de cette perpendiculaire l'on mene une droite* XB *à l'autre extrémité* B *du grand axe, laquelle coupera toutes les ordonnées les unes en dehors de l'Ellipse, & les autres en dedans, je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque* MR *est égal au rectangle de l'Abscisse* AM *par* MV, *c'est-à-dire par la ligne* MV *perpendiculaire sur le grand axe au point* M, *& comprise entre le grand axe & la droite* XB. Nous avons $\overline{MR}^2$. AM × MB :: AX. AB. (*N. 692.*) & à cause des triangles semblables VMB, XAB, nous avons VM. MB :: AX. AB, & multipliant les deux premiers termes de cette proportion par la même grandeur AM; nous aurons VM × AM. AM × MB :: AX. AB; donc VM × AM. AM × MB :: $\overline{MR}^2$. AM × MB; or les deux conséquens

de cette proportion sont égaux; donc $VM \times AM = \overline{MR}^2$.

694. *Remarque*. Dans la parabole, le quarré d'une ordonnée est toujours égal au rectangle de son Abscisse par le paramétre; dans l'Ellipse le quaré de l'ordonnée au grand axe est toujours égal au rectangle de son Abscisse AM par une ligne MV moindre que le paramétre de cet axe, & dans l'hyperbole nous démontrerons dans la suite que le quarré d'une ordonnée à un axe est plus grand que le rectangle de l'Abscisse par le paramétre de cet axe. Or c'est de-là que le nom de Parabole, d'Ellipse & d'Hyperbole sont venus; car Parabole en Grec signifie *Egalité*, Ellipse signifie *Défaut*, & Hyperbole *Excès*.

695. Corollaire IV. *Les ordonnées* SV, XP (Fig. 424.) *au grand axe* AB, *également éloignées du centre* O *sont égales*. Par la génération de l'Ellipse nous avons SV. XP :: ST. XZ. (*N.* 689.) or dans le cercle AEBH les cordes *t*T, *z*Z également éloignées du centre O sont égales; donc leurs moitiés ST, XZ. sont aussi égales, & par conséquent SV = XP.

696. Corollaire V. *Toutes les lignes comme* RZ (Fig. 426.) *qui passent par le centre* O *d'une Ellipse, & qui se terminent de part & d'autre à la courbe, sont coupées en deux également au centre* O. De l'un des points R où la droite RZ coupe la courbe, je mene l'ordonnée RM; je prens sur l'axe la partie OX = OM, & du point X je mene la droite XZ paralelle à MR, sans m'embarrasser si le point Z où elle coupe RZ est sur la courbe, ou s'il n'y est pas. Les triangles semblables MOR, XOZ ayant le côté MO égal au côté OX sont parfaitement égaux, & partant RO=OZ & MR=ZX; or MR, ZX sont également éloignées du centre; donc puisque MR est une ordonnée au grand axe, la droite ZX doit être aussi ordonnée au même axe (*N.* 695.) & partant le point Z où elle coupe ZR est sur l'Ellipse, & ZR est coupée en deux également en O.

697. Corollaire VI. *Toute ligne comme* RP. (Fig. 427.) *paralelle au grand axe* AB, *& qui se termine de part & d'autre à la courbe, est coupée en deux également en* T *par le petit axe* CD. Des points R, P où RP coupe la courbe, je mene les ordonnées MR, PX, lesquelles étant paralelles entre les paralelles MX, RP sont par conséquent égales entr'elles; ainsi leurs distances MO, OX au centre O sont égales (*N.* 695.) mais à cause des paralelles MR, OD, XP, les paralelles MO, RT sont égales de

même que les paralelles OX, TP; donc à cause de $MO = OX$, nous aurons $RT = TP$.

698. Corollaire VII. *Le quarré d'une ordonnée* RT *au petit axe* CD *est au rectangle des parties* CT, TD *de cet axe qu'elle coupe, comme le quarré du grand axe* AB *est au quarré du petit axe* CD. Du point R je mene l'ordonnée RM au grand axe, & j'ai $\overline{MR}^2$. $AM \times MB :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$. (*N. 690.*) mais à cause que AB est divisé également en O & inégalement en M, nous avons $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, ou $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$ à cause de $MO = RT$, & de même à cause de $MR = OT$, nous avons $\overline{MR}^2 = \overline{OT}^2$; mettant donc dans notre proportion les valeurs de $\overline{MR}^2$ & $AM \times MB$, nous aurons $\overline{OT}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$, ou $\overline{OD}^2 . \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$, & par conséquent $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 + \overline{RT}^2$, ce qui se réduit à $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{RT}^2$, ou $\overline{RT}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$, & comme à cause de l'axe CD divisé également en O & inégalement en T, nous avons $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 = CT \times TD$, nous aurons enfin $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{AO}^2 . \overline{CO}^2$, c'est-à-dire le quarré de l'ordonnée RT au petit axe, est au rectangle $CT \times TD$ comme le quarré du demi grand axe au quarré du demi petit axe, ou comme le quarré du grand axe au quarré du petit.

699. Corollaire VIII. *Donc les quarrés des ordonnées au petit axe sont entr'eux comme les rectangles des parties de cet axe qu'ils coupent.* Soient les deux ordonnées RT, EF, nous aurons donc $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$ & $\overline{EF}^2 . CF \times FD :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$; donc $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{EF}^2 . CF \times FD$, ou $\overline{RT}^2 . \overline{EF}^2 :: CT \times TD . CF \times FD$.

700. Corollaire IX. Donc le quarré d'une ordonnée RT au petit axe est au rectangle correspondant $CT \times TD$ comme le paramétre du petit axe est au petit axe. Ce qui se démontre comme nous avons fait à l'égard du grand axe (*N. 692.*)

701. Corollaire X. *Si sur l'une des extrêmités* D *du petit axe* (Fig. 428.) *on éleve une perpendiculaire* DX *égale à son paramétre, & que du point* X *on mene à l'autre extrêmité* C *la droite* CX, *le quarré d'une ordonnée quelconque* TP *au petit axe est égal au produit de l'abscisse*

TD *par* TH. Ce qui se démontre de même qu'à l'égard du grand axe (*N. 693.*)

702. COROLLAIRE XI. *Si l'on décrit un cercle* CXD (Fig. 429.) *autour du petit axe* CD, *ce cercle sera tout entier dans l'Ellipse.* Car menant au petit axe l'ordonnée RT qui coupe le cercle en X, nous aurons $\overline{RT}^2$. CT×TD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$. Or par la proprieté du cercle CT×TD = $\overline{XT}^2$; donc $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$; mais $\overline{AO}^2$ est plus grand que $\overline{OD}^2$; donc $\overline{RT}^2$ est aussi plus grand que $\overline{XT}^2$; ainsi le point X du cercle est dans l'Ellipse, & comme cela arrivera à l'égard de toutes les ordonnées de l'ellipse & du cercle CXD, il s'ensuit que ce cercle est inscrit dans l'ellipse.

703. COROLLAIRE XII. *L'Ellipse est moyenne proportionnelle entre le cercle circonscrit* AEBH, *& le cercle inscrit* CXD (*Fig.* 429.) Par la nature de l'ellipse toute ordonnée MS du cercle circonscrit AEBH est à l'ordonnée correspondante MN de l'ellipse comme le rayon OE ou la moitié OA du grand axe est à la moitié du petit axe; d'où il suit que la somme des ordonnées du cercle circonscrit où le cercle circonscrit est à la somme des ordonnées de l'ellipse ou à l'ellipse, comme la moitié du grand axe est à la moitié du petit axe, ou comme le grand axe au petit; ainsi nous avons AEBH. ADBC :: AB. CD. Or comme nous avons $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$ (*N. 699.*) ce qui donne RT. XT :: AO. OD, il est clair que la somme des ordonnées au petit axe de l'ellipse, c'est-à-dire l'ellipse est à la même somme des ordonnées du cercle inscrit, c'est-à-dire au cercle inscrit, comme AO est à OD, ou comme AB. CD, & par conséquent nous avons ADBC. CXDV :: AB. CD; mais nous venons de trouver AEBH. ADBC :: AB. CD; donc AEBH. ADBC :: ADBC. CXDV.

704. COROLLAIRE XIII. *Les ordonnées* MR, SV, &c. (*Fig.* 430.) *d'un quart d'Ellipse* AOD, *vont en diminuant à mesure qu'elles s'approchent du sommet* A *du grand axe*; *& si des ordonnées* MN, ST, &c. *du quart de cercle circonscrit* AOE *on retranche les ordonnées* MN, SV, &c. *les restes* RN, VT, &c. *iront aussi en diminuant en approchant de* A, *& seront entr'eux comme les ordonnées* MR, SV, &c. Par la nature de l'ellipse nous avons MR. SV :: MN. ST; mais dans le cercle AEBH, la corde *n*N étant plus éloignée du centre O que la corde *t*T est moindre que *t*T; donc sa moitié

MN est aussi moindre que la moitié ST de *t*T, & par conséquent MR est aussi moindre que SV. Maintenant puisque nous avons MR. SV. :: MN. ST ou MR. MN :: SV. ST. nous aurons aussi MR. MN—MR :: SV. ST—SV, c'est-à-dire, MR. RN :: SV. VT, & partant MR. SV :: RN. VT; mais MR est moindre que SV, donc RN est moindre que VT.

705. Corollaire XIV. *De toutes les lignes* RO, VO &c. (Fig. 430.) *qu'on peut mener des points d'un quart* AD *de circonférence d'Ellipse au centre* O, *celles qui font un moindre angle avec le grand axe*, AB, *& qui par conséquent en sont plus proches comme* RO *sont plus grandes que celles qui font un angle plus grand avec cet axe, ou qui en sont plus éloignées comme* VO. Des points R, V je mene les ordonnées RM, SV au grand axe, & je les prolonge jusqu'à la circonférence du cercle circonscrit en N & T; des points N, T je mene au centre les droites NO, TO lesquelles sont égales étant rayons du même cercle, ainsi $\overline{NO}^2 = \overline{TO}^2$. Or, le triangle rectangle NMO donne $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2$, & à cause que MN est divisé en deux parties en R, nous avons $\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$; donc $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$, de même le triangle rectangle TOS donne $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{ST}^2$, & à cause de ST divisé en deux parties en V, nous avons $\overline{ST}^2 = \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$, & partant $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Or, le triangle rectangle RMO donne $\overline{RO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2$, donc ce qui manque au quarré $\overline{RO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{NO}^2$ est $2MR \times RN + \overline{RN}^2$; de même le triangle rectangle VSO donne $\overline{VO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2$, & par conséquent ce qui manque au quarré $\overline{VO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{TO}^2$ est $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Mais MR est moindre que SV & RN moindre que VT, (*N.* 704.) donc le défaut $2MR \times RN + \overline{RN}^2$ est moindre que le défaut $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Ainsi il manque moins à $\overline{RO}^2$ pour être égal à $\overline{NO}^2$ qu'il ne manque à $\overline{VO}^2$ pour être égal à $\overline{TO}^2$ ou $\overline{NO}^2$, & par conséquent $\overline{RO}^2$ est plus grand que $\overline{VO}^2$, & RO plus grand que VO.

706.

706. COROLLAIRE. XV. *Donc de toutes les lignes* RH, VL (Fig. 430.) *qui passent par le centre* O, *& qui se terminent de part & d'autre à la courbe, les plus grandes sont celles qui font des angles moindres avec le grand axe.* Nous venons de voir que RO est plus grand que VO; or, RH, VL étant coupées en deux également au centre O (*N.* 696.) sont doubles de RO, VO, donc RH est aussi plus grand que VL.

707. COROLLAIRE XVI. *Si du centre* O *d'une Ellipse* (Fig. 431.) *& avec un rayon* OH *plus grand que le demi petit axe* OD, *& moindre que le demi grand axe* OA, *on décrit un cercle, ce cercle coupera l'Ellipse, & ne la coupera qu'en quatre points* M, N, S, R, *par lesquels on peut mener deux doubles ordonnées* MN, RS *au grand axe égales entr'elles, & deux doubles ordonnées* MR, NS *au petit axe aussi égales entr'elles.* 1°. Il est évident que ce cercle doit couper l'Ellipse, car prenant sur le grand axe la partie TO égale au rayon HO, la circonférence du cercle passera par le point T, & par conséquent elle ne pourra venir du point H au point T, sans couper le quart d'Ellipse AC. 2°. Ce cercle doit couper l'Ellipse en quatre points, car de même que le point H ne peut décrire le quart HT de circonférence, sans couper le quart AC de l'Ellipse, de même aussi il ne peut décrire l'autre quart de circonférence TE, sans couper l'autre quart d'Ellipse AD, & la même chose arrivera à l'égard des deux autres quarts d'Ellipse DB. CB. 3°. Le point H en décrivant le quart de circonférence HT, ne peut couper le quart d'Ellipse AC qu'en un seul point M, car s'il le coupoit encore en un autre point K, menant des points, M, K des droites au centre, ces droites MO, KO étant rayons du même cercle seroient égales, & par conséquent de deux différens points M, K d'un quart d'Ellipse AC, on pourroit mener au centre O deux lignes égales MO, KO ce qui n'est pas possible, puisque la plus proche KO de l'axe AB, est toujours plus grande que l'autre MO (*N.* 705.) par la même raison le point H en décrivant le quart de circonférence TE, ne peut couper le quart d'Ellipse AD qu'en un seul point N, & la même chose doit se dire des autres quarts DB, CB d'ellipse, donc le cercle ne peut couper l'ellipse qu'en 4 points. 4°. Le point T étant le plus haut point du quart de circonférence HMT, c'est-à-dire, le plus éloigné du diamétre HE; si du point M où ce quart de circonférence coupe le quart d'Ellipse AC, je mene une droite MN paralelle au diamétre HE, cette droite coupera le cercle en un autre point tel que N, & sera une

corde, laquelle sera coupée en deux également en P par le rayon OT perpendiculaire sur le diamétre HE, ainsi nous aurons MN = 2MP, mais MP étant ordonnée au grand axe AO, la double ordonnée menée du même point M doit être aussi 2MP, donc cette double ordonnée doit être égale à MN, & par conséquent le point N où la corde MN coupe le cercle, est le même que le point N où la double ordonnée au grand axe coupe le quart d'Ellipse AP. On prouvera de même que la ligne qui joint les points N,S est une double ordonnée du petit axe que celle qui joint les points S,R est une double ordonnée au grand axe, & que celle qui joint les points R,M est une double ordonnée au petit axe; ainsi à cause des paralelles MN, RS, & NS, MR, la figure MNRS sera un paralellogramme rectangle, & partant les deux doubles ordonnées MN, RS seront égales, de même que les deux doubles ordonnées NS, MR au petit axe.

708. PROBLEME. *D'un point* R *pris sur une Ellipse* ADBC (Fig. 432.) *mener une tangente à la courbe.*

Du point R je mene une ordonnée au grand axe AB, & cherchant une troisiéme proportionnelle OT à la distance OM du centre à l'ordonnée, & au demi grand axe OA, je mene par l'extrémité T de cette proportionnelle & par le point donné R la droite TRY, laquelle est la tangente demandée, ce que je prouve ainsi.

Je décris autour du grand axe le cercle AEBH qui sera circonscrit à l'Ellipse; je prolonge l'ordonnée MR jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en N, & du point N menant par le point T la droite NT, cette droite touchera le cercle en N à cause de :: OM. OA. OT (*N.* 292). Je prens sur l'axe un autre point quelconque S d'où je mene une droite SX paralelle à MN, & qui coupe la tangente TN en X; la circonférence du cercle en Z, la droite TR en L & l'Ellipse en V; les triangles semblables MNT, SXT donnent MN. SX :: MT. ST, & à cause des triangles sembables MRT, SLT, nous avons MR, SL :: MT. ST; donc MN. SX :: MR. SL, ou MN. MR :: SX. SL; or, par la nature de l'Ellipse, nous avons MN. MR :: SZ. SV, donc SX. SL :: SZ. SV. Or, à cause que TN est tangente du cercle en N, la droite SX est plus grande que l'ordonnée SZ de ce cercle, donc SL doit être plus grand que SV, & par conséquent le point L de la droite TY doit être hors de l'Ellipse, & comme la même chose arrivera en quelque part de l'axe où l'on prenne le point S excep-

té en M, il s'ensuit que TRY ne touche l'Ellipse qu'en R.

Nota. Que si sur les extrémités, A, B du grand axe on éleve des perpendiculaires, elles seront tangentes de l'Ellipse à cause qu'elles seront tangentes du cercle circonscrit, sur le diamétre duquel elles seront perpendiculaires, & de même les perpendiculaires élevées sur les extrémités du petit axe seront tangentes, à cause que le petit axe est la plus grande de toutes les doubles ordonnées au grand axe.

709. COROLLAIRE Ier. *Une tangente* TR (Fig. 433.) *ayant été menée à une Ellipse, si on la prolonge jusqu'à ce qu'elle coupe le petit axe* CD *en* Y, *& que du point d'attouchement on mene l'ordonnée* RQ *au petit axe, on aura aussi* :: OQ. OD. OY.

Je décris autour du petit axe le cercle CHDF, lequel sera inscrit dans l'Ellipse, & du point E où ce cercle coupe l'ordonnée QR, menant la droite EY, cette droite sera tangente du cercle ; car d'un autre point quelconque P pris sur le petit axe menant paralelement à QR la droite PM qui coupe la tangente TY en M, l'ellipse en N, la droite YE prolongée en S, & le cercle en X, les triangles semblables PMY, QRY donnent PM. QR :: PY. QY, & à cause des triangles semblables PSY, QEY nous aurons PS. QE :: PY. QY, donc PM. QR :: PS. QE, ou PM. PS :: QR. QE ; mais par la nature de l'Ellipse nous avons PN. PX :: QR. QE, donc PM. PS :: PN. PX ; or, à cause que TR est tangente de l'Ellipse en R, la droite PM est plus grande que l'ordonnée PN, donc la droite PS est aussi plus grande que PX, & partant le point S de la droite YES est hors du cercle CHDF ; & comme la même chose arrivera par tout où l'on prendra le point P excepté en Q, il s'ensuit que la droite YE est tangente du cercle en E, & que par conséquent on doit avoir :: OQ. OD. OY. (*N.* 292).

D'où il suit qu'un point R étant donné sur une Ellipse (*Fig.* 432. 433.) il est indifférent de mener l'ordonnée MR au grand axe (*Fig.* 432.) ou l'ordonnée RQ au petit axe (*Fig.* 433.) car dans le premier cas faisant :: OM. OA. OT, le point T sera le point par où il faut mener la tangente, & dans le second faisant :: OQ. OD. OY, le point Y sera le point d'où la tangente devra être menée, & cette tangente sera la même pour l'un & l'autre cas.

710. COROLLAIRE II. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la courbe Elliptique sont toutes inclinées entr'elles, & se coupent entre leurs points d'attouchement.*

Si les tangentes TP, VQ (*Fig.* 434.) sont menées de part & d'autre de l'axe, il est clair que ces lignes étant inclinées sur cet axe sont inclinées entr'elles, & qu'elles doivent se couper en un point R entre les points d'attouchement. Et ce seroit la même chose si les tangentes étoient menées de part & d'autre du petit axe CD.

Mais si les tangentes TP, VQ (*Fig.* 435.) sont menées de deux points T, V du même côté de l'axe, je mene les ordonnées TM, VN, ainsi par rapport à la tangente TP, j'ai :: OM. OA. OP, ce qui donne $OM \times OP = \overline{OA}^2$; & par rapport à la seconde j'ai :: ON. OA. OQ & $ON \times OQ = \overline{OA}^2$; donc $OM \times OP = ON \times OQ$, d'où je tire OM. ON :: OQ. OP; mais OM est moindre que ON, donc OQ est moindre que OP, c'est-à-dire le point P, où la tangente TP la plus éloignée de l'axe coupe cet axe, est plus éloigné du sommet A que le point Q, où la tangente VQ coupe l'axe. Donc la tangente TP ne peut point aller aboutir au point P sans couper la tangente QVS, mais elle ne peut la couper au point d'attouchement V, car alors TP toucheroit la courbe en deux points T, V ce qui n'est pas possible (*N.* 708.); & elle ne peut pas non plus la couper entre V & Q, car il faudroit pour cela qu'elle passât entre le point V d'attouchement & l'axe, & par conséquent elle ne seroit plus tangente, donc elle doit la couper nécessairement en quelque point Z entre T & V.

711. COROLLAIRE III. *D'un même point on ne peut mener deux tangentes*, ce que l'on prouvera de même que pour la parabole (*N.* 646).

712. COROLLAIRE IV. *Une tangente* RP (Fig. 436.) *étant menée d'un point* R, *& une ordonnée* MR *menée du point d'attouchement* R *au grand axe, on aura* PA. AM :: PB. MB. Je décris sur le grand axe le cercle circonscrit, & prolongeant l'ordonnée jusqu'à la circonférence en N, la droite NP est tangente du cercle (*N.* 708.) & la droite MN est l'ordonnée de ce cercle menée du point d'attouchement N, donc nous avons PA. AM :: PB. MB (*N.* 296.) c'est-à-dire, la sécante PB qui passe par le centre O de l'ellipse est coupée harmoniquement.

713. COROLLAIRE V. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, si l'on mene par le point* P (Fig. 437.) *une sécante* PZ *qui ne passe pas par le centre de l'ellipse, & qui soit coupée par la courbe & par l'ordonnée* RM *aux points* X, Z, V, *on aura encore*

PX. XV :: PZ. VZ. Je décris le cercle circonscrit, & prolongeant l'ordonnée MR en N, la droite PN est tangente du cercle, & MN est son ordonnée menée du point d'attouchement. Des points X, Z, je mene les droites QE, TH, jusqu'à ce qu'elles coupent la circonférence en E, H, & l'axe en Q, T. Ainsi par la nature de l'ellipse, j'ai QX. TZ :: QE. TH. Je mene par le point E, & le point P la droite PH sans m'embarrasser si elle coupe TH en H ou en quelqu'autre point que je nomme *y*. Les triangles semblables PQX, PTZ donnent QX. TZ :: PQ. PT, & à cause des triangles semblables PQE, PT*y*, nous avons QE. T*y* :: PQ. TP; donc QX. TZ :: QE. T*y*; mais nous avons QX. TZ :: QE. TH; donc QE. TH :: QE. T*y*, & par conséquent TH = T*y*, c'est-à-dire la droite P*y* est la même que PH. Or, PH est une secante du cercle, laquelle est coupée harmoniquement par le cercle & l'ordonnée MN menée du point d'attouchement N (*N*.296.), & à cause des paralelles QE, MN, TH la droite PZ est coupée en X, V, Z en même raison que la droite PH; donc PX. XV :: PZ. VZ.

714. COROLLAIRE VI. *Posant toujours la tangente* RP (Fig. 438.) *& l'ordonnée* RM *menée du point d'attouchement, si l'on mene le petit axe* CD, *on aura* PA. PM :: PO. PB. Je décris le cercle circonscrit, je prolonge l'ordonnée en N, & du point N, je mene la tangente PN; ainsi j'ai par rapport au cercle PA. PM :: PO. PB (*N*. 294.); or, ces lignes sont les mêmes par rapport à l'éllipse. Donc, &c.

715. COROLLAIRE VII. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, si des extrémités* A, B, *de l'axe on éleve sur cet axe des perpendiculaires* AH, BL *jusqu'à la rencontre de la tangente* PRL, *le rectangle* AH×BL *de ces deux perpendiculaires est égal au quarré du demi-axe* OD. Je prolonge le petit axe jusqu'à ce qu'il rencontre la tangente en E, les triangles PAH, PMR, POE, PBL étant semblables, leurs bases AH, MR, OE, BL sont entr'elles comme leurs hauteurs PA, PM, PO, PB; mais nous avons PA. PM :: PO. PB (*N*. 714.); donc AH. MR :: OE. BL, & partant AH×BL = MR×OE. Du point R, je mene l'ordonnée RT au petit axe, ce qui donne MR = OT; or, à cause de la tangente RE, & de l'ordonnée RT menée du point d'attouchement, nous avons ∺ OT ou MR. OD. OE; donc $\overline{OD}^2$ = MR × OE; mais nous venons de trouver AH×BL = MR×OE, donc AH×BL = $\overline{OD}^2$.

716. COROLLAIRE VIII. *Supposant toujours la tangente* PR (Fig. 439.), *& l'ordonnée* RM *à l'axe menée du point d'attouchement* R; *le rectangle* AM×MB *des parties de l'axe que l'ordonnée* RM *coupe est égal au rectangle* PM×MO *de la soutangente* PM *par la distance* MO *de l'ordonnée* RM *au centre* O. Je décris le cercle circonscrit, & prolongeant l'ordonnée en N, la droite PN est tangente du cercle en N; donc en menant au centre la droite NO, le triangle PNO est rectangle; or, l'ordonnée MN au cercle étant abaissée de l'angle droit N de ce triangle perpendiculairement sur son hypothenuse, nous avons $\overline{MN}^2 = PM \times MO$; & par la proprieté du cercle nous avons $\overline{MN}^2 = AM \times MB$, donc $PM \times MO = AM \times MB$.

717. COROLLAIRE IX. *Posant encore les mêmes choses, si du point d'attouchement* R (Fig. 440.) *on éleve une perpendiculaire* RS *sur la tangente* RP, *cette perpendiculaire coupera le grand axe en un point* S *qui sera entre l'ordonnée* RM *& le centre* O. La droite NO menée du point d'attouchement N du cercle circonscrit au centre O est perpendiculaire sur la tangente PN du cercle, & à cause que les deux lignes PR, PN se çoupent en P; il est clair que la perpendiculaire SR sur PR étant prolongée sera oblique sur PN, & fera un angle aigu PXR sur PN du côté de P, à cause que le triangle PRX est rectangle en R; ainsi RS s'éloignera de plus en plus de NO, & par conséquent elle coupera le diamétre entre l'ordonnée MR, & le centre O ou la droite NO va aboutir.

Nota. Que si du point R, on mene l'ordonnée RT au petit axe, la perpendiculaire RZ coupera cet axe en-delà du centre O par rapport à l'ordonnée RT; ce qui est évident.

718. COROLLAIRE X. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, je dis que la souperpendiculaire* MS (Fig. 440.) *est à la distance* MO *de l'ordonnée* MR *au centre* O, *comme le paramétre du grand axe est au grand axe*. Par la nature de l'ellipse, nous avons en nommant P le paramétre du grand axe $\overline{MR}^2$. AM×MB :: P. AB (*N.* 692.). Or, à cause du triangle rectangle PRS, & de la droite RM perpendiculaire sur l'hypothenuse PS, nous avons $\overline{MR}^2 = PM \times MS$, & d'autre part nous avons AM×MB = PM×MO (*N.* 716.); substituant donc ces valeurs dans notre proportion, nous aurons PM×MS. PM×MO :: P. AB; mais les rectangles PM×MS, PM×MO ayant une dimension com-

mune PM, font entr'eux comme leurs dimensions inégales MS, MO; donc MS, MO :: P. AB.

Nota. Si l'on mene du point R l'ordonnée RT au petit axe, on prouvera de la même façon que la souperpendiculaire TZ est à la distance TO de l'ordonnée au centre, comme le paramétre du petit axe est à ce petit axe. Au reste, il est aisé de voir que tout ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens au sujet du grand axe, peut s'appliquer au petit axe; à l'exception de ce qui a été remarqué dans la note du Corollaire précédent.

719. DEFINITION. Une ellipse ADBC étant donnée (*Fig.* 441.); si de l'une des extrêmités D du petit axe CD, & avec un rayon égal au demi-grand axe AO, on décrit un arc HX qui coupe le grand axe en deux points H, X, ces points se nommeront les *Foyers* de l'Ellipse. Il est aisé de voir que ces foyers sont également éloignés du centre O, à cause des triangles rectangles égaux DHO, DOX.

720. COROLLAIRE. Il suit de cette Définition que *le rectangle* AH × HB *des parties* AH, HB *de l'axe, que l'un des foyers* H *coupe est égal au quarré de la moitié* OD *du petit axe.* Car le triangle rectangle HOD donne $\overline{OD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{HO}^2$ ou $\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$; à cause de HD = AO : mais le grand axe AB étant divisé en deux également en O, & en deux inégalement en H, nous avons $AH \times HB = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$; donc $AH \times HB = \overline{OD}^2$, & de même $AX \times XB = \overline{OD}^2$.

721. PROPOSITION CXXXV. *Une tangente* PR (Fig. 442.); *& l'ordonnée* RM *au grand axe menée du point d'attouchement* R *étant données; je dis que si l'on décrit le cercle circonscrit, & que des points* T, S *où ce cercle coupe la tangente* PRL, *on éleve des perpendiculaires* TH. SX *sur la tangente, ces perpendiculaires passeront par les foyers* H, X *de l'Ellipse.*

La droite TS étant corde du cercle circonscrit, les droites T*t*, SQ élevées perpendiculairement aux extrêmités de cette corde, font deux cordes égales du même cercle circonscrit (*N.* 265.), & à cause que le diamétre BA du cercle coupe ces cordes obliquement, les parties TH, *t*H de la corde T*t* sont égales chacune à chacune aux parties SX, XQ de la corde SQ (*N.* 266.). Cela posé.

Je mene par les extrêmités A, B de l'ellipse les tangentes AN,

BL qui coupent la tangente PL en N & L ; les triangles rectangles PBL, PSX étant femblables, à caufe de l'angle aigu P qui leur eſt commun, donnent PB PS :: BL. SX, & à caufe des triangles rectangles femblables PTH, PAN, nous avons PT. PA :: TH. AN; or, les droites PB, PS étant fecantes du cercle, donnent PB. PS :: PT. PA (*N.* 272.); donc BL. SX :: TH. AN, & par conféquent BL × AN = SX × TH ; mais BL × AN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 715.); donc SX × TH = $\overline{OD}^2$, ou *t*H × TH = $\overline{OD}^2$, à caufe de *t*H = SX ; or, les droites *t*T, AB étant des cordes du cercle circonfcrit, lefquelles fe coupent en H, nous avons *t*H × TH = AH × HB (*N.* 279.) ; donc AH × HB = $\overline{OD}^2$, c'eſt-à-dire le rectangle des parties inégales AH, HB du grand axe eſt égal au quarré de la moitié OD du petit axe ; donc le point H eſt un des foyers de l'éllipfe (*N.* 720.) ; & on prouvera de même que le point X eſt l'autre foyer.

722. COROLLAIRE Ier. *Une tangente* PR (Fig. 443.) *étant donnée, fi des deux foyers* H, X *de l'ellipfe, on mene des droites* HR, XR *au point d'attouchement* R, *les angles* HRT, XRS *fait par ces droites avec la tangente* PS, *font égaux.* Je décris le cercle circonfcrit & des points T, S où fa circonférence coupe la tangente P, S, élevant des perpendiculaires TH, SX qui paffent par les foyers H, X (*N.* 721.), les triangles HRT, XRS font rectangles, & les triangles femblables HTP, XSP donnent HT. XS :: PT. PS ; je mene l'ordonnée MR que je prolonge jufqu'à la circonférence du cercle en N, & menant NP, cette droite NP eſt tangente du cercle; donc la fecante PS étant coupée en R par l'ordonnée NM menée du point d'attouchement, donne PT. TR :: PS. RS (*N.* 296.) ou PT. PS :: TR. RS; donc HT. XS :: TR. RS, & par conféquent les triangles rectangles HTR, XSR font femblables, & l'angle HRT eſt égal à l'angle XRS.

723. COROLLAIRE II. *Si des foyers* H, X (Fig. 443.) *d'une ellipfe, on mene des droites au point* R *où une tangente quelconque touche l'ellipfe, la fomme de ces deux droites* HR, XR *eſt égale au grand axe* AB. Je décris le cercle circonfcrit ; & du centre O, je mene la droite OS à l'un des points S où le cercle coupe la tangente TS ; j'éleve en S la droite SX perpendiculaire fur la tangente, laquelle paffe par le foyer X, & je prolonge XS jufqu'à ce qu'elle rencontre en V la droite HR prolongée, l'angle SRV étant égal à l'angle

à l'angle TRH qui lui est opposé au sommet, est par conséquent égal à l'angle XRS, lequel est égal à l'angle TRH (*N.* 722.); ainsi les triangles rectangles XRS, SRV sont semblables & égaux, à cause du côté commun RS, & partant XS = SV; or, par la définition des foyers on a XO = OH; donc la droite OS est paralelle à la droite HV, & les triangles semblables HXV, OXS, donnent HV. OS :: HX. OX : mais HX est double de OX, donc HV est aussi double de OS : or, à cause des triangles rectangles semblables & égaux RXS, RSV, nous avons XR = RV; donc HV = HR + RV = HR + XR, & partant HR + RX est double de OS ou de OB, c'est-à-dire HR + RX = AB.

724. *Remarque.* Comme il n'est point de point R sur la courbe de l'éllipse auquel on ne puisse mener une tangente; il s'ensuit qu'il n'en est point aussi où les droites HR, RX menées du foyer ne soient ensemble égales à l'axe. Ainsi on peut aisément décrire une éllipse dont le grand axe AB, & les foyers H, X sont connus; car si l'on prend un fil égal à la longueur AB, & qu'ayant attaché ses deux extrêmités aux deux foyers H, X, on tienne ce fil toujours tendu par le moyen d'un stile que l'on conduira autour des deux foyers jusqu'à ce qu'il revienne au même point d'où il étoit parti; la pointe du stile décrira une courbe élliptique, puisqu'en quelque part R que se trouve cette pointe, on aura toujours HR + RX = AB.

725. *Definition.* Toute ligne droite qui passe par le centre d'une éllipse, & qui se termine de part & d'autre à la courbe, se nomme *Diamétre*, parce qu'on peut aisément trouver une infinité de lignes paralelles terminées de part & d'autre à la courbe qui seront coupées chacune en deux également par ce diamétre, comme il sera dit plus bas.

726. Proposition CXXXVI. *Le grand axe* AB (Fig. 444.); *& un diamétre* RS *étant donnés, si par les sommets* A, R, *on mene des tangentes* AZ, RP *qui se coupent en* X, *les triangles* PXA, ZXR, *faits par ces tangentes avec l'axe & le diamétre sont égaux.*

Du point R, je mene l'ordonnée RM au grand axe AB, laquelle est paralelle à la tangente AZ, l'une & l'autre étant perpendiculaire sur le grand axe AB; & du point A, je mene la droite AH paralelle à la tangente RP. A cause de la tangente RP, & de l'ordonnée RM menée du point d'attouchement, j'ai OM. OA :: OA. OP (*N.* 708.); or, les triangles semblables OMR, OAZ, donnent OR. OZ :: OM. OA; donc OR. OZ :: OA. OP,

& par conféquent menant la droite RA, & la droite ZP, ces deux lignes RA, ZP font paralelles, & les triangles ARP, ARZ qui font entre ces deux paralelles, & qui ont la même bafe RA font égaux; donc en retranchant de l'un & de l'autre le triangle RXA, nous aurons PXA = ZXR.

727. COROLLAIRE. *Posant les mêmes choses, si du point d'attouchement* R *de la tangente* RP *menée par le sommet du diamétre* RS *on mene l'ordonnée* RM *au grand axe, le triangle* RPM *fait par la tangente; l'ordonnée, & le grand axe, est égal au quadrilatere* ZAMR *fait par la tangente de l'axe, par l'ordonnée* RM, *& par l'axe & le diamétre.* Les triangles PXA, ZXR font égaux (*N.* 726.); ajoutant de part & d'autre la partie commune RXAM, nous aurons RPM = ZAMR.

Nota. Cette Propofition & fon Corollaire font de conféquence pour bien entendre ce qui fuit.

728. PROPOSITION CXXXVII. *Le grand axe* AB (Fig. 445, 446, 447, 448, 449.) *un diamétre* RS *étant donnés avec leurs tangentes* AZ, RP *menées par les sommets, si par un point quelconque* E *pris sur la courbe, on mene deux paralelles aux tangentes, le triangle* EHV *fait par ces deux paralelles, & le grand axe est égal au trapezoïde* AZTV *fait par la tangente du grand axe, & sa paralelle* TV *comprise entre l'axe & le diamétre; & le triangle* TEL *fait par les deux paralelles & le diamétre* RS *est égal au trapezoïde* RPHL *fait par la tangente de ce diamétre, & sa paralelle comprise entre l'axe & le diamétre.*

Il y a ici plufieurs cas que nous allons examiner en commençant par le triangle fait par les deux paralelles avec l'axe AB.

Si le point E d'où l'on mene les paralelles TV, HL eft entre l'axe & le diamétre (*Fig.* 445.); je fçais que le triangle PRM eft égal au trapezoïde ZAMR (*N.* 727.). Or, les triangles PRM, HEV étant femblables, font entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RM, EV; donc PRM. HEV :: $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$; mais par la nature de l'ellipfe, nous avons $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$ :: AM×MB. AV×VB (*N.* 689.), & à caufe que AB eft divifé en deux également en O, & en deux inégalement en M, nous avons AM×MB = $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, & par la même raifon AV×VB = $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$; donc PRM. HEV :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$, & mettant au lieu des quarrés $\overline{AO}^2$, $\overline{MO}^2$ & $\overline{VO}^2$, les triangles femblables AZO,

VTO, MRO qui font en même raifon, à caufe que les droites AO, MO & VO font leurs côtés homologues, nous aurons PRM. HEV :: AZO—MRO. AZO — VTO, c'eft-à-dire, PRM. HEV :: AZRM. AZTV; mais PRM=AZRM (*N*.727.); donc HEV=AZTV.

Si le point E d'où l'on mene les paralelles (*Fig*. 446.) eft entre le diamétre RS & le petit axe CD, les triangles femblables PRM, HEV donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}^2 . \overline{EV}^2$, & nous aurons auffi $\overline{RM}^2 . \overline{EV}^2 :: \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO —MRO. AZO — VTO :: AZRM. AZTV; donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV, & partant HEV = AZTV, à caufe de PRM = AZRM.

Si le point E, d'où l'on mene les paralelles (*Fig*. 447.), eft en deffous du petit axe CD. La tangente AZ, & fa paralelle EV ne formeront plus un trapezoïde; mais en menant à l'autre extrémité B du grand axe la tangente Bz qui coupe le diamétre RS en z, cette tangente formera avec fa paralelle, l'axe & le diamétre, le trapezoïde VTzB. Or, les triangles femblables PRM, HEV, donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}^2 . \overline{EV}^2$; & nous aurons auffi $\overline{RM}^2 . \overline{EV}^2 :: \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2 . \overline{OB}^2 - \overline{OV}^2$ :: AZO — MRO. OBz — OVT :: AZRM. VTzB; donc PRM. HEV :: AZRM. VTzB, & partant HEV = VTzB, à caufe de PRM=AZRM.

Si le point E (*Fig*. 448.) eft de l'autre côté du grand axe, on aura toujours PRM. HEV :: $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO — MRO. AZO — VTO :: AZRM. AZTV; donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV, & par conféquent HEV = AZTV, de même que PRM = AZRM.

Enfin, fi le point E eft fur le quart d'ellipfe DB (*Fig*. 449.); je mene par l'autre extrémité B de l'axe, la tangente Bz, & je trouve encore PRM. HEV :: $\overline{RM}^2 . \overline{EV}^2 :: \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2 . \overline{BO}^2 - \overline{VO}^2$ :: AZO — MRO. BOz — VOT :: AZRM. BVTz, & par conféquent HEV=BVTz, de même que PRM = AZRM. Venons au fecond triangle.

Et premierement fi le point E eft entre l'axe & le diamétre (*Fig*. 445.), le triangle fait par les paralelles & le diamétre eft TEL; or, PRM = AZRM, retranchant donc d'une part le triangle HEV, & de l'autre le trapezoïde AZTV = HEV, nous au-

rons PRIH + EVMI = TVMR, & retranchant la partie commune EVMI, nous aurons PRIH = TERI; & ajoutant de part & d'autre le triangle RIL, nous aurons PRLH = TEL.

Si le point E est entre le diamétre RS & le petit axe CD (*Fig.* 446.), le triangle fait par les paralelles & le diamétre RS est TEL. Par l'autre point *e* où la paralelle EH coupe l'ellipse, je mene la paralelle *tu* à la tangente AZ de l'axe, ce qui donne H*eu* = AZ*tu* comme on vient de voir. Or HEV = AZTV; retranchant donc d'une part H*eu*, & de l'autre AZ*tu*, nous aurons *eu*EV = *tu*VT, & retranchant la partie commune *eu*VTL, il restera TEL = *te*L; or *te*L = RPHL; donc TEL=RPHL.

Si le point E est sur le quart d'ellipse CB (*Figure* 447.), je mene par l'autre extrêmité B du grand axe la tangente *zp* jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamétre RS en *z* & la tangente PR prolongée en *p*. Les triangles rectangles semblables AZO, B*z*O sont égaux, à cause de OB = AO, & les triangles AZO, PRO sont aussi égaux à cause de la partie commune ORXA & du triangle PAX égal au triangle ZXR (*N.* 726.) donc PRO = BO*z*, & ajoutant la partie commune R*p*BO, nous aurons P*p*B = R*pz*. Je retranche de part & d'autre la partie R*p*BVEL, & il reste PRLH + HEV = VB*z*T + LET; or HEV étant le triangle fait par les paralelles avec l'axe est égal au trapezoïde VB*z*T; donc le triangle LET fait par les paralelles avec le diamétre est égal au trapezoïde PRLH.

Si le point E est de l'autre côté du grand axe sur le quart d'ellipse AD (*Fig.* 448.) je mene par l'autre extrêmité S du diamétre RS la tangente *zp* qui rencontre l'axe prolongé en *p*, & sa tangente ZA prolongée en *z*. Ainsi je démontrerai comme dans le cas précédent que *pz*A = Z*z*S, & retranchant la partie commune S*z*AVEL, il restera *p*SLH + HEV = VAZT + LET. Or le triangle HEV fait par les paralelles, & l'axe est égal au trapezoïde VAZT; donc le triangle LET fait par les paralelles & le diamétre, est égal au trapezoïde *p*SHL.

Enfin si le point E est dans le quart d'ellipse DB (*Fig.* 449.) menant par les extrêmités S, B du diamétre & de l'axe les tangentes S*p*, B*z*, on démontrera que le triangle LET fait par les paralelles & le diamétre, est égal au trapezoïde HLS*p*, de même que nous l'avons démontré à l'égard du triangle LET (*Fig.* 446.)

729. COROLLAIRE. *Toute ligne* E*e* (Fig. 450.) *terminée de part*

& d'autre à la courbe de l'Ellipse & paralelle à une tangente RP *menée à l'extrémité d'un diamétre* SR *est coupée en deux également en* L *par ce diamétre, & par conséquent elle en est la double ordonnée.* Des extrêmités E, *e* de la ligne E*e* je mene les droites ET, *et*, paralelles à la tangente ZA de l'axe & qui coupent le diamétre en T, *t*; ainsi à cause que les droites *et*, *e*L sont paralelles aux tangentes AZ, RP, le triangle *et*L est égal au trapezoïde RPHL (*N.* 728.) & par la même raison le triangle ETL = RPHL; donc *et*L = ETL; or ces triangles sont semblables; donc ils sont parfaitement égaux, & nous avons *e*L = EL, & on démontrera la même chose de quelque point E de l'ellipse que soit menée la droite E*e* paralellement à RP, en observant ce qui a été dit ci-dessus (*N.* 728.)

730. COROLLAIRE II. *Les quarrés des ordonnées* ET, IV. (Fig. 451.) *à un diamétre quelconque* RS, *sont entr'eux comme les rectangles* RT × TS. RV × VS *des parties du diamétre que les ordonnées coupent.* Je prolonge les ordonnées jusqu'à ce qu'elles coupent l'axe en *t*, *u*, & des extrêmités E, I, je mene des droites EL, IH, paralelles à la tangente de l'axe. Les triangles semblables TEL, VIH donnent $\overline{TE}^2.\ \overline{VI}^2$ :: TEL. VIH. (*N.* 392.) or les droites EL, ET étant paralelles aux tangentes de l'axe & du diamétre, nous avons TEL = RP*t*T (*N.* 728.) & par la même raison VIH = RP*u*V; donc $\overline{TE}^2.\ \overline{VI}^2$ :: RP*t*T. RP*u*V; or RP*t*T = RPO — T*t*O & RP*u*V = RPO — V*u*O; donc $\overline{TE}^2.\ \overline{VI}^2$ :: RPO — T*t*O. RPO — V*u*O; & au lieu des triangles RPO, T*t*O, V*u*O mettant les quarrés $\overline{RO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{VO}^2$ qui sont en même raison, à cause que les triangles étant semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RO, TO, VO, nous aurons $\overline{TE}^2.\ \overline{VI}^2 :: \overline{RO}^2 - \overline{TO}^2.\ \overline{RO}^2 - \overline{VO}^2$. Or RS étant divisé en deux également en O & en deux inégalement en T, nous avons $\overline{RO}^2 - \overline{TO}^2 = RT \times TS$, & par la même raison $\overline{RO}^2 - \overline{VO}^2 = RV \times VS$; donc $\overline{TE}^2.\ \overline{VI}^2$ :: RT × TS. RV × VS; & on démontrera la même chose de quelques points de l'ellipse que soient menées les ordonnées ET, IV, en observant ce qui a été dit ci-dessus (*N.* 728.)

731. PROPOSITION CXXXVIII. *Deux diamétres* MN, RS,

(Fig. 452.) *étant donnés avec les tangentes au sommet* MX, RX; *qui se coupent en* X, *si l'on mene la droite* RM *qui joint les points d'attouchement, & que du point* X *où les tangentes se coupent on mene par le milieu* L *de la droite* RM, *la droite* XO, *cette droite sera un diamétre & passera par conséquent par le centre* O.

Pour prouver que XO est un diamétre, il n'y a qu'à faire voir qu'elle coupera en deux également toutes les droites paralelles à RM qui seront terminées de part & d'autre à la courbe, & la démonstration s'en fera de même que pour la parabole (*N. 662.*)

732. *Remarque*. Par le moyen de cette Proposition, tout ce qui a été dit ci-dessus à l'égard d'un axe & d'un diamétre peut se démontrer de même à l'égard de deux diamétres.

Soient par exemple les diamétres MN, RS (*Fig. 453.*) avec leurs tangentes MT, RP qui se coupent en X, je mene du sommet M la droite MZ paralelle à la tangente RP, & par conséquent ordonnée au diamétre RS (*N. 729.*) & du sommet R la droite RH ordonnée au diamétre MN, je joints les points d'attouchement R, M par la droite TM, & coupant cette ligne en deux également en L, la droite XL est un diamétre (*N. 731.*) & passe par le centre O. Or à cause que RXME est un paralellogramme, & que sa diagonale RM est coupée en deux également en L par la droite XL; il est clair que XL prolongée passe par l'angle E, & que XE est l'autre diagonale. Les triangles semblables OEH. OXM. donnent OH. OM :: OE. OX; & à cause des triangles semblables OEM, OXP nous avons OM. OP :: OE. OX; donc OH. OM :: OM. OP; de même les triangles semblables OEZ, OXR donnent OZ. OR :: OE. OX, & à cause des triangles semblables OER, OXT nous avons OR. OT :: OE. OX, & par conséquent OZ. OR :: OR. OT, ce qui fait voir que la ligne OP est divisée aux points H, M, en même raison que la ligne OT est divisée aux points Z, R, & que par conséquent les droites ZH, RM, TP sont paralelles.

Donc, 1°. Un diamétre MN étant donné, si d'un point R on veut mener une tangente, il faut de ce point mener une ordonnée RH au diamétre MN, puis chercher une troisiéme proportionnelle OP aux droites OH, OM, & le point P sera le point où la tangente menée par R coupera le diamétre MN, ainsi c'est la même opération à faire à l'égard d'un diamétre qu'à l'égard de l'axe (*N. 708.*) Donc, 2°. Les triangles PXM, TXR

faits par les tangentes, & les diamétres font égaux; car à cause des paralelles TP, RM, les triangles PRM, TRM qui ont la base commune RM sont égaux, & retranchant le triangle commun RXM il restera PXM = TXR.

Donc, 3°. Le triangle PRH est égal au trapezoïde MTRH; car les triangles PXM, TXR étant égaux, si on ajoute de part & d'autre la partie commune MXRH, on aura PRH = MTRH.

Donc, 4°. Si d'un point quelconque E (*Fig.* 454.) pris sur la courbe on mene des droites DL, CF paralelles aux tangentes, le triangle LEC fait par ces paralelles, & le diamétre MN est égal au trapezoïde MTFC fait par la tangente MT de ce diamétre & sa paralelle CF. Car menant par le point R l'ordonnée RH au diamétre, nous aurons PRH = MTRH. Or les triangles PRH, LEC étant semblables donnent PRH. LEC :: $\overline{RH}^2$. $\overline{CE}^2$ (*N.* 392.) & à cause que RH, CE sont ordonnées au diamétre MN, nous avons $\overline{RH}^2$. $\overline{CE}^2$ :: MH × HN. MC × CN :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2$. $\overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$ (*N.* 730.) donc PRH. LEC :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2$. $\overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$; & au lieu des quarrés $\overline{MO}^2$, $\overline{HO}^2$, $\overline{CO}^2$, mettant les triangles semblables MTO, CFO, HRO qui sont en même raison (*N.* 392.) nous aurons PRH. LEC :: MTO — HRO. MTO — CFO :: MTRH. MTFC; mais PRH = MTRH; donc LEC = MTFC.

De même le triangle FED fait par les deux paralelles & le diamétre RS est égal au trapezoïde RPLD fait par la tangente RP de ce diamétre & sa paralelle DL. Ce que l'on démontrera de la même façon en menant du point M l'ordonnée MZ au diamétre RS.

733. PROPOSITION CXXXIX. *Deux diamétres* MN, RS (Fig. 455.) *étant donnés avec leurs tangentes* MT, RP. *Si de deux points* Q, V *pris sur la courbe entre ces diamétres on mene des droites* QL, QK, VH, VF *paralelles aux tangentes, le trapezoïde* ELHV *fait par deux de ces paralelles* QL, VH *avec le diamétre* MN, *& la plus proche des deux autres* VF *est égal au trapezoïde* FEQK *fait par les deux autres paralelles* VF, QK *avec l'autre diamétre* RS *& la plus proche* QL *des deux autres paralelles; & le trapezoïde* QLHY *fait par les paralelles* QL, YH *avec le diamétre* MN *& la plus éloignée* YK *des deux autres paralelles est égale au trapezoïde* FVYK *fait par les deux autres paralelles* VF, YK *avec*

le diamétre RS *& la plus éloignée* YH *des paralelles.*

La démonſtration de ceci eſt la même que pour la parabole (*N. 666. 667.*)

734. Proposition CXL. *Si deux lignes* HZ, TV (Fig. 456. 457. 458.) *qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe ſe coupent dans l'Ellipſe, le rectangle* HL × LZ *des parties de la premiere, eſt au rectangle* TL × LV *des parties de la ſeconde, comme le quarré de la tangente* MX *au ſommet du diamétre de la premiere, eſt au quarré de la tangente* RX *au ſommet du diamétre de la ſeconde.*

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (*N. 668.*) pour les trois cas repréſentés par les figures 456. 457. 458.

735. Proposition CXLI. *Si deux ſecantes* HZ, HV (Fig. 459.) *partent d'un même point extérieur* H, *le rectangle de la premiere* HZ *par ſa partie extérieure* HQ, *eſt au rectangle de la ſeconde* HV *par ſa partie extérieure* HL *comme le quarré de la tangente* RX *paralelle à la premiere, eſt au quarré de la tangente* MX *paralelle à la ſeconde.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N. 669.*)

736. Proposition CXLII. *Deux diamétres ou deux demi-diamétres* MO, RO (Fig. 460. 461.) *étant donnés avec leurs tangentes* MX, RX; *ſi l'on mene une double ordonnée* VZ *à l'un des diamétres* RO, *& qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente de l'autre diamétre en* H, *le rectangle* HZ × HV *de la ligne entiere* HZ *par la partie extérieure* HV *eſt au quarré de la partie* HM *qu'elle coupe ſur la tangente* MX, *comme le quarré de la tangente* RX *de ſon diamétre eſt au quarré de la tangente* MX *de l'autre diamétre.*

Même démonſtration que pour la parabole (*N. 672.*) pour les deux cas repréſentés par les figures 460. 461.

737. Proposition CXLIII. *Deux ſegmens* AMB, CRD (Fig. 462. 463. 464.) *étant donnés, ſi les parties* ML, RH *de leurs diamétres compriſes dans ces ſegmens, ſont entr'elles comme leurs diamétres ou demi-diamétres* MO, RO, *les plus grands triangles inſcrits dans ces ſegmens ſont égaux.*

Je mene les droites RD, MB, ce qui donne des triangles RDH, MBL qui ſont les moitiés des plus grands triangles inſcrits dans les ſegmens à cauſe qu'ils ont leur ſommet aux ſommets R, M des diamétres, & que leurs baſes DH, BL ſont les moitiés des baſes DC, AB des ſegmens; ainſi ce que nous dirons

tons des triangles RDH, MBL se dira aussi des plus grands triangles inscrits. Or il peut se faire que les bases AB, DC se coupent dans l'ellipse (*Fig.* 462.) ou qu'elles se coupent en dehors (*Fig.* 463.) ou enfin qu'elles se coupent sur la courbe (*Fig.* 464.)

Si les bases AB, CD se coupent en dedans en V (*Fig.* 462.) je mene les tangentes MR, RX aux sommets des diamétres ou demi-diamétres MO, RO, la droite RM qui joint les points d'attouchement, & les droites AC, HL, DB qui passent par les extrêmités & par les milieux des bases AB, CD. Je coupe la droite RM en deux également, & par le point X où les tangentes se rencontrent, & le milieu de RM, je mene la droite XF, laquelle est un diamétre (*N.* 731.) & passe par le centre O. Or par la supposition nous avons ML. MO :: RH. RO; donc les triangles ROM, HOL sont semblables, & les bases RM, HL sont paralelles, & comme la base RM du triangle RMO est coupée en deux également par la droite XO qui passe par le sommet O, la base HL du triangle HOL sera aussi coupée en deux également en S par la même droite XO; d'autre part à cause des paralelles RM, HL & des tangentes RX, XM paralelles aux doubles ordonnées DC, AB, les triangles RXM, HVL sont semblables, & à cause que la droite XF qui coupe la base RM du triangle RXM en deux également & qui passe par son sommet X, coupe aussi la base HL du triangle HVL en deux également & fait l'angle XSH égal à l'angle XVR, il faut nécessairement que cette droite XF passe aussi par le sommet V du triangle HVL; ainsi nous avons VL. HV :: XM. RX, & partant $\overline{VL}^2.\ \overline{HV}^2 :: \overline{XM}^2.\ \overline{RX}^2$. Or à cause que les bases AB, CD des segmens se coupent en dedans de l'ellipse, nous avons $AV \times VB.\ CV \times VD :: \overline{MX}^2.\ \overline{RX}^2$ (*N.* 754.) donc $AV \times VB.\ CV \times VD :: \overline{VL}^2.\ \overline{HV}^2$; mais à cause des bases AB, CD divisées en deux également en L & H, & en deux inégalement en V, nous avons $AV \times VB = \overline{AL}^2 - \overline{VL}^2$, & $CV \times VD = \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2$; donc $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 :: \overline{VL}^2.\ \overline{HV}^2$, ou $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2.\ \overline{HV}^2$, & composant, nous aurons $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 + \overline{VL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 + \overline{HV}^2.\ \overline{HV}^2$, c'est-à-dire $\overline{AL}^2.\ \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2.\ \overline{HV}^2$, & partant AL. VL :: CH. HV; d'où il suit

que les droites HL, AC sont paralelles. Or AL = LB, & CH = DH; donc LB. VL :: DH. HV; ainsi les droites DB, HL sont paralelles, & par conséquent les quatre lignes AC, RM, HL, DB sont paralelles & divisées chacune en deux également par la droite XF; d'où il suit que les trapezoïdes RMBD, RMLH, LHDB sont aussi divisés chacun en deux également par la même droite XF. Retranchant donc du trapezoïde RMBD, d'un côté le trapezoïde RVSH, & le trapezoïde HSFD, & de l'autre le trapezoïde VMLS = RVSH, & le trapezoïde LSFB = HSFD, il restera d'une part le triangle RHD égal au triangle MLB de l'autre.

Si les bases AB, CD (*Fig.* 463.) se coupent en T hors de l'Ellipse, je fais la même construction que ci-dessus, & je démontrerai de la même façon que les droites RM, HL sont paralelles entr'elles & coupées en deux également par le diamétre XO; que ce diamétre passe par le point T, & que nous aurons $\overline{TL}^2 . \overline{TH}^2 :: \overline{MX}^2 . \overline{RX}^2$, à cause que les triangles semblables LTH, MXR donnent TL. TH :: MX. RX; or les secantes TB, TD donnent TB × TA. TD × TC :: $\overline{MX}^2 . \overline{RX}^2$; donc TB × TA. TB × TC :: $\overline{TL}^2 . \overline{HT}^2$. Mais TB × TA = $\overline{TL}^2 - \overline{AL}^2$, & TD × TC = $\overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$; donc $\overline{TL}^2 - \overline{AL}^2 . \overline{TH}^2 - \overline{CH}^2 :: \overline{TL}^2 . \overline{HT}^2$, ou $\overline{TL}^2 . \overline{TL}^2 - \overline{AL}^2 :: \overline{TH}^2 . \overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$, & divisant $\overline{TL}^2 . \overline{TL}^2 - \overline{TL}^2 + \overline{AL}^2 :: \overline{TH}^2 . \overline{TH}^2 - \overline{TH}^2 + \overline{CH}^2$, c'est-à-dire $\overline{TL}^2 . \overline{AL}^2 :: \overline{TH}^2 . \overline{CH}^2$, & partant TL. AL :: TH. CH, ce qui rend les lignes HL, CA paralelles; & comme à cause de AL = LB & de CH = HD nous avons TL. LB :: TH. HD, les lignes DB, HL sont aussi paralelles; ainsi les quatre lignes CA, RM, HL, DB sont paralelles & divisées chacune en deux également par le diamétre XF, & par conséquent les trapezoïdes RMDB, RMLH, & HLBD sont aussi divisés chacun en deux également par ce même diamêtre. Achevant donc le reste comme ci-dessus, nous trouverons aussi RDH = MBL.

Enfin si les bases AB, CD (*Fig.* 464.) se coupent sur la courbe, je fais la même construction, & les droites RM, HL sont paralelles & divisées chacune en deux également par la droite XF. Or AL = LB, & AH = HD; donc AL. AB :: AH. AD,

& par conféquent les droites DB, HL font paralelles & divifées chacune en deux également par le diamétre XF. Ainfi les trapezoïdes RMDB, RMLH & HLBD font auffi divifés chacun en deux également par ce même diamétre, & partant achevant le refte comme ci-deffus, on aura RDH = MBL.

738. *Definition.* Un diamétre RS (*Fig.* 465.) étant donné avec fa tangente RT; fi par le centre O on mene un diamétre MN paralelle à la tangente, ce diamétre MN fe nomme diamétre conjugué du diamétre RS.

739. Proposition CXLIV. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* HE (Fig. 465.) *à un diamétre* RS *eft au rectangle* RH × HS *des parties de ce diamétre qu'elle coupe comme le quarré du diamétre* MN *conjugué du diamétre* RS, *eft au quarré du diamétre* RS.

Les droites HE, MO étant ordonnées au diamétre RS, nous avons $\overline{EH}^2 . RH \times HS :: \overline{MO}^2 . RO \times OS$ (*N.* 730.) mais $RO = OS$; donc $\overline{EH}^2 . RH \times HS :: \overline{MO}^2 . \overline{RO}^2$; or $\overline{MO}^2 . \overline{RO}^2 :: \overline{MN}^2 . \overline{RS}^2$; donc $\overline{EH}^2 . RH \times HS :: \overline{MN}^2 . \overline{RS}^2$.

740. Proposition CXLV. *Toute ligne* EF *qui fe termine de part & d'autre à la courbe* (Fig. 465.) *& qui eft paralelle à un diametre* RS, *eft coupée en deux également par le diamétre* MN *conjugué du damétre* RS.

Par les extrêmités E, F de la droite EF, je mene au diamétre RS les ordonnées EH, FL, lefquelles font paralelles & égales entr'elles à caufe des paralelles EF, RS. Or nous avons $\overline{HE}^2 . RH \times HS :: \overline{LF}^2 . RL \times LS$ (*N.* 730.) & $\overline{HE}^2 = \overline{LF}^2$, à caufe de $HE = LF$; donc $RH \times HS = RL \times LS$; mais $RH \times HS = \overline{RO}^2 - \overline{HO}^2$ & $RL \times LS = \overline{SO}^2$ ou $\overline{RO}^2 - \overline{LO}^2$; donc $\overline{RO}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{RO}^2 - \overline{LO}^2$, & par conféquent $\overline{HO}^2 = \overline{LO}^2$ & $HO = LO$; mais à caufe des paralelles HE, MO, LF, & EF, RS, nous avons $HO = EV$ & $LO = VF$; donc $EV = VF$.

741. Corollaire. Donc toutes les paralelles au diamétre RS font des doubles ordonnées à fon diamétre conjugué MN, & par conféquent la tangente TQ menée par le fommet M eft paralelle au diamétre RS, d'où il fuit que le diamétre RS eft le diamétre conjugué de fon conjugué MN, & que le quarré d'une ordonnée quelconque EV au diamétre MN eft au rectangle MV

× VN des parties de ce diamétre qu'elle coupe comme le quarré du diamétre RS est au quarré du diamétre MN.

742. PROPOSITION CXLVI. *Les deux axes* AB,CD (Fig. 466.) *& deux diamétres conjugués* MN, RS *étant donnés, le rectangle* PQTV *des deux axes, c'est-à-dire le rectangle fait par les quatre tangentes des deux axes, est égal au paralellogramme des deux diamétres, c'est-à-dire au paralellogramme* XZHL *fait par les tangentes des diamétres.*

Le segment ADB coupé par le grand axe AB, & le segment MSN coupé par le diamétre MN, ont les parties OD, OS de leurs diamétres comprises entre la courbe & leurs bases AB, MN proportionnelles à ces mêmes diamétres; car OD. OC :: OS. OR; donc les plus grands triangles ADB, MSN inscrits dans ces segmens sont égaux (*N.* 737.) or le triangle ADB est la moitié du rectangle AQTB, de même base & de même hauteur, & le triangle MSN est la moitié du paralellogramme MHLN; donc le rectangle AQTB est égal au paralellogramme MHLN, & par conséquent le rectangle PQTV double de AQTB est égal au parallellogramme XZLH double du parallelogramme MHLN.

743. COROLLAIRE. *Posant les mêmes choses; si de l'extrêmité* D *du petit axe* (Fig. 467.) *on mene une ordonnée* DV *au diamétre* MN, *& que de l'extrêmité* S *de l'autre diamétre conjugué* RS *on mene une ordonnée* SL *au grand axe* AB, *je dis que le diamétre* MN *& le grand axe seront coupés en même raison en* V *&* L *par leurs ordonnées* DV. SL. Je prolonge l'ordonnée DV jusqu'à ce qu'elle coupe en Y la tangente SY du diamétre RS conjugué de MN, & l'ordonnée LS jusqu'à ce qu'elle coupe en X la tangente DT du petit axe, & je mene DS. Le triangle ODS est la moitié du paralellogramme OVYS de même base & de même hauteur, & le même triangle est aussi la moitié du rectangle ODXL; donc le paralellogramme OVYS est égal au rectangle ODXL; or le paralellogramme OMHS étant le quart du paralellogramme des diamétres conjugués MN, RS est égal au rectangle ODTB qui est le quart du rectangle des deux axes (*N.* 742.) donc les paralellogrammes OMHS, OVYS sont entr'eux en même raison que les rectangles ODTB, ODXL qui leur sont égaux chacun à chacun; mais les paralellogrammes OMHS, OVYS ayant la hauteur commune OS sont entr'eux comme leurs bases OM, OV, & les rectangles ODTB, ODXL ayant la hau-

teur commune OD font entr'eux comme leurs bases OB, OL; donc OM. OV :: OB. OL, & partant OM. OM — OV :: OB. OB — OL, ou OM. MV :: OB. BL; & doublant les antécedens, nous aurons MN. MV :: AB. BL; & enfin divisant MN — MV. MV :: AB — BL. BL, ou NV. MV :: AL. BL.

744. COROLLAIRE II. *Posant encore les mêmes choses; si de l'extrêmité* M *du diamétre* MN (Fig. 468.) *on mene l'ordonnée* MH *au petit axe, & de l'extrêmité* S *de l'autre diamétre conjugué, l'ordonnée* SL *au grand axe, les deux axes seront coupés proportionnellement aux points* H, L. Je prolonge le diamétre MN jusqu'à ce qu'il coupe en T la tangente DT du petit axe, & du point D je mene l'ordonnée DV à ce diamétre. Les triangles semblables ODT, OHM donnent OD. OH :: OT. OM; mais à cause de la tangente DT & de l'ordonnée DV menée du point d'attouchement, nous avons OV. OM :: OM. OT, ou OT. OM :: OM. OV; donc OD. OH :: OM. OV; mais OM. OV :: OB. OL (*N.* 743.) donc OD. OH :: OB. OL.

745. COROLLAIRE III. *Posant encore les mêmes choses, le quarré de l'ordonnée* MH (Fig. 468.) *au petit axe menée du sommet du diamétre* MN, *est égal au rectangle* BL × LA *des parties du grand axe coupées par l'ordonnée* SL *menée du sommet du diamétre conjugué* RS, *& réciproquement, le quarré de l'ordonnée* LS *est égal au rectangle* CH × HD *des parties du petit axe que l'ordonnée* MH *coupe.* Les deux axes étant coupés proportionnellement en H & L (*N.* 744.) nous avons DH. DC :: BL. BA, & CH. DC :: AL. AB; multipliant donc ensemble les termes de ces deux proportions, nous aurons DH × CH. $\overline{DC}^2$ :: BL × AL. $\overline{AB}^2$, ou DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; or par la nature de l'ellipse nous avons $\overline{LS}^2$. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; donc $\overline{LS}^2$. BL × AL :: DH × CH. BL × AL; & partant à cause des conséquens égaux, nous aurons $\overline{LS}^2$ = DH × CH.

De même nous avons $\overline{MH}^2$. DH × CH :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$, ou DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$; mais nous avons trouvé DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$; donc DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: DH × CH. BL × AL, & par conséquent $\overline{MH}^2$ = BL × AL.

746. COROLLAIRE IV. *Posant encore les mêmes choses* (Fig. 468.) *les quarrés des diametres conjugués* MN, RS, *sont ensemble égaux aux quarrés des deux axes pris ensemble.* Le triangle rectangle OMH donne $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{MH}^2$; mais (N. 745.) $\overline{MH}^2 = BL \times AL$; donc $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL$; de même dans le triangle rectangle OSL, nous avons $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LS}^2$, mais $\overline{LS}^2 = CH \times HD$, donc $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + CH \times HD$, & partant $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL + \overline{OL}^2 + CH \times HD$; mais à cause que l'axe AB est divisé en deux également en O, & en deux inégalement en L, nous avons $BL \times AL + \overline{OL}^2 = \overline{BO}^2$, & par la même raison $CH \times HD + \overline{OH}^2 = \overline{OD}^2$; donc $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2$. Donc, &c.

747. COROLLAIRE V. *Si des extrémités* M, R *des diamétres conjugués* MN, RS (Fig. 469.) *on mene des ordonnées au grand axe, le rectangle* AF × FB *des parties que l'une des ordonnées coupe, est égal au quarré de la distance* LO *de l'autre ordonnée au centre* O. Du point M, je mene au petit axe l'ordonnée MV, & par conséquent le quarré de cette ordonnée est égal au rectangle AF×FB; mais MV = LO, donc $\overline{LO}^2 = AF \times FB$, & on prouvera de même que $\overline{FO}^2 = AL \times LB$.

748. PROPOSITION CXLVII. *Il y a toujours deux diamétres conjugés égaux dans une Ellipse, & tous les autres diamétres conjugués, sont inégaux.*

Soit l'ellipse ADCB (*Fig.* 470.) dont le grand axe est AB, & le petit est CD; je joins les extrêmités de ces axes par les droites AD, DB, BC, AC; ce qui me donne un paralellogramme ABCD, dont les quatre côtés sont égaux. Je mene par le centre O la droite NM paralelle au côté CA, ce qui divise le paralellogramme ABCD en deux paralellogrammes égaux AHCL, HDBL, car les triangles semblables AOH, BOL sont égaux, à cause du côté AO égal au côté OB, par la même raison les triangles semblables AOC, DOB sont égaux, & les triangles semblables COL, HOD le sont aussi, à cause du côté CO égal au côté OD; ainsi les paralellogrammes AHCL, HDBL étant composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun sont égaux entr'eux; or, ces paralellogrammes étant entre les paralelles AD, CB ont la même hauteur; donc la base CL

doit être égale à la base LB, & par la même raison, nous avons AH = HD; donc MN divise en deux également les deux droites CB, AD paralelles entr'elles, & qui se terminent de part & d'autre à la courbe, & par conséquent MN est un diamétre. On prouvera de la même façon que si du centre O, on mene une ligne RS paralelle au côté AD du paralellogramme ABCD, cette ligne RS sera aussi un diamétre, lequel sera conjugué du diamétre MN, à cause qu'il est paralelle aux ordonnées AH, CL de ce diamétre. Or, les lignes AD, AC étant égales, leurs moitiés AH, AP le sont aussi, & par conséquent le paralellogramme AHOP est composé de quatre côtés égaux; d'où il suit que les triangles AHO, APO qui onr le côté AO commun, & les côtés AH, OH, égaux entr'eux, & aux côtés AP, PH sont parfaitement égaux, & que l'angle AOH est égal à l'angle AOP; concevant donc que la demi-ellipse ADB soit mise sur son égale ACB, ensorte que l'angle droit AOD tombe sur l'angle droit AOC, la courbe ADB tombera sur la courbe ACB, l'angle AOM sur son égal AOR, & le côté OM sera égal au côté OR; or, MN est double de ON (*N.* 696.), & OR double de RS, donc les diamétres conjugués MN, RS sont égaux.

Maintenant concevons deux autres diamétres conjugués quelconques différens des diamétres conjugués & égaux MN, RS que nous venons de trouver (*Fig.* 471.), l'un des deux coupera les quarts d'ellipse AC, ou entre R & A ou entre R & C; supposons qu'il le coupe entre R & A en T, & que ce diamétre soit la droite TV, qui par conséquent est plus grande que RS (*N.* 705.); je mene par les points R, T les tangentes RX, TZ, lesquelles se couperont en quelque point Y entre les points d'attouchement R, T (*N.* 710.); c'est pourquoi si je prolonge la tangente YTZ, & le diamétre NM paralelle à la tangente RX, la tangente YZL, coupera en L le diamétre NM, & l'angle QZL extérieur au triangle ZOL sera plus grand que l'angle intérieur AOL; or, le diamétre HP conjugué du diamétre TV étant paralelle à la tangente TZ, les angles QZL, QOH du même côté sont égaux; donc l'angle QOH ou AOH est plus grand que l'angle QOL ou ZOL ou AOM, & par conséquent MO est plus grand que HO (*N.* 705.), & MN plus grand que HP; or, TV est plus grand que RS ou que son égale MN; donc à plus forte raison TV est plus grand que son conjugué HP.

On prouvera de même que si l'un des diamétres conjugués

passe entre R & C, auquel cas il sera moindre que RS, son conjugué sera plus grand que MN égal à RS.

749. Corollaire. *Les deux diamétres conjugués & égaux* MN, RS (Fig. 472.) *étant donnés dans une Ellipse, le quarré d'une ordonnée quelconque* PH *à l'un de ces diamétres* MN *est égal au rectangle* MH×HN *des parties de ce diamétre que l'ordonnée coupe.* Car nous avons $\overline{PH}^2$. MH × HN :: $\overline{RS}^2$. $\overline{MN}^2$; or, à cause de RS = MN, nous avons aussi $\overline{RS}^2 = \overline{MN}^2$; donc $\overline{PH}^2 = MH \times HN$.

750. *Remarque.* La proprieté de l'ellipse à l'égard des diamétres conjugués, est donc la même que celle du cercle, & il n'y a de différence qu'en ce que dans le cercle l'ordonnée est toujours perpendiculaire à son diamétre, au lieu que dans l'ellipse l'angle PHM (*Fig.* 472.) fait par l'ordonnée avec l'un des deux diametres conjugués & égaux, est toujours aigu; car cet angle est égal à l'angle ROM fait par les deux diamétres. Or, l'angle ROM (*Fig.* 470.) est égal à l'angle CBD du paralellogramme ADBC, & l'angle CBD est aigu, comme je vais le démontrer; donc l'angle PHM (*Fig.* 472.) est aussi aigu.

Pour montrer donc que l'angle CBD (*Fig.* 470.) est aigu, il n'y a qu'à observer que les deux triangles isosceles CBD, ACB ont les côtés CB, BD égaux chacun à chacun aux côtés AC, CB; or, la base CD du premier est moindre que la base AB du second; donc l'angle CBD est moindre que l'angle ACB; or, dans le paralellogramme ACBD, les deux angles CBD, ACB valent ensemble deux droits; donc CBD vaut moins d'un droit, & ACB en vaut davantage.

751. Proposition CXLVIII. *L'axe & un diamétre ou deux diamétres* MN, HL (Fig. 473.) *qui ne sont pas conjugués entr'eux, étant donnés, si par les extrêmités de ces diamétres on mene quatre tangentes* TR, PE *&* TP, RE *qui se coupent en* T, R, E, P, *les deux tangentes* TR, PE *menées par les extrêmités du diamétre* MN *seront coupées en* M *&* N *chacune en deux parties égales chacune à chacune, c'est-à-dire* TM = NE, *&* MR = NP, *& de même les deux tangentes* TP, RE *seront aussi coupées chacune en deux parties égales chacune à chacune.*

Je mene les droites HM, NL, qui joignent les extrêmités des deux diamétres, & à cause que MO. MN :: HO. HL, les droites HM, NL sont paralelles entr'elles. Du point T où les tangentes HT,

tes HT, MT se coupent, je mene par le milieu S de la droite HM la ligne TE qui est un diamétre (*N.* 731.), & qui par conséquent coupe aussi en deux également la droite NL paralelle à HM, d'où il suit que ce diamétre est le même que celui que l'on meneroit du point E où les deux tangentes NE, EL se coupent par le milieu Z de la droite NL qui joint les points d'attouchement NL. Or, les tangentes TR, PE étant paralelles entr'elles, à cause qu'elles doivent être paralelles aux ordonnées du diamétre MN; il est clair que les triangles TMO, NOE sont semblables, & de plus égaux, à cause du côté MO égal au côté NO; donc TM = NE; mais TR = PE, à cause du paralellogramme TREP; donc TR—TM ou MR=PN.

De même les triangles semblables HTO, EOL ayant le côté HO égal au côté OL sont parfaitement égaux, & par conséquent HT = EL; or, PT=ER, donc PH=LR.

752. Corollaire. *Posant les mêmes choses, je dis que le rectangle* TM×MR (Fig. 474.) *des deux parties de la tangente* TR *au sommet* M *du diamétre* MN *est égal au quarré du demi-diamétre* OZ *conjugué de* MN, *& que le rectangle* TH×HP *des parties de la tangente* TP *au sommet* H *du diamétre* HL *est égal au quarré du demi-diametre* OE *conjugué de* HL.

Je prolonge la tangente PT jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamétre MN prolongé en B, & du point d'attouchement menant l'ordonnée HC au diamétre MN, j'ai OC. OM :: OM. OB (*N.* 732.) ou OB. OM :: OM. OC, donc OB—OM. OB :: OM—OC. OM, c'est-à-dire BM. OB :: MC. MO, ou BM. MC :: BO. MO, & partant BM. BM+MC :: BO. BO+MO, c'est-à-dire BM. BC :: BO. BO+MO; mais à cause de MO = ON, nous avons BO+MO=BO+ON=BN, donc BM. BC :: BO. BN; or, les triangles BMT, BCH, BOX, BNP, étant semblables, leurs bases TM, HC, XO, PN sont en même raison que les côtés BM, BC, BO, BN; donc TM. HC :: XO. PN, & partant TM×PN=HC×XO; mais en menant du point d'attouchement H, l'ordonnée HQ au demi-diamétre conjugué OZ, laquelle sera paralelle à MN, nous aurons OQ. OZ :: OZ. OX, & à cause des paralelles HQ, CO, les paralelles HC, QO sont égales; donc HC. OZ :: OZ. OX, d'où je tire HC×OX $= \overline{OZ}^2$, & par conséquent TM×PN $= \overline{OZ}^2$, mais PN=MR

(*N.* 751.), donc TM×MR=$\overline{OZ}^2$, & on démontra de la même façon que TH×HP=$\overline{OE}^2$.

753. REMARQUE. De ce qui vient d'être dit dans le Corollaire précédent, nous tirerons cette Régle ou Théoreme. *Si une ligne droite* OB *est divisée en* C *&* M, *de façon qu'on ait* OC. OM :: OM. OB, *& qu'on lui ajoute du côté de* O *une droite* ON *égale à la moyenne proportionnelle* OM, *on aura* BM. BC :: BO. BN. Car c'est ce que nous venons de trouver dans ce Corollaire, & de ce premier Théoreme, j'en tire un second qui n'est pas moins important; sçavoir, *Si une ligne* OB *est divisée en* C *&* M, *de façon qu'on ait* OC. OM :: OM. OB, *& qu'on lui ajoute du côté de* O *une droite* ON *égale à la moyenne proportionnelle* OM; *la ligne entiere* OB *sera divisée harmoniquement aux points* M, C, *& l'on aura* BM. MC :: BN. CN. Ce que je prouverai ainsi

Par la supposition, nous avons OC. OM :: OM. OB ou OB. OM :: OM. OC; donc BO—OM. OM :: OM—OC. OC, c'est-à-dire BM. OM :: MC. OC, ou BM. MC :: OM. OC; de même à cause de BO. OM :: OM. OC, nous avons BO +OM. OM :: OM+OC. OC; mais OM=ON, donc BN. OM :: CN. OC, ou BN. CN :: OM. OC; mais nous venons de trouver BM. MC :: OM. OC, donc BM. MC :: BN. CN.

Et de-là il est aisé de prouver l'inverse de ce second Théoreme, c'est-à-dire, que *si une ligne* BN *est divisée harmoniquement aux points* M, C, *& qu'on divise la somme* MN *de deux de ses parties de suite* NC, CM *en deux également en* O, *on aura toujours* OC. OM :: OM. OB, & BM. BC :: BO. BN; ~~car puisque~~ BM. MC :: BN. CN, donc BN. BM :: CN. MC, & partant BN+BM. BM :: CN+MC. MC; or, BN=NM+MB, & CN+MC =MN; donc NM+2BM. BM :: MN. MC, & prenant les moitiés des antécedens, nous aurons ~~OM+MB~~. BM :: OM. MC, ou OB. BM :: OM. MC; donc OB—BM. OB :: OM—MC. OM, c'est-à-dire OM. OB :: OC. OM, ou OC. OM :: OM. OB; après quoi, à cause de ON égal à la moyenne proportionnelle, on aura comme ci-dessus BM. BC :: BO. BN.

754. PROBLEME. *Une Ellipse* ACBD (Fig. 475.) *étant donnée, trouver son centre, ses deux axes, & ses foyers.*

Je mene des lignes HL, PQ, &c. paralelles entr'elles, & qui se terminent de part & d'autre à la courbe; je les divise chacun en deux également aux points R, S, &c. & faisant passer une

ligne droite MN par les points R, S, &c. cette ligne eſt un diamétre, & par conſéquent le point O qui coupe cette ligne en deux également eſt le centre, & ſi les droites HL, PQ, &c. ſont perpendiculaires ſur MN, cette droite MN ſera l'un ou l'autre des deux axes.

Mais ſi cela n'eſt pas. Je décris du centre O un cercle qui coupe la courbe en quelque point T, ainſi le rayon OT de ce cercle eſt moindre que le demi-grand axe; car le cercle qui a pour rayon le grand axe, eſt circonſcrit à l'ellipſe & ne la coupe point, & ce même rayon OT eſt plus grand que le demi-petit axe, à cauſe que le cercle qui auroit pour rayon le demi-petit axe eſt inſcrit, & ne coupe pas non plus la courbe; donc le cercle du rayon OT doit couper l'ellipſe en quatre points T, X, Z, Y (*N.* 707.). Je mene par ces quatre points les droites TX, XZ, ZY, YT, & les coupant chacune en deux également, je mene par les points de diviſion les droites AB, DC qui ſe terminent à la courbe, & ces deux droites ſont les deux axes (*N.* 707.), & par conſéquent la plus grande AB eſt le plus grand axe, & l'autre eſt le petit.

Je prens avec le compas la grandeur AO du demi-grand axe, & de l'extrêmité D du petit axe, je décris un arc qui coupe le grand axe aux points F, V qui ſont les foyers (*N.* 719.).

755. PROBLEME. *Meſurer une Ellipſe* (Fig. 476.).

Je décris le cercle circonſcrit que je meſure, de même que l'axe & le petit axe; après quoi, je dis par Régle de Trois: le grand axe eſt au petit axe, comme le cercle circonſcrit eſt à un quatriéme terme qui ſera la valeur de l'ellipſe; car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle AEB eſt à la ſomme des ordonnées correſpondantes au grand axe de la demi-ellipſe ADB, comme le grand axe eſt au petit axe (*N.* 703.); il eſt clair que le cercle entier eſt à l'ellipſe entiere, auſſi comme le grand axe eſt au petit axe.

Ou bien je décris le cercle inſcrit que je meſure; & je dis par Regle de Trois; le petit axe eſt au grand, comme le cercle inſcrit eſt à un quatriéme terme qui ſera l'ellipſe; car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle CRD ou le demi-cercle CRD eſt à la ſomme des ordonnées au petit axe CD de la demi-ellipſe CAD ou à la demi-ellipſe CAD, comme le petit axe eſt au grand axe (*N.* 703.). Il s'enſuit que le cercle entier

infcrit CRDT eft à l'ellipfe entiere, comme le petit axe eft au grand.

Ou bien encore, je prens les valeurs en nombre du cercle circonfcrit, & du cercle infcrit, & le nombre moyen proportionnel Géometrique, entre ces deux nombres eft la valeur de l'ellipfe (*N.* 703.), c'eft-à-dire qu'en multipliant les valeurs des deux cercles l'une par l'autre, & tirant la racine quarrée du produit, cette racine fera l'ellipfe.

756. PROBLEME. *Mefurer un fegment d'Ellipfe* rAR *coupé par une double ordonnée* rR *au grand axe* (Fig. 477.).

Je décris le cercle circonfcrit ANB*n*, & je prolonge *r*R de part & d'autre jufqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en *n*, N, ce qui me donne le fegment de cercle *n*AN que je mefure; enfuite, je dis par Regle de Trois : le grand axe eft au petit, comme le fegment de cercle *n*AN eft à un quatriéme terme qui fera le fegment *r*AR; car chaque ordonnée HT du demi-fegment circulaire ANM, eft à chaque ordonnée HS du demi-fegment elliptique ARM comme OE, OC, ou comme le grand axe au petit axe (*N.* 689.); donc la fomme des ordonnées au demi-fegment circulaire ou le demi-fegment ANM eft à la fomme des ordonnées au demi-fegment ARM, ou au demi-fegment ARM, comme le grand axe eft au petit axe, & par conféquent le fegment entier *n*AN eft au fegment entier *r*AR dans la même raifon.

757. PROBLEME. *Mefurer un fecteur Elliptique* rARO (Fig. 477.) *dont la corde* rR *eft double ordonnée au grand axe.*

Je prolonge la corde *r*R jufqu'à ce qu'elle coupe de part & d'autre la circonférence du cercle circonfcrit en *n*, N, & de ces points, je mene au centre O des droites *n*O, NO, ce qui me donne un fecteur de cercle *n*ANO que je mefure; enfuite je dis par Regle de Trois : le grand axe eft au petit comme le fecteur circulaire *n*ANO eft à un quatriéme terme qui fera le fecteur elliptique *r*ARO. Car le demi-fegment circulaire ANM eft au demi-fegment elliptique ARM comme le grand axe eft au petit (*N.* 756.), & les triangles MNO, MRO ayant la hauteur commune, font entr'eux comme leurs bafes MN, MR, ou comme OE eft à OC, ou enfin, comme le grand axe au petit. donc le demi-fegment ANM, plus le triangle MNO, c'eft-à-dire le demi-fecteur circulaire ANO eft au demi-fegment ARM, plus le triangle MRO, c'eft-à-dire au demi-fecteur ARO, comme le grand

axe au petit, & par conféquent le fecteur entier *n*ANO eft au fecteur entier *r*ARO, comme le grand axe eft au petit.

758. *Remarque.* Si le fegment elliptique *r*CR (*Fig.* 478.) étoit fait par une double ordonnée *r*R au petit axe, on décriroit le cercle infcrit C*n*DN, & l'on diroit par Regle de Trois: le petit axe eft au grand comme le fegment circulaire NC*n* eft à nn quatriéme terme qui feroit le fegment elliptique *r*CR. De même pour avoir le fecteur *r*CRO, on diroit par Régle de Trois: le petit axe eft au grand axe, comme le fecteur circulaire *n*CNO, eft à un quatriéme terme qui feroit le fecteur *r*CRO. Ce qui fe démontre aifément, puifque toutes les ordonnées au demi-fegment circulaire C*n*M font aux ordônnées du demi-fegment elliptique C*r*M, comme le petit axe eft au grand (*N.* 702.), & que le triangle M*n*O eft au triangle M*r*O, comme M*n* eft à M*r*, ou comme le petit axe eft au grand.

759. Probleme. *Mefurer un fegment Elliptique* HRL *coupé par une bafe* HL *oblique au grand axe & au petit* (Fig. 479.).

Je coupe le grand axe AB en Z en même raifon que le diamétre RS de la bafe du fegment donné eft coupé en T, c'eft-à-dire, je fais RS. RT :: BA. BZ, & menant par le point Z une double ordonnée M*n*, le fegment MB*n* fera égal au fegment donné HRL, & par conféquent il n'y aura qu'à mefurer le fegment MB*n*, comme ci-deffus (*N.* 756.), & fa valeur fera la même que celle du fegment HRL, ce que je démontre ainfi.

Je conçois que la hauteur BZ du fegment MB*n* foit coupée en une infinité de parties égales, & que par les points de divifion foient menées des doubles ordonnées des extrêmités de chacune defquelles foient élevées des petites perpendiculaires, ce qui donnera des petits rectangles circonfcrits, qui auront tous une hauteur infiniment petite & égale à ZX. Je conçois de même que la partie RT du diamétre RS foit coupée en un même nombre de petites parties, qui par conféquent feront proportionnelles aux petites parties de BZ, & que par les points de divifion foient menées des doubles ordonnées à RT, aux extrêmités defquelles foient menées des petites lignes paralelles à RT, ce qui donnera autant de paralellogrammes circonfcrits au fegment HRL que de rectangles circonfcrits au fegment MB*n*; du fommet R du diamétre RS, j'abaiffe fur la bafe HL du fegment HRL la perpendiculaire RK, laquelle fera coupée par les doubles ordonnées du fegment HRL en parties égales & proportion-

nelles aux parties de RT, & par conséquent proportionnelles aux parties de BZ; ainsi les hauteurs des paralellogrammes circonscrits au segment HRL seront égales entr'elles, & à la hauteur EK du premier de ces paralellogrammes; or, les hauteurs des paralellogrammes étant infiniment petites, il est clair que la somme de ces paralellogrammes ne differera pas du segment HRL, de même que la somme des rectangles circonscrits au segment MB*n* ne differera pas de ce segment. Si je fais donc voir que les paralellogrammes circonscrits au segment HRL sont ensemble égaux aux rectangles circonscrits au segment MB*n*, il s'ensuivra nécessairement que les deux segmens sont égaux.

A cause que l'axe & le diamétre sont coupés proportionnellement, nous aurons BZ. BA :: RT. RS, & ZA. BA :: TS. RS; & multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons BZ×ZA. $\overline{BA}^2$ :: RT×TS. $\overline{RS}^2$, ou BZ×ZA. RT×TS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$; par un semblable raisonnement, nous trouverons BX×XA. RQ×QS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$, & par conséquent nous aurons BZ×ZA. RT×TS :: BX×XA. RQ×QS, ou BZ×ZA. BX×XA :: RT×TS. RQ×QS, & mettant au lieu des deux premiers termes BZ×ZA, & BX×XA les quarrés $\overline{MZ}^2$. $\overline{VX}^2$ qui sont en même raison, & au lieu des deux derniers termes RT×TS, RQ×QS, les quarrés $\overline{HT}^2$, $\overline{FQ}^2$ qui sont aussi en même raison, nous aurons $\overline{MZ}^2$. $\overline{VX}^2$ :: $\overline{HT}^2$. $\overline{FQ}^2$, d'où l'on tire MZ. VX :: HT. FQ, & par conséquent M*n*. V*u* :: HL. F*f*, *c'est-à-dire* les bases des rectangles circonscrits au segment MB*n* sont entr'elles comme les bases des paralellogrammes circonscrits au segment HRL.

Maintenant le petit rectangle fait sur la base M*n* est M*n*×ZX, & le petit paralellogramme fait sur la base HL est HL×EK; or, ZX. ZB :: EK. RK, multiplant donc les termes de la premiere raison ZX, ZB par M*n*, & les termes de la seconde raison EK, RK par HL, nous aurons M*n*×ZX. M*n*×ZB :: HL×EK. HL×RK ou M*n*×ZX. HL×EK :: M*n*×ZB. HL×RK, c'est-à-dire le petit rectangle fait sur M*n* est au petit paralellogramme fait sur HL, comme le rectangle M*n*×ZB est au rectangle HL×RK. De même le petit rectangle fait sur V*u*, est V*u*×ZX, & le petit paralellogramme fait sur F*f*, est F*f*×EK; or, V*u*. E*f* :: M*n*. HL, &

ZX. EK :: ZB. BK; multipliant donc enſemble les termes de ces deux proportions, nous aurons V*u*×ZX. F*f*×EK :: M*n*×ZB. HL×RK; ainſi le petit rectangle, & le petit paralellogramme ſont encore entr'eux comme le rectangle M*n*×ZB eſt au paralellogramme HL×RK; & comme on trouvera toujours la même choſe en comparant chaque petit rectangle circonſcrit au ſegment MB*n* à chaque petit paralellogramme circonſcrit au ſegment HRL; il s'enſuit que la ſomme des petits rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*, c'eſt-à-dire le ſegment MB*n* eſt à la ſomme des petits paralellogrammes circonſcrits au ſegment HLR, c'eſt-à-dire au ſegment HRL, comme le rectangle M*n*×ZB eſt au rectangle HL×RK. Mais le rectangle MN×ZB eſt double du plus grand triangle MB*n* inſcrit au ſegment MB*n*, & le rectangle HL×RK eſt double du plus grand triangle HRL inſcrit au ſegment; donc ces deux triangles inſcrits MB*n*, HRL ſont entr'eux comme les ſegmens; or, les deux triangles MB*n*, HRL ſont égaux (*N.* 737.); donc les deux ſegmens MB*n*, HRL ſont auſſi égaux.

760. PROBLEME. *Meſurer un ſecteur Elliptique* HRLO *dont la corde* HL *eſt oblique aux deux axes* (Fig. 479.).

Je coupe le grand axe en Z en même raiſon que le diamétre RS de la corde HL du ſecteur eſt coupée en T; je mene par Z la double ordonnée M*n* au grand axe, & du centre O, je mene les droites MO, *n*O, ce qui me donne un ſecteur MO*n*B égal au ſecteur HRLO; ainſi meſurant MONB, comme ci-deſſus (*N.* 759.), ſa valeur ſera celle du ſecteur HRLO.

Car menant la droite OI perpendiculaire ſur HL, cette droite ſera la hauteur du triangle HOL, & la hauteur du triangle MO*n* ſera la droite OZ; or, à cauſe que l'axe & le diamétre ſont coupés en deux également en O, & proportionnellement en T & Z, nous aurons BZ. ZO :: RT. TO, & à cauſe des triangles ſemblables RTK, TOI, nous avons RT. TO :: RK. OI; donc BZ. ZO :: RK. OI, ou BZ. RK :: ZO. OI; or, les plus grands triangles MB*n*, HRL inſcrits dans les ſegmens MB*n*, HRL étant égaux (*N.* 737.), ont les baſes réciproques à leurs hauteurs; donc M*n*. HL :: RK. ZB, ou ZB. RK :: HL. M*n*, & partant ZO. OI :: HL. M*n*, d'où l'on tire ZO×M*n*=HL×OI; or, ZO×M*n* eſt le double du triangle MO*n*, & HL×OI eſt le double du triangle HLO, donc ces deux triangles ſont égaux;

or, les deux fegmens B*n*, MHRL font auffi égaux (*N.* 759.); donc les deux fecteurs MO*n*B, HOLR le font auffi.

761. PROPOSITION CXLIX. *Si l'on fait paffer un cercle par les extrêmités* C, D *du petit axe* (Fig. 480.) *& par l'une des extrêmités* A *du grand axe, la portion de circonference* CHD *qui fera du côté de l'autre extrêmité* B *du grand axe fera toute entiere dans l'ellipfe, & l'autre portion* CNAD *fera toute entiere hors de l'ellipfe.*

A caufe que dans le cercle la droite CD eft coupée en deux également en O par la droite OH qui lui eft perpendiculaire, la droite OH eft partie du diamétre du cercle, & par conféquent CO étant une ordonnée à ce diamétre, nous avons AO. OC :: OC. OH, mais AO eft plus grand que CO; donc à plus forte raifon eft-elle plus grande que OH, & par conféquent OH étant moindre que OB = AO, le point H eft dans l'ellipfe.

Je mene par le fommet A la droite AT perpendiculaire au grand axe AB & égale à fon paramétre; ainfi AT fera moindre que AB, puifque le paramétre du grand axe eft troifiéme proportionnelle au grand axe & au petit (*N.* 691.) de l'extrêmité T, du paramétre, je mene la droite TB à l'autre extrêmité B du grand axe, & du point H je mene la droite indéfinie HK qui paffe par le point G où la droite TB coupe le petit axe. Il eft vifible par cette conftruction que la partie HG de la droite HK eft toute entiere dans le triangle TBA, & que fon autre partie GK eft toute entiere hors de ce triangle. Cela pofé:

La droite CO étant ordonnée au diamétre AH du cercle; nous avons $\overline{CO}^2 = AO \times OH$, & la même droite CO étant auffi ordonnée au grand axe, nous avons $\overline{CO}^2 = AO \times OG$ (*N.* 693.) donc $AO \times OH = AO \times OG$, & partant OH = OG. Je conçois que de tous les points de la partie OH de l'axe foient menées des ordonnées à l'ellipfe telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ, nous aurons par la proprieté de l'ellipfe $\overline{PE}^2 = AP \times PV$ (*N.* 693.) & par la proprieté du cercle $\overline{PQ}^2 = AP \times PH$; or les triangles femblables GOH, ZPH donnent GO. OH :: ZP. PH, & nous venons de trouver GO = OH; donc ZP = PH; mais ZP eft moindre que VP, à caufe que la droite GH étant toute entiere dans le triangle OGB, la droite ZP ne peut couper GB fans être prolongée; donc PH eft auffi moindre que PV, & par conféquent $AP \times PH$ ou $\overline{PQ}^2$ eft moindre

moindre que AP × PV ou $\overline{PE}^2$, d'où il suit que l'ordonnée PQ du cercle est moindre que l'ordonnée PE de l'ellipse, & comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipse qui passeront par la droite HO; il s'ensuit que l'arc CHD du cercle est tout entier dans l'ellipse, ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je conçois de même que de tous les points de la partie AO du grand axe soient menées des ordonnées à l'ellipse telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN, nous aurons par la propriété de l'ellipse $\overline{MR}^2$ = AM × MS (*N. 693.*) & par celle du cercle $\overline{MN}^2$ = AM × MH; or les triangles semblables GOH, XMH donnent GO. OH :: XM. MH; donc XM = MH à cause de GO = OH; mais XM est plus grand que SM, à cause que GK est toute entiere hors du triangle TAB; donc MH est aussi plus grand que SM, & par conséquent AM × MH, ou $\overline{NM}^2$ est plus grand que AM × MS ou $\overline{MR}^2$; d'où il suit que l'ordonnée NM au cercle est plus grande que l'ordonnée MR à l'ellipse; & comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipse que l'on menera de tous les points de AO de part & d'autre, il s'ensuit que l'arc de cercle CAD est tout entier hors de l'ellipse; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

762. PROPOSITION CL. *Si l'on fait passer un cercle par les extrémités* A, B *du grand axe, & par l'une des extrémités* D *du petit axe* (Fig. 481.) *la portion* AHB *de circonference qui sera du côte de l'autre extrêmite* C *du petit axe, sera toute entiere hors de l'ellipse, & l'autre portion* ADB *sera toute entiere dans l'ellipse.*

A cause que dans le cercle la droite AB est coupée en deux également en O par la droite HD qui lui est perpendiculaire, la droite HD est le diamétre du cercle; ainsi AO étant ordonnée à ce diamétre, nous avons DO. OA :: OA. OH; mais DO est moindre que OA; donc à plus forte raison est-il moindre que HO, & par conséquent HO étant plus grand que CO = DO, le point H est hors de l'ellipse.

Je mene par le point D la droite DT perpendiculaire au petit axe & égale à son paramétre; ainsi DT sera plus grand que le petit axe DC, à cause que le paramétre du petit axe est troisiéme proportionnelle au petit axe & au grand (*N. 691.*) de l'extrê-

mité T du paramétre, je mene la droite TC à l'autre extrêmité du petit axe, & du point H la droite indéfinie HK qui passe par le point G où la droite TC coupe le grand axe prolongé s'il le faut; il est visible que la partie GK de HK sera toute entiere dans le triangle CTD, & que son autre partie HG sera toute entiere hors de ce triangle: cela posé.

La droite AO étant ordonnée au cercle donne $\overline{AO}^2 = DO \times OH$, & la même droite étant ordonnée au petit axe de l'ellipse, nous avons $\overline{AO}^2 = DO \times OG$ (*N.* 701.) donc $DO \times OH = DO \times OG$, & partant $OH = OG$. Je conçois que de tous les points de OC soient menées des ordonnées à l'ellipse telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ, nous aurons par la proprieté de l'ellipse $\overline{PE}^2 = DP \times PV$, & par celle du cercle $\overline{PQ}^2 = DP \times PH$; or les triangles semblables GOH, ZPH donnent GO. OH :: ZP. PH; donc $ZP = PH$ à cause de $GO = OH$; mais ZP est plus grand que PV à cause que HG est toute entiere hors du triangle TDC, dans lequel VP est renfermé; donc PH est aussi plus grand que PV, & par conséquent $DP \times PH$ ou $\overline{PQ}^2$ est plus grand que $DP \times PV$ ou $\overline{PE}^2$; d'où il suit que l'ordonnée PQ du cercle est plus grande que l'ordonnée PE de l'ellipse, & comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipse menées de tous les points de OC de part & d'autre, il s'ensuit que l'arc du cercle AHB est tout entier hors de l'ellipse; ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Je conçois de même que de tous les points de DO soient menées des ordonnées à l'ellipse telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN, nous aurons par la proprieté de l'ellipse $\overline{MR}^2 = DM \times MS$, & par celle du cercle $\overline{MN}^2 = DM \times MH$; mais les triangles semblables GOH, XMH donnent GO. OH :: XM. MH; donc $XM = MH$ à cause de $GO = HO$; or XM est moindre que MS à cause que la droite GXK est toute entiere dans le triangle CTD; donc MH est moindre aussi que MS, & par conséquent $DM \times MH$ ou $\overline{MN}^2$ est moindre que $DM \times MS$ ou $\overline{MR}^2$; d'où il suit que l'ordonnée MN du cercle est moindre que l'ordonnée MR de l'ellipse; & comme la mê-

me chose arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipse menées par tous les points de DO de part & d'autre, il s'ensuit que l'arc du cercle ADB est tout entier dans l'ellipse; ce qu'il falloit, 2°. démontrer.

763. COROLLAIRE I. *De tous les angles tels que* CAD, CPD, *&c.* (Fig. 482.) *qui ont leurs sommets sur la courbe d'une ellipse & qui s'appuyent sur le petit axe* CD, *le plus petit est celui qui a son sommet à l'une ou l'autre des extrémités* A *du grand axe & de tous les angles tels que* ADB, APB, *&c.* (Fig. 483.) *qui ont leurs sommets sur la courbe & qui s'appuyent sur le grand axe* AB, *le plus grand est celui qui a son sommet à l'une ou l'autre des extrémités du petit axe.*

Je fais passer un cercle par les extrémités C, D du petit axe (*Fig.* 482.) & par le sommet A du grand axe; ainsi l'arc CARD est tout entier hors de l'ellipse (*N.* 761.) je prolonge CP jusqu'à la circonférence du cercle en R, & du point R je mene la ligne RD, les angles CAD, CRD ont leurs sommets à la circonférence du cercle & s'appuyent sur le même arc CHD; donc ces deux angles sont égaux; mais l'angle CPD étant externe au triangle RPD, est plus grand que l'angle interne PRD; donc l'angle CAD égal à l'angle CRD est moindre que l'angle CPD, & la même chose se démontrera de tous les angles qui auront leurs sommets sur la demi-ellipse ABD si l'on décrit un cercle qui passe par les points C, D, B.

De même je fais passer par les extrémités A, B du grand axe (*Fig.* 483.) & par l'extrémité D du petit axe un cercle ARDH, & par conséquent l'arc ARDB de ce cercle est tout entier dans l'ellipse (*N.* 762.) je mene par le point R où la droite BP coupe cet arc, la droite RA & les deux angles ARB, ADB sont égaux à cause qu'ils sont à la circonférence du cercle & qu'ils s'appuyent sur le même arc AHB; mais ARB étant extérieur au triangle, RPA est plus grand que l'angle intérieur BPA; donc l'angle ADB égal à l'angle ARB, est plus grand que l'angle BPA, & ainsi des autres.

764. COROLLAIRE II. *De tous les angles aigus que les diamétres font avec leurs ordonnées, le moindre est celui que fait l'un ou l'autre des deux diamétres conjugués & égaux.*

Soit l'ellipse ADBC (*Fig.* 484.) je mene par les extrêmités des axes les droites AD, BD, BC, CA, & par le centre O menant la droite HOS paralelle à AC, cette droite est l'un des

deux diamétres conjugués égaux (*N.* 748.) & l'angle aigu OQD qu'il fait avec son ordonnée AD est égal à l'angle CAD. Soit un autre diamétre quelconque MP différent du diamétre conjugué de HS; par le point D je mene une double ordonnée DR au diamétre MP, laquelle ira aboutir sur la courbe en un point R différent du sommet A du grand axe; car si elle alloit aboutir en A elle seroit ordonnée au diamétre HS & non pas au diamétre MP; du point R je mene la droite RC, & à cause de RD divisée en deux également en T par son diamétre, & de DC divisé en deux également en O, les droites RC, TO sont paralelles, & l'angle aigu OTD que le diamétre PM fait avec son ordonnée DR est égal à l'angle DRC; mais l'angle DRC est plus grand que l'angle DAC ou son égal DQO (*N.* 763.) donc l'angle OTD est aussi plus grand que DQO.

765. COROLLAIRE III. *De tous les angles obtus que les diametres font avec leurs ordonnées, le plus grand est celui que fait l'un ou l'autre des deux diamétres conjugués égaux.* C'est une suite évidente du Corollaire précédent; car tous les diamétres font avec leurs ordonnées deux angles, l'un aigu & l'autre obtus qui valent ensemble deux droits; ainsi puisque le diamétre HS qui est l'un des deux conjugués égaux fait avec ses ordonnées un angle aigu moindre que chacun des angles aigus que les autres diamétres font avec leurs ordonnées, il est clair que l'angle obtus OQA que le même diamétre HS fait avec ses ordonnées doit être plus grand que chacun des angles obtus que les autres diamétres font avec leurs ordonnées, & cet angle OQA est égal à l'angle ADB qui a son sommet en D, & qui s'appuye sur le grand axe à cause des paralelles SQ, DB, & AD, CB.

766. PROBLEME. *Une Ellipse* ADBC *étant donnée* (Fig. 486.) *trouver un diamétre qui fasse avec ses ordonnées un angle égal à un angle donné* abc.

Si l'angle donné est droit, il est clair que les deux axes satisfont à la question; si l'angle donné est aigu & égal à l'angle qui auroit son sommet à l'extrêmité A du grand axe & qui s'appuyeroit sur le petit axe, le diamétre demandé seroit l'un ou l'autre des deux conjugués égaux (*N.* 764.) & de même si l'angle donné étoit obtus & égal à l'angle qui auroit son sommet à l'extrêmité C du petit axe & qui s'appuyeroit sur le grand axe, le diamétre demandé seroit encore l'un ou l'autre des deux conjugués égaux. (*N.* 765.) ainsi la question se réduit à trouver un diamétre qui

faſſe avec ſes ordonnées un angle aigu plus grand que celui qui s'appuyeroit ſur CD & qui auroit ſon ſommet en A ou un angle obtus moindre que celui qui auroit ſon ſommet en C & qui s'appuyeroit ſur le grand axe ; & comme l'angle aigu qu'un diamétre fait avec ſes ordonnées étant donné, l'angle obtus qu'il fait avec les mêmes ordonnées eſt connu ; la queſtion ſe réduit encore à trouver un diamétre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle donné obtus *abc*, moindre que l'angle qui auroit ſon ſommet en C. Cela poſé.

Je fais en A un angle LAB égal à l'angle aigu, *abd* qui eſt le complement de l'angle donné obtus *abc* ; j'éleve en A la droite AX perpendiculaire ſur LA, du point X où la droite AX coupe le petit axe CD, je décris avec le rayon XA un cercle HAKB ; & par l'un ou l'autre des points R, S où le cercle coupe la courbe, par exemple par le point S, je mene aux extrêmités du grand axe les droites SA, SB. Je coupe ces deux droites chacune en deux également en T & Z, & par les points de diviſion & par le centre O de l'ellipſe, je mene les droites VP, QE qui feront deux diamétres conjugués qui feront avec leurs ordonnées un angle obtus égal à l'angle donné ; & ſi je fais la même choſe au point R, je trouverai encore deux autres diamétres conjugués qui feront auſſi avec leurs ordonnées le même angle obtus. Et voici la démonſtration.

1°. Le cercle paſſera par l'autre extrêmité B du grand axe ; car les triangles rectangles XAO, XBO ſont égaux à cauſe du côté AO égal au côté OB, & du côté commun OX, & par conſéquent XB = AX, ainſi XB eſt rayon du cercle. 2°. L'arc AHB du ſegment AHB paſſe dans l'ellipſe du côté de A & du côté de B ; car la tangente LA étant perpendiculaire ſur AX, eſt oblique au grand axe & à ſa tangente AG ; d'où il ſuit que LA entre dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon l'arc AHB. De même ſi je mene en B la droite BF tangente au cercle, cette tangente entrera auſſi dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon BHA. 3°. Tout angle inſcrit dans le ſegment BHA, tel que l'angle ASB eſt égal à l'angle donné *abc* ; car l'angle du ſegment LAB étant égal à l'angle aigu *abd*, tout angle inſcrit dans l'autre ſegment tel que l'angle AKB ſera auſſi égal à l'angle aigu *abd*, à cauſe que AKB eſt égal à l'angle LAB ; or l'angle ASB & l'angle AKB valent enſemble deux droits à cauſe qu'ils embraſſent enſemble la circonférence entiere ; donc puiſque l'angle AKB eſt égal à l'angle *abd*,

l'angle ASB doit être égal à l'angle *abc* qui joint avec *abd* vaut aussi deux droits. 4°. L'arc AHB doit couper (*Fig.* 486.) le petit axe en un point H hors de l'ellipse; car s'il le coupoit à l'extrêmité C, l'angle ASB inscrit dans le segment ACB seroit égal à l'angle qui a son sommet à l'extrêmité du petit axe & qui s'appuye sur le grand, ce qui est contre la supposition; & s'il le coupoit en dedans de l'ellipse en un point H, l'angle AHB inscrit dans le segment seroit plus grand que l'angle ACB à cause de l'angle externe AHO plus grand que l'interne ACH, & de l'angle externe BHO plus grand que l'interne BCH, ce qui est encore contre la supposition. 5°. donc, puisque l'arc AHB (*Fig.* 486.) entre dans l'ellipse du côté de A & de B, & qu'ensuite il coupe le petit axe hors de l'ellipse, il faut nécessairement qu'il coupe l'ellipse en deux points R, S; or tout cela posé, il est clair que les droites QE, SA sont paralelles à cause que BS est divisé en deux également en Z, de même que BA en O, ce qui rend les triangles BOZ, BAS semblables entr'eux & l'angle EZB que le diamétre EQ fait avec son ordonnée SB égal à l'angle ASB ou à son égal *abc*. De même à cause de SA divisé en deux également en T, de même que AB en O, les droites TO, SB sont paralelles, & l'angle ATP que le diamétre VP fait avec son ordonnée SA est aussi égal à l'angle ASB ou à l'angle donné *abc*; ainsi les deux diamétres QE, VP satisfont à la question, & ces diamétres sont conjugués entr'eux, puisqu'ils sont mutuellement paralelles à leurs ordonnées, & on prouveroit la même chose des deux autres diamétres que j'aurois trouvé si je m'étois servi du point R.

De l'Hyperbole considerée dans un Plan hors du Cône.

767. **Probleme.** *Décrire une Hyperbole.*

Je prens deux lignes droites AB, CD (*Fig.* 487.) égales ou inégales; je les mets perpendiculairement l'une sur l'autre, ensorte qu'elles se coupent chacune en deux également en O. Je prolonge indéfiniment l'une des deux AB; je coupe le prolongement BY en parties égales BM, MS, très-petites, & je fais passer par les points de division des perpendiculaires RV, LX. Je décris un cercle autour de la ligne AB, & du point M menant la tangente MN, je cherche une quatriéme proportionnelle aux deux lignes AB, CD & à la tangente MN, & je porte cette

quatriéme proportionnelle sur la perpendiculaire RMV, de M en R & de M en V. De même du point S je mene la tangente ST, & cherchant une quatriéme proportionnelle aux deux lignes AB, CD & à la tangente ST, je la porte sur la perpendiculaire LX de S en L & de S en X. Je fais la même chose à l'égard des autres perpendiculaires menées sur les points de division de RY, & faisant passer une courbe par les points trouvés, & par le point B, les ordonnées de cette courbe sont RM, LS, &c. les abscisses BM, BS, &c. & il reste à prouver que c'est une hyperbole.

Par la construction, nous avons AB. CD :: MN. MR, & AB. CD :: ST. SL; donc MN. MR :: ST. SL, ou MN. ST :: MR. SL, c'est-à-dire les ordonnées MR, SL, &c. de notre courbe sont entr'elles comme les tangentes au cercle menées des points M. S, &c. où ces ordonnées coupent leurs abscisses. Donc élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MN}^2 . \overline{ST}^2 :: \overline{MR}^2 . \overline{SL}^2$. Or $\overline{MN}^2 = MB \times AM$ (*N.* 271.) & $\overline{ST}^2 = SB \times AS$; donc $MB \times AM . SB \times AS :: \overline{MR}^2 . \overline{SL}^2$, c'est-à-dire les quarrés des ordonnées MR. SL sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses multipliées par la ligne AB augmentée de ces mêmes abscisses, & par conséquent la courbe est une hyperbole (*N.* 634.)

768. *Nota*, 1°. Que les tangentes MN, ST devenant d'autant plus grandes que les points M, S, &c. sont plus éloignées du point B, les ordonnées MR, SL, &c. qui sont quatriémes proportionnelles ~~aux droites AB, CD & aux~~ tangentes, deviennent aussi plus grandes à mesure qu'elles s'éloignent du sommet B, & que par conséquent la courbe peut s'étendre à l'infini en s'éloignant de plus en plus de part & d'autre de la ligne BY. 2°. Que si l'on fait la ~~même construction~~ du côté de A, on aura une autre courbe QZA semblable & égale à la premiere HBP.

769. DEFINITION. La droite AB, se nomme premier *axe*, la droite CD second *axe*, le point O où ces droites se coupent, *centre*, & les deux courbes HBP, QAZ, *Hyperboles opposées*. Toute ligne qui passe par le centre O, & qui coupe les hyperboles opposées, se nomme *premier diamétre*, celles qui passent par le centre O, & qui ne coupent point les hyperboles, se nomment *seconds diamétres*. Le *paramétre* du premier axe est une ligne troisiéme proportionnelle au premier axe & au second; & le *para-*

métre du second axe est une ligne troisiéme proportionnelle au second axe & au premier.

Au reste, la ligne CD est nommée second axe, à cause qu'elle coupe en deux également toutes les lignes telles que V*u* qui lui sont perpendiculaires & qui se terminent sur les hyperboles; car il est visible que si l'on prend dans ces deux courbes deux ordonnées MV, *mu* également éloignées de leurs sommets B, A, & par conséquent égales, la ligne V*u* menée par leurs extrêmités sera perpendiculaire à CD qui la coupera en deux également, à cause que M*m* est coupée en deux également par CD.

770. COROLLAIRE Ier. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LS *au premier axe est au rectangle correspondant* SB × AS, *comme le quarré du petit axe est au quarré du grand axe.* Par la construction, nous avons LS. ST :: CD. AB. Donc $\overline{LS}^2$. $\overline{ST}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. Or $\overline{ST}^2$ = SB × AS (*N.* 271.) Donc $\overline{LS}^2$. SB × AS :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$.

771. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LS *au premier axe, est au rectangle correspondant* SB × AS *comme le paramétre du premier axe est au premier axe* AB. Je nomme P le paramétre du premier axe, & par la définition de ce paramétre, nous avons :: AB. CD. P (*N.* 769.) Donc $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$ :: AB. P (*N.* 393.) ou $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: P. AB. Or par le Corollaire précédent nous avons $\overline{LS}^2$. SB × AS :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. Donc $\overline{LS}^2$. SB × AS :: P. AB.

772. COROLLAIRE III. *Si au sommet* B *du premier axe* AB (Fig. 488.) *on éleve une perpendiculaire* HB *égale au paramétre de cet axe, & que par l'extrêmité* H *de ce paramétre & l'autre extrêmité* A *de l'axe* AB, *on mene une droite indéfinie* AT *qui coupe en* T *une ordonnée quelconque* SL *prolongée, s'il le faut, le quarré* LS *de cette ordonnée est égal au rectangle de son abscisse* SB *multipliée par la droite* TS. Les triangles semblables ABH, AST donnent AB. BH :: AS. ST; & multipliant les deux derniers termes par BS, nous aurons AB. BH :: AS × BS. TS × BS, ou TS × BS. AS × BS :: BH. AB; or $\overline{LS}^2$. AS × BS :: BH. AB (*N.* 77.1) donc TS × BS. AS × BS :: $\overline{LS}^2$. AS × BS, & par conséquent TS × BS = $\overline{LS}^2$. à cause des deux conséquens égaux.

773. COROLLAIRE IV. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LV *au*

au second axe CD (Fig. 489.) *est au quarré de son abscisse* VO. *plus le quarré du demi-second axe* DO, *comme le quarré du premier axe est au quarré du second.* Du point L je mene l'ordonnée LS au premier axe, & j'ai $\overline{LS}^2$. SB × SA :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. (*N.* 770.) or à cause que AB est divisé en deux également en O, & que BS lui est ajoutée, nous avons SB × SA $= \overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$; mais les quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{AB}^2$ des axes sont entr'eux comme les quarrés $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$ de leurs moitiés; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, ou $\overline{LS}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$; & composant, nous aurons $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2 + \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$, c'est-à-dire $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OS}^2$. $\overline{BO}^2$. Mais LS = VO, & OS = VL, à cause que VOSL est un paralelogramme; donc $\overline{LS}^2 = \overline{VO}^2$ & $\overline{OS}^2 = \overline{VL}^2$, & substituant ces valeurs dans la derniere proportion, nous aurons $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{VL}^2$. $\overline{BO}^2$, ou $\overline{VL}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$ :: $\overline{BO}^2$. $\overline{DO}^2$ :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$.

Nota. Nous ferons voir dans la suite d'où vient que la proprieté de l'hyperbole par rapport au second axe, n'est pas ici la même que par rapport au premier.

774. COROLLAIRE V. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* LV *au second axe est au quarré de son abscisse* VO, *plus le quarré du demi second axe* CO, *comme le parametre de cet axe est à cet axe* CD. Je nomme p le paramétre du second axe, & par la définition de ce paramétre j'ai :: CD. AB. p. donc $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: CD. p. (*N.* 393.) ou p. CD :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$. Mais nous avons $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$ :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$. Donc $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$. p. CD.

775. VI. *Toute ligne* OZ (Fig. 489.) *qui passe par le centre* O, *& qui coupe l'hyperbole ne la coupe qu'en un seul point* R. Du point R je mene l'ordonnée RM au premier axe, & d'un autre point quelconque S pris sur BS en dessous de M, je mene une autre ordonnée LS qui coupe OZ en T; les triangles semblables OMR, OST donnent MR. TS :: OM. OS; donc $\overline{RM}^2$. $\overline{TS}^2$ :: $\overline{OM}^2$. $\overline{OS}^2$. Or par la proprieté de l'hyperbole, nous avons

$\overline{RM}^2 . \overline{LS}^2 :: MB \times AM \times SB \times AS$ (*N*.767.) $:: \overline{MO}^2 - \overline{BO}^2 . \overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N*. 148.) ; mais $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$ est moindre par rapport à $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$ que $\overline{OM}^2$ par rapport à $\overline{OS}^2$; car afin qu'il y eût proportion entre les quatre termes $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$, $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$, & $\overline{OS}^2$, il faudroit que la partie $\overline{BO}^2$ qu'on retranche de $\overline{MO}^2$ fût à la partie $\overline{OB}^2$ qu'on retranche de $\overline{SO}^2$ en même raison que $\overline{MO}^2$ est à $\overline{SO}^2$, & par conséquent il faudroit que la partie $\overline{BO}^2$ retranchée de $\overline{MO}^2$ fût moindre que la partie $\overline{BO}^2$ retranchée de $\overline{SO}^2$. Donc puisqu'on retranche de $\overline{MO}^2$ plus qu'il ne faut ; il s'ensuit nécessairement que $\overline{MO}^2 - \overline{BO}^2$ est moindre par rapport à $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$, que $\overline{MO}^2$ par rapport à $\overline{OS}^2$, & par conséquent $\overline{RM}^2$ est aussi moindre par rapport à $\overline{LS}^2$ que $\overline{RM}^2$ par rapport à $\overline{TS}^2$, d'où il suit que $\overline{LS}^2$ est plus grand que $\overline{TS}^2$, & partant LS est plus grand que TS, & le point T de la droite OT est dans l'hyperbole, & comme on prouvera la même chose à l'égard de tous les points de la droite RZ, il est clair que cette droite est toute dans l'hyperbole.

776. COROLLAIRE VII. *Si une droite* OR *qui passe par le centre* O *coupe l'hyperbole en un point* R, *je dis que cette ligne étant prolongée au-delà du sommet, coupera l'hyperbole opposée en un point* X, *de façon que la ligne entiere* RX *sera divisée en deux également par le centre* O. Je mene l'ordonnée RM, je fais OX=OR, & par le point X, je mene XZ paralelle à RM jusqu'à ce qu'elle coupe le premier axe BA prolongé en Z, les triangles semblables ORM, OXZ donnent OR. OX :: OM. OZ, & partant OM=OZ ; or, OB=OA, donc l'abscisse BM est égale à l'abscisse AZ, & par conséquent l'ordonnée RM doit être égale à l'ordonnée menée du point Z, à cause que les deux hyperboles opposées sont parfaitement égales ; mais dans les triangles semblables & égaux ORM, OXZ, nous avons RM=XZ, donc XZ est l'ordonnée menée du point X, & la droite RX coupée en deux également en O, passe par l'extrémité X de cette ordonnée, & l'on démontrera qu'elle coupe l'hyperbole opposée en X, ou que sa partie indéfinie XY, est toute dans l'hyperbole opposée de la même façon que nous avons démontré, que RZ est dans l'hyperbole (*N*.775.).

777. PROBLEME. *D'un point* L *pris sur l'hyperbole* (Fig. 490.), *mener une tangente à la courbe.*

Si le point L étoit au sommet B, il est clair que la tangente seroit la ligne BK menée paralellement aux ordonnées, car tous les points de la courbe de part & d'autre sont en dessous de cette ligne par la construction de l'hyperbole.

Mais si le point L n'est pas au sommet B, je mene l'ordonnée LS au premier axe, & prenant une troisiéme proportionnelle OT aux deux lignes OS, OB, je mene la droite LT qui est la tangente demandée, ce que je prouve ainsi:

Je décris autour du premier axe le cercle AVB, & du point T menant l'ordonnée TV à ce cercle, la droite VS menée de V par S est tangente de ce cercle, & j'ai OS. OB :: OB. OT, ou OT. OB :: OB. OS (*N.* 292.). Cela posé, je mene une autre ordonnée MR au premier axe, entre L & T, laquelle coupe l'hyperbole en R, & la droite LT en quelque point Q, sans m'embarrasser si ce point est dans l'hyperbole ou en dehors; les triangles semblables LTS, QTM, donnent LS. QM :: TS. TM, & menant du point M la droite MX paralelle à VS; j'ai TS. TM :: SV. MX, à cause des triangles semblables TSV, TMX; donc LS. QM :: SV. MX, & partant $\overline{LS}^2$. $\overline{QM}^2$ :: $\overline{SV}^2$. $\overline{MX}^2$; or, $\overline{SV}^2$ = SB×AS, donc $\overline{LS}^2$. $\overline{QM}^2$ :: SB×AS. $\overline{MX}^2$, ou $\overline{LS}^2$. SB×AS :: $\overline{QM}^2$. $\overline{MX}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2$. SB×AS :: $\overline{RM}^2$. MB×AM; donc $\overline{QM}^2$. $\overline{MX}^2$ :: $\overline{RM}^2$. MB × AM; mais $\overline{MX}^2$ est plus grand que MB×AM, à cause que MX est menée paralelle à la tangente SV du cercle (*N.* 306.); donc $\overline{QM}^2$ est aussi plus grand que $\overline{RM}^2$, & partant QM plus grand que RM, d'où il suit que le point Q de la ligne LT est hors de l'hyperbole, & on prouvera la même chose de tous les points de cette ligne compris entre L & T.

Je mene une autre ordonnée HP au premier axe en dessous du point L qui coupe la droite TLZ en Z, & je mene HN paralelle à la tangente SV du cercle, jusqu'à ce qu'elle coupe l'ordonnée TV de ce cercle en un point N. Les triangles semblables TLS, TZH, donnent LS. ZH :: ST. HT, & à cause des triangles semblables TSV, THN, nous avons ST. HT :: SV. HN; donc LS. ZH :: SV. HN, & $\overline{LS}^2$. $\overline{ZH}^2$ :: $\overline{SV}^2$. $\overline{HN}^2$, mais SV

$=SB\times AS$, donc $\overline{LS}^2 . \overline{ZH}^2 :: SB\times AS . \overline{HN}^2$, ou $\overline{LS}^2 . SB\times AS :: \overline{ZH}^2 . \overline{HN}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2 . SB \times AS :: \overline{PH}^2 . HB\times AB$, donc $\overline{PH}^2 . HB\times AH :: \overline{ZH}^2 . \overline{HN}^2$, mais $\overline{HN}^2$ est plus grand que $HB \times AH$ (*N.* 306.); donc $\overline{ZH}^2$ est plus grand que $\overline{PH}^2$, & ZH plus grand que PH; d'où il suit que le point Z de la droite ZT est hors de la courbe; on prouvera de la même façon que tous les autres points de cette ligne pris en dessous de L sont hors de la courbe; mais nous venons de voir que tous les points de la même ligne pris entre L & T, sont aussi hors de la courbe, donc TLX ne touche l'hyperbole qu'en L.

778. COROLLAIRE I[er]. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points d'une hyperbole* (Fig. 491.) *sont inclinées entr'elles, & se coupent entre leurs points d'attouchement.*

Si les tangentes LT, QP sont l'une d'un côté du premier axe, & l'autre de l'autre côté, il est clair que ces tangentes allant aboutir à l'axe, doivent se couper en Z entre leurs points d'attouchement L, Q.

Si les tangentes QP, RH sont d'un même côté de l'axe, je mene des points d'attouchement les ordonnées QS, RM, & j'ai pour la premiere :: SO. BO. OP (*N.* 777.), & pour la seconde :: MO. BO. OH; donc $SO\times OP=\overline{OB}^2$, & $MO \times OH=\overline{OB}^2$, d'où je tire $SO\times OP=MO\times OH$, & SO. MO :: OH. OP, or, SO est moindre que MO, donc OH est moindre que OP; donc la tangente RH, dont le point d'attouchement R est plus éloigné du sommet B coupe l'axe en un point H aussi plus éloigné du sommet, mais cette tangente ne peut passer de R en H, sans couper la tangente PQX, & elle ne peut la couper au point d'attouchement en Q, parce qu'alors elle toucheroit l'hyperbole en deux points R, Q; ce qui est impossible, elle ne peut pas non plus couper QP entre Q & P, car elle passeroit nécessairement dans l'hyperbole, & ne seroit plus tangente; donc il faut que RH coupe PQX en quelque point V entre R & Q.

779. COROLLAIRE II. *D'un même point* L, *on ne peut mener qu'une tangente à l'hyperbole.* Ce qui se démontre de même que pour la parabole (*N.* 646.).

780. COROLLAIRE III. *Une tangente* LT (Fig. 492.), *& l'ordonnée* **LS** *au premier axe, menée du point d'attouchement étant donnée,*

on aura 1°. SB. BT :: AS. AT. 2°. SB. ST :: SO. SA. Je décris autour du premier axe le cercle AVB, & du point T, menant à ce cercle l'ordonnée TV, la droite VS, menée du point V au point S fera tangente du cercle en V, à cause de :: SO. BO. OT (*N.* 292.); donc à l'égard du cercle, nous aurons SB. BT :: AS. AT (*N.* 296.), & SB. ST :: SO. SA (*N.* 294.); or, ces lignes font les mêmes à l'égard de l'yperbole. Donc, &c.

781. COROLLAIRE IV. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, si du point d'attouchement* L, *on éleve sur* TL *une perpendiculaire* LP; *je dis que la souperpendiculaire* SP *est à la distance* SO *de l'ordonnée* LS *au centre* O, *comme le parametre du premier axe est à cet axe.* Nommant P le paramétre du premier axe, nous avons $\overline{LS}^2$. SB×AS :: P. AB; or, à cause de la perpendiculaire LS abaissée du sommet du triangle rectangle TLP sur son hypothenuse TP, nous avons $\overline{LS}^2$=TS×SP, & à cause de SB. ST :: SO. SA (*N.* 780.), nous avons SB×SA=ST×SO; donc TS×SP. TS×SO :: P. AB; mais les deux rectangles TS×SP, TS×SO ayant une dimension commune TS, font entr'eux comme SP, SO, donc SP. SO :: P. AB.

782. COROLLAIRE V. *Posant encore les mêmes choses, si du point d'attouchement* L, *on mene l'ordonnée* LX *au second axe, & qu'on prolonge la tangente jusqu'à la rencontre de cet axe en* H, *on aura* HO×OX=$\overline{OC}^2$, *c'est-à-dire le rectangle* HO×OX, *égal au quarré du demi-petit axe.* Les triangles semblables SLT, HTO donnent ST. OT :: LS. OH, & multipliant les deux premiers termes par OS, & les deux derniers par LS, nous aurons ST×OS. OT×OS :: $\overline{LS}^2$ SL×OH ou OX×OH, à cause de OX=SL; or, à cause de SO. OB :: OB. OT (*N.* 777.), nous avons OT×OS=$\overline{OB}^2$, & parce que SB. ST :: SO. SA (*N.* 780.), nous aurons SB×AS =ST×SO, donc SB×AS. $\overline{OB}^2$ :: $\overline{SL}^2$. OH×OX, ou $\overline{SL}^2$. SB×AS :: OH×OX. $\overline{OB}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{SL}^2$. SB×AS :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, donc OH×OX. $\overline{OB}^2$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{OB}^2$, & partant OH×OX=$\overline{CO}^2$, à cause des conséquens égaux $\overline{OB}^2$, $\overline{OB}^2$.

783. *DEFINITION.* Si de l'extrémité D du second axe CD (*Fig.* 493.), on mene à l'extrémité du premier axe la droite DB, & qu'ayant pris avec le compas la droite DB, on la porte sur le

premier axe prolongé de part & d'autre de O en E, & de O en G, les points E, G, se nommeront les *Foyers* des hyperboles opposées.

784. COROLLAIRE. *Si de l'un des foyers* E *on mene une ordonnée* EF *au premier axe, le rectangle* EB×AE *correspondant à cette ordonnée est égal au quarré de la moitié* OD *du second axe.* Car dans le triangle rectangle ODB, nous avons $\overline{OD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$; or, $EB \times AE = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.* 148.), donc $\overline{OD}^2 = EB \times AE$.

785. COROLLAIRE II. *Si de l'extrêmité* D *du second axe, on mene* DM *paralelle au premier axe, & du point* M, *l'ordonnée* MN *au premier axe, le rectangle* NB×AN *correspondant est égal au quarré de la moitié* OB *du premier axe.* Par la proprieté de la courbe $\overline{NM}^2 . NB \times AN :: \overline{DO}^2 . \overline{OB}^2$; mais $\overline{NM}^2 = \overline{DO}^2$, à cause des paralelles, donc $NB \times AN = \overline{OB}^2$.

786. PROPOSITION CLI. *Si de l'un des foyers* E (Fig. 494.) *on mene une ordonnée* EF *au premier axe. Cette ordonnée est égale à la moitié du parametre du premier axe.* Par la proprieté de la courbe $\overline{EF}^2 . EB \times AE :: \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$; mais $EB \times AE = \overline{OD}^2$ (*N.* 784.); donc $\overline{EF}^2 . \overline{OD}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, & partant $\overline{OB}^2 . \overline{OD}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{EF}^2$, & OB. OD :: OD. EF, mais par la définition du parametre du premier axe que je nomme P, nous avons AB. CD :: CD. P; donc en prenant les moitiés de tous les termes, j'ai OB. OD :: OD. $\frac{1}{2}$P, OD. $\frac{1}{2}$P :: OD. EF, & partant $\frac{1}{2}P = EF$.

787. PROPOSITION CLII. *Le premier axe* AB, *& un diametre* KL (Fig. 495.) *étant donnés avec leurs tangentes* BV, LT, *les triangles* TRB, VRL *fait par les tangentes avec l'axe & le diamétre sont égaux.*

Du point L, je mene l'ordonnée LS au premier axe, j'ai donc OS. OB :: OB. OT (*N.* 777.); or, les triangles semblables OBV, OSL donnent OS. OB :: OL. OV, donc OL. OV :: OB. OT, & par conséquent menant les lignes LB, VT, ces lignes sont paralelles; or, les triangles LBV, LBT compris entre ces deux paralelles sont égaux, à cause qu'ils ont la base commune LB; donc retranchant de part & d'autre le triangle commun LRB, nous aurons TRB=VRL.

788. COROLLAIRE. *Le triangle* LTS *fait par la tangente* LT *du diametre* KL, *avec le premier axe & son ordonnée* LS *menée du point*

d'attouchement, est égal au trapezoïde fait par la même ordonnée LS, *avec la tangente* BV *du premier axe, comprise entre le premier axe & le diametre.* Les triangles TRB, VRL sont égaux (*N.* 787.), ajoutant donc de part & d'autre BRLS, nous aurons LTS =BSLV.

Nota. J'ai démontré ci-dessus (*N.* 776.) que tout diamétre LK terminé entre les deux courbes opposées, étoit divisé en deux également au centre O : or, pour ne pas rendre les Figures trop grandes, ce qui nous jetteroit dans l'inconvénient de surcharger cet Ouvrage de Planches, je ne décrirai point dans les Figures des Propositions suivantes l'hyperbole opposée, & la moitié OK d'un diamétre LK restera indéterminée ; mais il faudra toujours supposer dans le discours que le point K est le point où le diamétre LK coupe la courbe opposée, & ainsi des autres.

789. PROPOSITION CLIII. *Le premier axe* AB, *& un diamétre* KL (Fig. 496.) *étant donnés avec leurs tangentes* BV, LT *qui se terminent l'une à l'axe, & l'autre au diametre, si d'un point quelconque* X *pris sur la courbe on mene deux droites* FH, PM *paralelles aux tangentes, & qui se terminent au premier axe, & au diamétre. Je dis 1°. que le triangle* HXM *fait par ces paralelles avec le premier axe, est égal au trapezoïde* VBMP *fait par la tangente* SB *du premier axe, & sa paralelle* XM *comprises entre le premier axe & le diametre. 2°. Que le triangle* PXF *fait par les deux paralelles & le diametre* OL *est égal au trapezoïde* LTHF *fait par la tangente* LT *du diametre & sa paralelle* FX *comprises entre le diametre & le premier axe.*

Les triangles semblables TLS, HXM, donnent TLS. HXM :: $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$ :: SB×AS. MB×AB, & nous sçavons que SB×AS. MB×AB :: $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.* 148.) ; donc $\overline{LS}^2$. $\overline{XM}^2$ :: $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$; donc TLS. HXM :: $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2$. $\overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$, & au lieu des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$, mettant les triangles semblables OLS, OBV, OPM qui sont dans la même raison (*N.* 392.), nous aurons TLS. HXM :: OLS—OBV. OPM—OBV, c'est-à-dire TLS. HXM :: VBSL. VBMP, mais TLS=VBSL (*N.* 788.), donc HXM=VBMP. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Nous avons TLS=VBSL, & retranchant d'une part le triangle HXM, & de l'autre le trapezoïde VBMP égal à HXM, com-

me on vient de voir, il restera TLYH+XMSY=PMSL, & retranchant de part & d'autre la partie commune XMSY, nous aurons TLYH=PXYL; enfin, ajoutant de part & d'autre le petit triangle LYF, nous aurons TLFH=PXF. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Nota. Le point X peut se trouver ou au-delà du point L ou de l'autre côté de la courbe, mais ces deux cas se démontreront de la même façon, ainsi que nous avons fait à l'égard de la parabole. (*N.* 652.).

790. COROLLAIRE I[er]. *Toutes les lignes telles que* XZ (Fig. 497.) *paralelles à une tangente quelconque* LT, *& qui coupent l'hyperbole, sont coupées en deux également par le diametre* KL, *qui passe par le point d'attouchement* L. Je prolonge la droite XZ jusqu'à ce qu'elle coupe le premier axe en H, & des points X, Z où cette droite coupe l'hyperbole, je mene des droites MP, ZG paralelles à la tangente BV du premier axe; à cause des droites PM, ZH paralelles aux tangentes BV, LT du premier axe & du diamétre KL, le triangle PXF fait avec ces paralelles & le diamétre est égal au trapezoïde LTHF (*N.* 789.); de même à cause des droites ZH, ZG paralelles aux tangentes BV, LT, le triangle ZFI fait par ces paralelles avec le diamétre OL prolongé est aussi égal au trapezoïde LTHF; donc le triangle PXF est égal au triangle ZFI; mais ces deux triangles sont semblables à cause des paralelles PM, ZG, donc ils sont parfaitement égaux, & le côté XF est égal au côté FZ, & partant XZ est divisé en deux également en F.

791. COROLLAIRE II. *Donc toute ligne* XZ *paralelle à la tangente* LT *d'un diametre* KL *qui coupe l'hyperbole est une double ordonnée au diametre* OL, *& sa moitié* XF *ou* ZF *est l'ordonnée.* Et ceci fait voir que nous avons eu raison (*N.* 769.) de nommer *Diametres* toutes les lignes telles que OL qui passent par le centre O, & qui coupent l'hyperbole en un point L.

792. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées* XF, EY (Fig. 498.) *à un diametre quelconque* KL *sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses multipliées par le diametre* KL *augmenté de ces mêmes abscisses.* Je mene la tangente BV du premier axe, je prolonge les ordonnées FX, YE jusqu'à la rencontre du premier axe en H & Q, & des points X, E où ces ordonnées coupent l'hyperbole, je mene les droites XP, EZ paralelles à la tangente BV. Le triangle PXF fait avec le diametre OL, & les deux

deux lignes PX, XF paralelles aux tangentes BV, LT eſt égal au trapezoïde LTHF (*N.* 789.), & par la même raiſon le triangle ZEY eſt égal au trapezoïde LTQY; donc PXF. ZEY :: LTHF. LTQY; or, à cauſe que les triangles PXF, ZEY ſont ſemblables, nous avons PXF. ZEY :: $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ (*N.* 392.); donc $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ :: LTHF. LTQY; or, LTHF = OFH — OLT, & LTQY = OYQ — OLT, donc $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ :: OFH — OLT. OYQ—OLT, & au lieu des triangles ſemblables OFH, OLT, OYQ, mettant les quarrés $\overline{OF}^2, \overline{OL}^2, \overline{OY}^2$ de leurs côtés homologues, leſquels quarrés ſont en même raiſon que ces triangles, nous aurons $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2 :: \overline{OF}^2 - \overline{OL}^2 . \overline{OY}^2 - \overline{OL}^2$; mais le diamétre LOK étant diviſé en deux également au centre O (*N.* 776.), & les droites LF, LY, lui étant ajoutées, nous avons FL×FK = $\overline{OF}^2 - \overline{OL}^2$ (*N.* 148.), & par la même raiſon YL×YK = $\overline{OY}^2 - \overline{OL}^2$; donc $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ :: FL×FK. YL×YK.

Nota. Que la proprieté de l'hyperbole à l'égard de tous les premiers diamétres, tels que KL eſt la même qu'à l'égard du premier axe.

793. PROPOSITION CLIV. *Deux diametres* LK, PZ (Fig. 499.) *avec leurs tangentes* LT, TP *qui ſe coupent en* T *étant donnés, ſi l'on joint les points d'attouchement par la ligne* LP, *& que par le milieu* X *de cette ligne on mene la droite* XT *au point* T, *cette droite* XT *ſera un diametre, & paſſera par conſéquent par le centre* O *de l'hyperbole.*

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (*N.* 662.).

794. *REMARQUE.* Par le moyen de cette Propoſition, tout ce que nous avons démontré ci-deſſus à l'égard du premier axe & d'un premier diamétre, peut ſe démontrer auſſi à l'égard de deux premiers diamétres PZ, LK (*Fig.* 499.), ou de leurs moitiés OP, OL.

Car prolongeant les tangentes LT, PT juſqu'à la rencontre des diamétres en H & Q, menant enſuite les droites RL, PM ordonnées aux deux diamétres, c'eſt-à-dire paralelles aux tangentes, la droite LP, & du point T la droite TF qui paſſe par le milieu X de la droite LP, & qui par conſéquent ſera un diamétre, & paſſera par le centre O (*N.* 769.); il eſt clair qu'à cauſe du paralellogramme LTPF, la droite TX qui paſſe par l'un des

angles X, & qui coupe la diagonale LP en deux également, passera par l'angle opposé F.

Or, les triangles semblables OFR, OTP donnent OR OP :: OF. OT, & à cause des triangles semblables OFP, OTH, nous avons OP. OH :: OF. OT; donc OR. OP :: OP. OH; de même les triangles semblables OFM. OTL donnent OM. OL :: OF. OT, & à cause des triangles semblables OFL, OTQ nous avons OL. OQ :: OF. OT; donc OM. LO :: OL. OQ, ce qui fait voir que les deux droites OR, OM sont divisées proportionnellement, & que par conséquent les lignes QH, LP, MR, qui joignent leurs points de division sont paralelles entr'elles.

Donc 1°. un diamétre PZ étant donné, si d'un point L pris sur la courbe on veut mener une tangente, il faut mener de ce point une ordonnée LR au diamétre, ensuite chercher une troisiéme proportionnelle OH aux droites OR, OP, & mener la droite LH qui sera la tangente demandée, ainsi c'est la même chose qu'à l'égard du premier axe (*N.* 777.).

Donc 2°. le triangle HTP fait par les tangentes & le diamétre PZ est égal au triangle QTL fait par les mêmes tangentes avec le diamétre LK, car à cause des paralelles QH, LP, les triangles LHP, LPQ qui ont la base LP commune sont égaux, & partant retranchant de part & d'autre le triangle commun LTP, nous aurons HTP=QTL.

Donc 3°. LHR=LQPR, car ajoutant aux triangles égaux HTP, QTL, la partie commune LTPR, nous aurons LHR =LQPR.

Donc 4°. si d'un point quelconque S pris sur la courbe, on mene deux droites VN, IE paralelles aux tangentes, le triangle VSE fait par ces paralelles avec le diamétre ZP sera égal au trapezoïde QPEI fait par la tangente PQ de ce diamétre, & par sa paralelle IE terminées entre les deux diamétres, & le triangle ISN fait par les paralelles, & l'autre diamétre sera égal au trapezoïde LHVN fait par la tangente LH de ce diamétre, & sa paralelle NV terminées entre les diamétres, ce qui se démontre comme ci-dessus (*N.* 789.).

795. PROPOSITION CLV. *Deux diametres* LK, PZ (Fig. 500.) *étant donnés avec leurs tangentes* LH, PQ; *si de deux points* E, F *pris sur la courbe entre les deux diamétres, on mene deux paralelles* ES, IX, *&* FV, XR *aux tangentes, le trapezoïde* NSFR *fait par deux de ces paralelles avec le diametre* PZ, *& la plus pro-*

che des deux autres paralelles, est égal au trapezoïde ENVI *fait par deux autres de ces paralelles avec le diametre* LK, *& la plus proche des deux autres paralelles, de même le trapezoïde* ESRX *fait par deux paralelles avec le diametre* ZP, *& la plus éloignée des deux autres paralelles est égal au trapezoïde* FVIX *fait par les deux autres paralelles, & la plus éloignée des deux premieres.*

La démonstration est la même que pour la parabole (*N. 666, 667.*).

796. PROPOSITION CLVI. *Si deux droites* EH, FV (Fig. 501.) *terminées de part & d'autre à l'hyperbole, se coupent en un point* G *dans l'hyperbole, le rectangle* EG×GH *des parties de la premiere* EH *est au rectangle* FG×GV *des parties de la seconde, comme le quarré* $\overline{PT}^2$ *de la tangente du diametre de la premiere est au quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de la seconde.*

Même démonstration dans tous les cas que pour la parabole (*N. 668.*).

797. PROPOSITION CLVII. *Si deux droites* EI, FH (Fig. 505.) *terminées de part & d'autre à la courbe, se rencontrent en dehors en un point* R *hors de l'hyperbole lorsqu'on les prolonge, le rectangle* RF×RH *de la partie exterieure* RF *de la premiere par la ligne entiere* RH, *est au rectangle* RE×RI *de la partie exterieure* RE *de la seconde par la ligne entiere* RI, *comme le quarré* $\overline{PT}^2$ *de la tangente du diametre de la premiere est au quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de la seconde.*

Même démonstration que pour la parabole (*N. 669.*).

798. PROPOSITION CLVIII. *Une tangente* LT *étant donnée* (Fig. 503.), *avec l'ordonnée* LS *au premier axe; si du point* T, *on mene une secante* TXZ, *cette secante sera coupée harmoniquement aux points* X, V, Z *où elle est coupée par la courbe, & par l'ordonnée* LS.

Même démonstration que pour la parabole (*N. 670.*); & delà on pourroit tirer les mêmes Propositions que nous avons deduites pour la parabole (*N. 671.*); & il faut dire la même chose à l'égard de l'ellipse; car nous avons démontré (*N. 713.*) qu'une secante menée du point où la tangente coupe l'axe, est aussi divisée harmoniquement par la courbe, & l'ordonnée à l'axe menée du point d'attouchement.

799. PROPOSITION CLIX. *Deux diametres* LK, ZP (Fig. 504.) *étant donnés avec leurs tangentes* LT, TP; *si l'on mene une ordonnée*

XV à l'un des diametres LK, *& qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre en* R *la tangente* PT *de l'autre diametre* PZ, *le rectangle* RX×RV *de la partie exterieure* RX *par la ligne entiere* RV *est au quarré* $\overline{RP}^2$ *de la partie* RP *que la droite* VX *coupe sur* PT *comme le quarré* $\overline{LT}^2$ *de la tangente du diametre de* VX *est au quarré* $\overline{TP}^2$ *de la tangente de l'autre diametre.*

Même démonstration que pour la parabole (*N.* 672.).

800. PROPOSITION CLX. *Deux segmens* ALB, CPD *étant donnés* (Fig. 505.) *; si les parties* LX, PS *de leurs diametres comprises dans ces segmens, sont proportionnelles à leurs diametres* LK, PZ *les plus grands triangles inscrits dans ces segmens sont égaux.*

Même démonstration que pour l'ellipse dans tous les cas (*N.* 737.) en substituant les proprietés de l'hyperbole au lieu de celle de l'ellipse.

801. *DEFINITION.* Le premier axe AB, & le second CD étant donnés (*Fig.* 506.); si par l'une des extrémités B du premier axe, on mene une tangente QP, sur laquelle on prenne la partie BP, & la partie BQ égales chacune à la moitié OD ou OC du second axe, les lignes indefinies OL, OY, menées du centre O par les extrémités P, Q de la droite QP, se nomment *Asymptotes* de l'hyperbole, & si on prolonge ces droites de l'autre côté du centre en X & en Z, elles seront les asymptotes de l'hyperbole opposée dont le sommet est A.

802. COROLLAIRE. *Si des extrémités* C, D *du second axe, on mene des lignes à l'extrémité* B *du premier axe, ces deux lignes seront égales à cause de* C *&* D *également éloignés de* B, *& elles seront coupées chacune en deux également par les asymptotes aux points* V, T. Car menant la droite DP, la Figure ODPB sera un rectangle, & la diagonale OP coupera la diagonale BD en deux également, & la même chose arrivera de CB. De plus DB sera paralelle à l'asymptote OY, à cause de OD paralelle & égale à QB, & par la même raison CB sera paralelle à l'asymptote DL.

803. PROPOSITION CLXI. *L'hyperbole est toute entiere dans l'angle* YOL (Fig. 506.) *que font les asymptotes, & elles ne les touche point.*

Concevons une infinité de lignes, telles que MN, &c. menées paralellement à la tangente, & qui coupent une l'hyperbole, & les asymptotes; les triangles semblables NEO, PBO donnent

NE. EO :: PB. BO; donc $\overline{NE}^2 . \overline{EO}^2 :: \overline{PB}^2$ ou $\overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$; mais par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{EI}^2$. EB×EA :: $\overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, & EB×EA $= \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.* 148.); donc $\overline{EI}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, & partant $\overline{EI}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{NE}^2 . \overline{EO}^2$; mais $\overline{EO}^2 - \overline{OB}^2$ est moindre que $\overline{EO}^2$; donc $\overline{EI}^2$ est aussi moindre que $\overline{NE}^2$, & EI moindre que NE, c'est-à-dire le point I de la courbe est entre les asymptotes sans les toucher, & comme cela arrivera partout; il s'ensuit que l'hyperbole ne touchera jamais l'asymptote OL, & on prouvera de la même façon qu'elle ne touchera jamais l'asymptote OY.

804. COROLLAIRE Ier. *Si l'on conçoit une infinité de lignes, telles que* MN, &c. *paralelles à la tangente* QP *ou au second diametre & qui coupent l'hyperbole & les asymptotes, les parties* MH, IN *de chacune de ces lignes comprises entre la courbe & les asymptotes, seront égales entr'elles.* Les triangles semblables NEO, PBO donnent NE. PB :: EO. BO, & à cause des triangles semblables MEO, QBO, nous avons ME. QB :: EO. BO; donc NE. PB :: ME. QB; or PB=QB, donc NE=ME, mais HE=EI, à cause que HI est une double ordonnée au premier axe; donc NE — EI = ME — HE, c'est-à-dire NI=MH.

805. COROLLAIRE II. *Posant toujours les droites* MN, &c. *paralelles à* QP, *ou* CD, *les rectangles* MH×HN *de la partie* MH *de chacune de ces lignes comprises entre la courbe & l'asymptote par le reste* HN *de ces mêmes lignes, est égal au quarré* $\overline{QB}^2$ *ou* $\overline{CO}^2$ *de la moitié du second axe.* A cause des triangles semblables MEO, QBO, nous avons ~~ME. EO :: QB. BO, donc~~ $\overline{ME}^2 . \overline{EO}^2 :: \overline{QB}^2 . \overline{BO}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{HE}^2$. EB×EA ou $\overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$ (*N.* 148.) :: $\overline{QB}^2 . \overline{BO}^2$; donc $\overline{ME}^2 . \overline{EO}^2 :: \overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$, ou $\overline{ME}^2 . \overline{HE}^2 :: \overline{EO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$; donc en divisant $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 . \overline{HE}^2 :: \overline{EO}^2 - \overline{EO}^2 + \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$; ce qui se réduit à $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 . \overline{HE}^2 :: \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$; or, à cause que HI est divisée en deux également en E, & que MH lui est ajoutée, nous avons $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 =$ MH×MI=MH×HN, à cause de MI=HN;

donc $MH \times HN . \overline{HE}^2 :: \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$, ou $\overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 :: MH \times HN . \overline{BO}^2$; or nous avons $\overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 :: \overline{QB}^2$, ou $\overline{CD}^2 . \overline{BO}^2$; donc $MH \times HN . \overline{BO}^2 :: \overline{QB}^2$, ou $\overline{CD}^2 . \overline{BO}^2$, & partant $MH \times HN = \overline{QB}^2$.

806. COROLLAIRE III. *Donc tous les rectangles* $MH \times HN$ *sont égaux entr'eux*, puisqu'ils sont tous égaux au quarré $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CO}^2$. Et il faut dire la même chose des rectangles $NI \times IM$.

807. COROLLAIRE IV. *Les parties* MH *ou* IN *des droites* MN *vont en diminuant à mesure que les lignes* MN *s'éloignent du centre* O. Les rectangles $MH \times HN$ sont tous égaux entr'eux. Or les HN vont en augmentant à mesure qu'ils sont plus éloignés du centre O, car leurs parties HE étant ordonnées au premier axe augmentent en s'éloignant de O, & leurs parties EN qui sont les élémens du triangle OEN augmentent aussi en s'éloignant de O; donc puisque les HN augmentent, il faut nécessairement que les HM diminuent si l'on veut conserver l'égalité des rectangles $MH \times HN$.

808. COROLLAIRE V. *Les asymptotes* OY, OL *approchent de plus en plus de l'hyperbole & ne la touchent jamais.* Les doubles ordonnées HI, &c. au premier axe seront toujours moindres que les MN, &c. (*N.* 803.) & les MH ou les IN diminueront à mesure qu'elles s'éloigneront davantage du sommet O (*N.* 807.) donc les asymptotes approcheront de plus en plus de la courbe, sans pouvoir jamais la toucher.

809. COROLLAIRE VI. *Si d'un point quelconque* H *pris sur la courbe* (Fig. 507.) *on mene une droite* RHT *paralelle à l'asymptote voisine* OY, *la partie* RH *de cette paralelle menée du côté du centre* O, *sera toute entiere hors de l'hyperbole, & l'autre partie* HT *sera toute entiere dans l'hyperbole.* Je mene par le point H la droite MN paralelle à QP ou au second axe CD, & entre MN & QP je mene une autre paralelle SL, comprise entre les asymptotes de même que MN; à cause des paralelles MN, SL, & MO, HR, nous avons MH = SI; mais la partie SZ de la paralelle SL comprise entre l'asymptote OY, & la courbe est plus grande que la partie MH de la droite MN (*N.* 807.) donc SI est moindre que SZ, & le point I de la droite HR est hors de l'hyperbole, & l'on prouvera de la même façon que tous les autres points de HR sont hors de la courbe.

Je mene entre les aſymptotes en deſſous du point H une autre droite FE paralelle à QP ; ainſi nous aurons FX = MH à cauſe des paralelles MN, FE, & FO, TR. Or la partie F*f* de la droite FE compriſe entre l'aſymptote OY, & la courbe eſt moindre que MH (*N.* 807.) donc FX eſt plus grand que F*f*, & le point X de la droite RHT eſt dans l'hyperbole, & on prouvera de la même façon que tous les points de la partie HT ſont dans l'hyperbole.

810. COROLLAIRE VII. *Si par le centre* O *d'une hyperbole* (Fig. 507.) *on mene un droite* OG *qui coupe l'angle* YOE *des aſymptotes* YO, OE, *cette ligne* OG *coupera l'hyperbole & ſera un diamètre.* Plus la ligne OG eſt prolongée, & plus ſes points s'éloignent de l'aſymptote OE avec qui elle fait l'angle GOE ; au contraire, plus l'hyperbole eſt prolongée du côté de E, plus ſes points s'approchent de l'aſymptote (*N.* 808.) or la ligne OE & l'hyperbole peuvent être prolongées à l'infini ; donc à force de prolonger l'une & l'autre, il ſe trouvera néceſſairement quelque point G de la ligne OG qui ſera plus éloignée de l'aſymptote OE que le point correſpondant *g* de l'hyperbole ne le ſera de la même aſymptote. Ainſi le point G ſera dans l'hyperbole, mais le point O de la ligne OG eſt hors de l'hyperbole ; donc cette ligne coupera la courbe en quelque point, après quoi il eſt viſible qu'elle ne le coupera plus.

811. PROPOSITION CLXII. *Si de deux ou pluſieurs points* X, R *pris ſur la courbe* (Fig. 508.) *on mene des droites* XH, XS, *&* RL, RI *paralelles aux aſymptotes, les rectangles* XH × XS, RL × LI *ſeront égaux entr'eux.*

Je mene par les points X, R, des droites HE, MN, paralelles à QP ou CD & qui ſe terminent aux aſymptotes, les triangles ſemblables MHX, HRI donnent MX. HX :: HR. RI ; & à cauſe des triangles ſemblables NXS, ERL, nous avons NX. XS :: ER. RL ; multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la premiere, nous aurons MX × NX. HX × XS :: HR × ER. RI × RL ; mais les rectangles MX × NX, HR × ER, ſont égaux entr'eux (*N.* 806.) donc les rectangles HX × XS, RI × RL le ſont auſſi.

812. COROLLAIRE Ier. *Si du ſommet* B *on mene les droites* BV, BT *paralelles aux aſymptotes* (Fig. 508.) *leſquelles ſeront égales parce qu'elles ſont les moitiés des lignes* BD, BC *menées aux extrémités* D, C *du petit axe* (N. 802.) *je dis que les rectangles* HX × XS

RL × RI *feront égaux chacun au quarré de* VB *ou de fon égale* BT. Car menant au fommet B de l'hyperbole la droite QP, laquelle eft égale au petit axe CD & coupée en deux également en B (*N.* 801.) les triangles femblables MXH. QBV donneront MX. XH :: QB. BV; & à caufe des triangles femblables NXS. PBT, nous aurons NX. XS :: PB. BT; donc en multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons MX × NX. XH × XS :: QB × PB, ou $\overline{QB}^2$. BV × BT ou $\overline{BV}^2$; or MX × NX = $\overline{QB}^2$ (*N.* 802); donc XH × XS = $\overline{BV}^2$; mais XH × XS = RI × RL; donc auffi RI × RL = $\overline{BV}^2$.

Nota. Il y a bien des Auteurs qui nomment le quarré de BT ou de BV fon égale *puiffance* de l'hyperbole, à caufe que ce quarré eft toujours égal aux rectangles XH × XS, RI × RL, &c.

813. COROLLAIRE II. *Si d'un point quelconque* X *pris fur l'hyperbole* (Fig. 508.) *on mene une ligne* XH *paralelle à l'afymptote* OF *qui eft de l'autre côté de l'hyperbole, le rectangle* XH, OH *de la ligne* XH *par la partie* OH *qu'elle coupe fur l'afymptote* OY *eft toujours égal au quarré de* BV, *c'eft-à-dire à la puiffance de l'hyperbole.* Car menant du point X la droite XS paralelle à l'afymptote OY, nous aurons HX × XS = $\overline{BV}^2$ (*N.* 812.) Or à caufe des paralelles HX, OS & HO, XS, nous avons HO = XS; donc HX × XS = HX × XO, & partant HX × HO = $\overline{BV}^2$. Ceci eft la proprieté de l'hyperbole entre fes afymptotes.

814. PROPOSITION CLXIII. *Si de deux ou plufieurs points* X, R, &c. (Fig. 509.) *pris fur l'hyperbole, on mene des lignes* XT, RS, &c. *paralelles entr'elles, & qui faffent avec l'afymptote* OY *tel angle que l'on voudra, & que des mêmes points on mene d'autres lignes* XH, RL, &c. *auffi paralelles entr'elles, & qui faffent avec l'autre afymptote* OF *un angle quelconque, je dis que les rectangles* TX × XH, SR × RL, &c. *font tous égaux entr'eux.*

Je mene par les points X, R, &c. des droites MN, EI entre les afymptotes & paralelles au fecond axe CD. Les triangles femblables MTX, ERS donnent TX. MX :: SR. ER, & à caufe des triangles femblables HXN, LRI, nous avons HX. XN :: LR. RI; multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons TX × HX. MX × XN :: SR × LR. ER × RI, mais MX × XN = ER × RI; donc TX × HX = SR × RL.

815.

815. PROPOSITION CLXIV. *Si l'on mene entre les asymptotes une ligne* MN (Fig. 510.) *qui coupe l'hyperbole & qui soit inclinée au premier axe, les parties* MX, RN *de cette ligne comprises entre la courbe & les asymptotes sont égales.*

Je prens sur la droite MN une partie NR égale à la partie MX, sans m'embarrasser si l'extrêmité R de cette partie est en dedans ou en dehors de l'hyperbole; du point R je mene les lignes RT, RH paralelles aux asymptotes, & du point X les droites XE, XS paralelles aussi aux asymptotes. C'est pourquoi si le point R est véritablement sur la courbe, il s'ensuivra nécessairement que les rectangles RH×RT, SX×XE seront égaux (*N.* 811.) Voyons donc si nous trouverons cette égalité.

Les triangles semblables MSX, RHN ayant le côté MX égal au côté NR par la construction sont égaux & MS = RH, SX = HN; or à cause des paralelles, nous avons SX = OE & RH = TO; donc OE = HN, & partant OH ou TR = EN; de même MS = TO. Les triangles semblables MSX, XEN donnent MS ou TO. SX :: XE. EN ou OH; donc TO×OH ou RH×RT = SX×XE, par conséquent le point R est véritablement sur la courbe.

816. COROLLAIRE Ier. *Plusieurs lignes* MN, SL (Fig. 511.) *paralelles entr'elles & obliques à l'axe, étant menées entre les asymptotes, si du centre* O *l'on mene leur diamétre* OT, *& du sommet* Z *la tangente* HV *qui sera paralelle aux* MN, SL, &c. *je dis que cette tangente sera divisée en deux également en* Z. Les doubles ordonnées XR, YI au diamétre OT sont coupées en deux également en E, T par ce diamétre; donc si on leur ajoute de part & d'autre les parties égales MX, RN, & SY, IL (*N.* 815.) nous aurons ME = EN, & ST = TL; or les triangles semblables OEN, OZV donnent EN. ZV :: OE. OZ, & à cause des triangles semblables OEM. OZH, nous avons ME. HZ :: OE. OZ; donc EN. ZV :: ME. HZ; mais EN = ME; donc ZV = ZH.

817. COROLLAIRE II. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, les rectangles* MX×XN, SY×YL. &c. *des parties* MX, SY *des droites* MN, SL, *par les restes* XN, YL *de ces mêmes droites sont égaux entr'eux & au quarré de la moitié* ZV *ou* ZH *de la tangente du diamétre* OT. Par les points Y, X, Z je mene les droites Qq, Pp, Ff paralelles entr'elles & au second axe. Les triangles semblables SYQ, MXP donnent SY. QY

:: MX. PX, & à cause des triangles semblables LYq, NXp, nous avons LY. Yq :: NX. Xp; multipliant donc les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons SY × LY. QY × Yp :: MX × NX. PX × XP; or QY × Yq = PX × Xp (*N.* 806.) donc SY × LY = MX × NX.

Maintenant la droite Ff n'étant pas tangente au point Z coupera l'hyperbole en deux points, & à cause des triangles semblables MXP, HZF, & NXp, VZf, nous aurons MX. PX :: HZ. FZ, & NX. Xp. VZ. Zf. Donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons MX × NX. PX × Xp. HZ × VZ, ou $\overline{HZ}^2$. FZ × Zf; mais PX × Xp = FZ × Zf (*N.* 806.) donc MX × NX = $\overline{HZ}^2$; or MX × NX = SY × YL; donc SY × YL = $\overline{HZ}^2$.

818. COROLLAIRE III. *Donc toutes les tangentes terminées entre les deux asymptotes, sont coupées en deux également aux points d'attouchement.* Ce qui est visible par le précédent Corollaire.

819. COROLLAIRE IV. *Deux ou plusieurs tangentes* MT, LR (Fig. 512.) *étant menées entre les asymptotes, les triangles* MTO, RLO *qu'elles font avec les asymptotes sont égaux entr'eux.* Des points d'attouchement N, S je mene les droites NP, NV, SX, SZ paralelles aux asymptotes, ce qui donne PN × NV = XS × ZS (*N.* 811.) d'où je tire NV. ZS :: XS. PN; or les parallelogrammes PNVO, XSZO ayant l'angle POX commun sont équiangles, & à cause que leurs bases NV, ZS sont réciproques à leurs côtés XS, PN, leurs hauteurs, *c'est-à-dire les perpendiculaires* Xx, Pp seront aussi réciproques aux bases, car les triangles semblables XxS, PpN donneront Xx. Pp :: XS. PN, & partant Xx. Pp :: NV. ZS; donc nous aurons Xx × ZS = Pp × NV, c'est-à-dire les paralellogrammes XSZO, PNVO égaux entr'eux; or à cause que la tangente MT est divisée en deux également en N, & que PN est paralelle à OR, le côté MO du triangle MOT est double du côté PO du paralellogramme PNVO, & sa base OT est aussi double de la base OV ou PN du même paralellogramme; donc le triangle MOT est double du paralellogramme PNVO, & par la même raison le triangle LRO est double du paralellogramme XSZO; donc puisque les paralellogrammes PNVO, XSZO sont égaux, les triangles MOV, RML sont aussi égaux.

820. COROLLAIRE V. *Les triangles* MTO, RLO (Fig. 512.) *faits par deux tangentes* MT, LR *avec les asymptotes, ont les côtés autour de l'angle commun* O *réciproques entr'eux.* Nous venons de trouver (*N.* 819.) NV ou PO. ZS ou OX :: SX, ou OZ. PN ou VO, c'est-à-dire PO. OX :: OZ. OV; donc en doublant tous les termes, nous aurons MO. OR :: OL. OT.

821. *DEFINITION.* Deux hyperboles opposées étant décrites avec leurs asymptotes Y*y*, T*t* (*Fig.* 513.) si l'on prend le second axe CD de ces hyperboles pour le premier axe de deux autres hyperboles MC*m*, ND*n* qui auront leurs sommets en C & D, & dont le second axe sera le premier AB, ces deux nouvelles hyperboles se nommeront *conjuguées* des deux hyperboles opposées.

822. PROPOSITION CLXV. *Les hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes que les hyperboles opposées* (Fig. 513.)

Je mene par les sommets A, B des hyperboles opposées & entre les asymptotes les tangentes HL, RS, lesquelles seront paralelles & égales chacune au second axe CD de ces hyperboles (*N.* 781.) & divisées chacune en deux également en A, & B de même que CD est divisé en O. Donc en joignant leurs extrêmités par les droites HR, LS, ces droites seront paralelles & égales chacune au premier axe AO des hyperboles opposées, & elles seront divisées en deux également en C & D par les extrêmités de CD; or CD est le premier axe des hyperboles conjuguées, AB est le second, & les droites HR, SL qui passent par le sommet de ces hyperboles sont égales & paralelles à AB, & de plus elles sont divisées également en C & D de même que AB l'est en O; donc si du centre O on mene Y*y*, T*t* qui passent par les extrêmités R, L, S, H de ces lignes, les droites Y*y*, T*t* seront les asymptotes des conjuguées (*N.* 801.) or elles sont aussi les asymptotes des hyperboles opposées, puisqu'elles passent par les extrêmités des droites RS, HL. Donc, &c.

823. COROLLAIRE Ier. *La puissance des hyperboles conjuguées est la même que celle des hyperboles opposées.* Je mene les lignes AC, CB, BD, DA, lesquelles seront égales entr'elles à cause des extrêmités A, B de l'axe AB également éloignées des extrêmités C, D de l'axe CD, & de plus elles seront divisées chacune en deux également par les asymptotes & BV = VD; or $\overline{BV}^2$ est la

puissance des hyperboles opposées (*N.* 812.) & $\overline{DV}^2$ est la puissance des conjuguées. Donc, &c.

824. COROLLAIRE II. *Tout ce que nous avons dit touchant les hyperboles opposées doit se dire aussi touchant les conjuguées.* Ce qui est évident.

825. *REMARQUE.* Ceci peut nous faire voir aisément d'où vient que dans l'hyperbole la proprieté des ordonnées au second axe, n'est pas la même que la proprieté des ordonnées au premier; car nous avons vû que le quarré d'une ordonnée F*f* au premier axe AB est au rectangle FB × AF ou au quarré $\overline{OF}^2$ de sa distance au centre moins le quarré $\overline{OB}^2$ du demi premier axe, comme le quarré du second axe CD est au quarré du premier AB (*N.* 770.) & qu'au contraire le quarré $\overline{fm}^2$ d'une ordonnée au second axe CD est au quarré de sa distance *m*O au centre plus le quarré OD du demi second axe, comme le quarré du premier axe AB au quarré du second (*N.* 773.) ce qui est bien différent. Mais si nous rapportons cette ordonnée *fm* dans son véritable lieu, c'est-à-dire dans l'hyperbole conjuguée en prolongeant F*f* jusqu'à ce qu'elle coupe la conjuguée en N, & menant ensuite l'ordonnée N*d* qui sera égale à *fm*; on trouvera que le quarré de cette ordonnée est au rectangle *d*D × CD ou à $\overline{Od}^2 - \overline{OD}$, comme le quarré $\overline{BA}^2$ est au quarré $\overline{CD}^2$, & par conséquent la proprieté de l'ordonnée N*d* au second axe CD de l'hyperbole PBQ sera semblable à la proprieté de l'ordonnée F*f* au premier axe de cette hyperbole.

826. COROLLAIRE III. *Tous les premiers diamétres des hyperboles opposées* PBQ, ZAX (Fig. 514.) *sont des seconds diamétres des hyperboles conjuguées, & tous les premiers diamétres des hyperboles conjuguées sont des seconds diamétres des hyperboles opposées.*

Nous avons déja dit que les premiers diamétres d'une hyperbole sont ceux qui la coupent, & que les seconds sont ceux qui ne la coupent pas, & que les uns & les autres doivent passer par le centre O. Cela posé, tout diamétre V*u* des hyperboles opposées doit passer par les angles YOT, *t*OI des asymptotes qui embrassent ces hyperboles, car autrement il est visible qu'il ne les couperoit pas. Donc ce diamétre ne passe point TOY, IO*t* qui embrassent les hyperboles conjuguées, & par conséquent il ne les coupe pas; donc V*u* est un second diamétre des hyper-

boles conjuguées. On prouvera de la même façon que la droite Ff qui eſt un premier diamétre des conjuguées eſt un ſecond diamétre des oppoſées.

827. COROLLAIRE IV. *Si par les extrêmités d'un premier diamétre* Vu (Fig. 514.) *de deux hyperboles oppoſées ou de deux hyperboles conjuguées, on mene des tangentes* Yb, In *qui ſe terminent aux aſymptotes, ces deux tangentes ſont égales.* Je mene les ordonnées *ux*, V*d* au premier axe, & à cauſe de *u*O = VO (*N.* 776. les triangles ſemblables *u*O*x*, VO*d* ſont parfaitement égaux & *x*O = *d*O; or pour trouver les points *g*, G où les tangentes coupent le premier axe, il faut faire :: *x*O. BO. O*g* & :: *d*O. AO. OG, & dans ces deux proportions les deux premiers termes *x*O. BO d'une part ſont égaux chacun à chacun aux deux premiers termes *d*O, AO de l'autre; donc le troiſiéme O*g* eſt égal au troiſiéme OG; ainſi les deux triangles *g*O*u*, GOV ſont égaux, puiſqu'ils ont les côtés *g*O, O*u* égaux chacun à chacun aux côtés GO, OV, & l'angle compris *g*O*u* égal à l'angle compris GOV, à cauſe que ces angles ſont oppoſés au ſommet; donc *ug* = VG; de même les triangles ſemblables *gb*O, G*n*O étant égaux à cauſe de *g*O = GO, donnent *gb* = G*n*; donc *ug* + *gb* = VG + G*n*, ou *ub* = V*n*. Mais Y*b* = 2*ub* (*N.* 818.) & I*n* = 2V*n*; donc Y*b* = I*n*, & à cauſe des triangles égaux & ſemblables *g*O*u*, GOV l'angle *gu*O eſt égal à ſon alterne GVO, & les tangentes ſont paralelles.

Et on prouvera de la même façon que les tangentes menées aux extrêmités d'un premier diamétre des hyperboles conjuguées & terminées entre les aſymptotes, ſont égales & paralelles.

828. PROPOSITION CLXVI. *Un premier diamétre* VP *des hyperboles oppoſées* (Fig 515.) *étant donné avec ſes deux tangentes* YN, IG *terminées aux aſymptotes, je dis que ſi de l'un des points d'attouchement* P *on mene deux droites* PS, PX *paralelles aux aſymptotes, & qui ſe terminent aux hyperboles conjuguées, ces deux lignes ſeront coupées chacune en deux également par les aſymptotes aux points* H, E.

Dans l'hyperbole B le rectangle PH × HO eſt égal à ſa puiſſance (*N.* 812.) & par la même raiſon dans l'hyperbole C le rectangle SH × HO eſt égal à ſa puiſſance; or les puiſſances de ces deux hyperboles ſont égales (*N.* 823.) donc PH × HO = SH × HO; & par conſéquent à cauſe de la hauteur commune HO, nous aurons PH = SH.

On démontrera de la même façon que PX est divisé en deux également en E.

829. COROLLAIRE Ier. *Posant les mêmes choses, si du point* S *on mene par le centre le diamétre* SX, *ce diamétre est égal & paralelle à l'une ou l'autre des tangentes* YN, IG *du diamétre* PV. A cause de la tangente YN divisée en deux également en P (*N.* 818.) & de PH paralelle à ON, nous avons dans le triangle YON la base ON double de HP, de même que YN est double de YP; or HS = HP (*N.* 828.) donc SP = 2HP = ON, & par conséquent à cause que SP est paralelle à ON, nous aurons SO égal & paralelle à PN & le double de SO, c'est-à-dire le diamétre SX égal au double de PN, c'est-à-dire à la tangente YN.

Nota. Toute tangente YN comprise entre les asymptotes est égale & paralelle au diamétre conjugué SX de son diamétre PV.

830. COROLLAIRE II. *Posant encore les mêmes choses, si par les extrêmités des tangentes* YN, IG *on mene les droites* YG, NI, *ces droites seront chacune égale & paralelle au diamétre* VP, *& elles toucheront les hyperboles conjuguées aux extrêmités* S, X *du diamétre* SX. Elles seront égales & paralelles chacune au diamétre VP; cela est évident, à cause que les tangentes YN, GI sont paralelles & égales entr'elles & au diamétre SX, & que de plus ces tangentes & le diamétre sont coupées en deux également par le diamétre VP. D'autre côté, les mêmes droites YG, NI seront tangentes en S & X, car il est clair qu'elles passeront par ces points & qu'elles y seront coupées en deux également, à cause que le diamétre SX est également éloigné des deux tangentes YN, IG; or elles ne peuvent être coupées en deux également en S & X sans être tangentes en ces points; car si elles coupoient les hyperboles en deux points, elles auroient chacune une partie en dedans des courbes, & deux parties entre la courbe & les asymptotes qui seroient égales entr'elles, ce qui empêcheroit que l'une des parties comprise entre la courbe & les asymptotes ne fût égale aux deux autres; donc il faut nécessairement que ces droites YG, NI soient tangentes en S & X.

831. DEFINITION. Lorsque deux diamétres VP, SX (*Fig.* 515.) sont réciproquement paralelles à leurs tangentes, c'est-à-dire le diamétre VP paralelle aux tangentes YG, NI du diamétre SX, & le diamétre SX paralelles aux tangentes YN, IG du diamétre PV; ces deux diamétres se nomment *Diamétres conjugués.*

832. COROLLAIRE III. *Le paralellogramme de deux diamétres conjugués quelconques* VP, SX (Fig. 516.) *c'est-à-dire le paralellogramme* YNIG *fait par leurs tangentes, est égal au rectangle des deux axes, c'est-à-dire au rectangle* HTRQ *fait par les tangentes de ces axes.* Le triangle ONY fait par la tangente YN du diamétre PV avec les asymptotes, est égal au triangle QOR fait avec les mêmes asymptotes par la tangente QR de l'axe AB (*N.* 819.) or le triangle ONY est le quart du paralellogramme YNIG, & le triangle QOR est le quart du rectangle HTRQ; donc le paralellogramme & le rectangle sont égaux.

833. COROLLAIRE IV. *Tous les paralellogrammes des diamétres conjugués sont égaux entr'eux.* Ils sont égaux chacun au rectangle des axes. Donc, &c.

834. COROLLAIRE V. *La difference des quarrés de deux diamétres conjugués quelconques est égale à la difference des quarrés des deux axes de l'hyperbole.*

Soit un demi-diamétre quelconque OR (*Fig.* 517.) le demi premier axe OB, & la tangente PQ au sommet B, laquelle est égale au second axe (*N.* 801.) ainsi QB sera la moitié de ce second axe. Je mene en R la tangente YN, laquelle est égale au diamétre conjugué du demi-diamétre RO (*N.* 829.) & partant YR est la moitié de ce diamétre conjugué. Je mene par les points R, B, P, N des droites RS, BV, PM, NH perpendiculaires à l'asymptote OY. Le quarré de OR est donc égal au quarré de OS, plus le quarré de RS à cause du triangle rectangle OSR, & par la même raison le quarré de YR est égal au quarré de YS, plus le quarré de SR, & retranchant de part & d'autre le quarré de SR, la différence des quarrés des demi-diamétres conjugués, OR, YR sera la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$. Or à cause de YN divisé en deux également en R (*N.* 818.) & de SR paralelle à NH, nous avons YS = SH; donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$. $\overline{YS}^2$ est la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$. $\overline{SH}^2$; mais $\overline{SO}^2 = \overline{OH}^2 + 2OH \times SH + \overline{SH}^2$ (*N.* 140.) donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$ est $\overline{OH}^2 + 2SH \times OH$, ou $\overline{OH}^2 + YH \times OH$, ou enfin $YO \times OH$, & cette différence est la même que celle des quarrés des demi-diamétres conjugués OR, YR.

De même nous avons $\overline{OB}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{VB}^2$ à cause du triangle rectangle OVB, & $\overline{QB}^2 = \overline{QV}^2 + \overline{VB}^2$ à cause du triangle rectangle QVB, & retranchant de part & d'autre le quarré $\overline{VB}^2$, la différence des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$ du premier axe & du demi second axe, sera la même que celle des quarrés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$; or à cause de QP divisé en deux également en B & des paralelles BV, PM nous avons $QV = VM$; donc la différence des quarés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$ est la même que celle des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$; mais $\overline{VO}^2 = \overline{MO}^2 + 2VM \times MO + \overline{VM}^2$; donc la différence des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$ est $2VM \times MO + \overline{MO}^2$, ou $MQ \times MO + \overline{MO}^2$, ou enfin $OQ \times MO$, & cette différence est la même que celle des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ des deux demi-axes.

Il reste donc à faire voir que la différence $YO \times OH$ des quarrés $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ des deux demi-diamétres conjugués est égale à la différence $OQ \times MO$ des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ des demi-axes; les triangles semblables OHN, OMP donnent OH. HN :: OM. MP; donc en multipliant les deux premiers termes par OY; & les deux autres par QO, nous aurons $OH \times OY$. $HN \times OY$ :: $QO \times OM$. $QO \times MP$, ou $OH \times OY$. $QO \times OM$ :: $HN \times OY$. $QO \times MP$; or $HN \times OY$ est double du triangle YON; à cause que HN est la perpendiculaire menée de son sommet N sur la base OY, & par la même raison $QO \times MP$ est double du triangle QOP, & ces deux triangles sont en même raison que leurs doubles; donc $OH \times OY$ :: $QO \times OM$ :: YON. QOP; mais $YON = QOP$ (*N.* 819.) donc $OH \times OY = QO \times OM$, c'est-à-dire la différence des quarrés $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ des deux demi-diamétres conjugués est la même que celle des quarrés $\overline{OB}^2$; $\overline{QB}^2$ des deux demi-axes, & par conséquent la différence des quarrés des diamétres conjugués est la même que celle des quarrés des deux axes.

835. PROPOSITION CLXVII. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* RS *à un diamétre* VP (Fig. 518.) *est au rectangle* $PS \times SV$ *de son abscisse par le diamétre prolongé jusqu'à l'ordonnée, comme le quarré du*

du diamétre EF *conjugué du diamétre* VP *est au quarré du diamétre* VP.

Je mene les asymptotes & la tangente HL au sommet P du diamétre VP, laquelle tangente est égale au diamétre EF (*N.* 829.) & je prolonge l'ordonnée RS de part & d'autre jusqu'aux asymptotes en M & en N. Les triangles semblables MSO, HPO donnent MS. HP. SO. PO; donc $\overline{MS}^2 . \overline{HP}^2 :: \overline{SO}^2 . \overline{PO}^2$; donc $\overline{MS}^2 - \overline{HP}^2 . \overline{HP}^2 :: \overline{SO}^2 - \overline{PO}^2 . \overline{PO}^2$. Or à cause de $\overline{HP}^2 = MR \times RN$ (*N.* 817.) nous avons $\overline{MS}^2 - \overline{HP}^2 = \overline{MS}^2 - MR \times RN$; & à cause de MN divisé en deux également en S, & en deux inégalement en R, nous avons $\overline{MS}^2 - MR \times RN = \overline{RS}^2$; donc $\overline{RS}^2 . \overline{HP}^2 :: \overline{SO}^2 - \overline{PO}^2 . \overline{PO}^2$, ou $\overline{RS}^2 . \overline{SO}^2 - \overline{PO}^2 :: \overline{HP}^2 . \overline{PO}^2$. Or $\overline{SO}^2 - \overline{PO}^2 = SP \times SV$ (*N.* 148.) donc $\overline{RS}^2 . SP \times SV :: \overline{HP}^2$, ou $\overline{EO}^2 . \overline{PO}^2 :: \overline{EF}^2 . \overline{VP}^2$.

836. COROLLAIRE. *Le quarré d'une ordonnée* RL *au diamétre* EF *conjugué du premier diamétre* PV *est au quarré* $\overline{LO}^2$, *plus le quarré* $\overline{EO}^2$ *comme le quarré du diamétre* PV *est au quarré du diametre* EF. Ce qui se démontre de même qu'à l'égard des ordonnées au second axe (*N.* 773.)

837. DEFINITION. Deux diamétres conjugués PV, EF (*Fig.* 518.) étant donnés, la troisiéme proportionnelle au premier & au second est ~~le *paramétre*~~ du premier, & la troisiéme proportionnelle au second & au premier est le *paramétre* du second.

838. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée* RS *à un premier diamétre* VP, *est au rectangle* SP × SV *comme le paramétre de ce diamétre est au même* ~~*diamétre*~~, *& le quarré d'une ordonnée* RL *au second diamétre* EF *conjugué de* VP *est au quarré* $\overline{LO}^2$, *plus le quarré* $\overline{EO}^2$, *comme le paramétre de ce second diamétre est à ce second diamétre.* Ce qui se démontre de même qu'à l'égard des deux axes (*N.* 771. 774.)

839. PROPOSITION CLXVIII. *Un premier diamétre* PV (Fig. 519.) *étant donné avec ses tangentes* PX, VL *& son diamétre conjugué* EF, *si l'on mene d'un point quelconque pris sur la courbe une ordonnée* MR *au diamétre* PV, *& une tangente* MX, *laquelle coupera les tangentes* LV, PX *& le diamétre conjugué* EF; *je dis*, 1°.

Que la droite PR, c'est-à-dire *le diamétre* VP *prolongé jusqu'à l'ordonnee, est divisé harmoniquement aux points* P, S, V. 2°. *Que le rectangle* $MR \times OH$ *de l'ordonnée* MR *par la partie* OH *du diamétre conjugué que la tangente* MX *coupe est égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué* EF. 3°. *Que le rectangle* $LV \times PX$ *des parties* LV, PX *des tangentes du diamétre* PV *que la tangente* MX *coupe est encore égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué.*

A cause que l'ordonnée MR est menée du point d'attouchement M, nous avons OR. OV :: OV. OS; or la ligne OP ajoutée à la droite OR est égale à la moyenne proportionnelle OV. Donc nous avons RV. VS :: RP. PS. (*N.* 753.) ce qu'il falloit, 1°. démontrer.

Et il faut observer qu'on a aussi RV. RS :: RO. RP, comme il a été observé dans l'endroit que je viens de citer (*N.* 753.)

Les triangles semblables MSR, HSO donnent SR. SO :: MR. OH, & multipliant les deux premiers termes par OR, & les deux autres par MR, nous aurons $SR \times OR$. $SO \times OR$ :: $\overline{MR}^2$. $OH \times MR$; or à cause de RV. RS :: RO. RP, nous avons $SR \times OR = RV \times RP$, & à cause de :: OR. OV. OS, nous avons $OR \times OS = \overline{OV}^2$; donc $RV \times RP$. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{MR}^2$. $OH \times MR$, ou $\overline{MR}^2$. $RV \times RP$ :: $OH \times MR$. $\overline{OV}^2$; mais par la proprieté de l'hyperbole nous avons $\overline{MR}^2$. $RV \times RP$ :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$ (*N.* 835.) donc $OH \times MR$. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$, & par conséquent $OH \times MR = \overline{OF}^2$, ce qu'il falloit 2°. démontrer.

A cause de :: OR. OV. OS, nous avons OR — OV. OV :: OV — OS. OS, c'est-à-dire RV. SV :: OV ou OP. OS; donc RV + SV. SV :: OP + OS. OS, c'est-à-dire SR. SV :: PS. OS; mais à cause des triangles semblables MSR, LSV, nous avons SR. SV :: MR. LV, & à cause des triangles semblables PSX, OSH, nous avons PS. OS :: PX. OH; donc MR. LV :: PX. OH, d'où je tire $MR \times OH = LV \times PX$; mais $MR \times OH = \overline{OF}^2$; donc aussi $LV \times PX = \overline{OF}^2$, ce qu'il falloit 3°. démontrer.

840. PROPOSITION CLXIX. *Une tangente* TPM (Fig. 520.) *étant donnée, si l'on décrit autour du premier axe* AB *un cercle* ARBH, *& que des points* R, H *où la tangente* TM *coupe le cercle,*

on éleve des perpendiculaires IZ, HX *fur cette tangente, ces perpendiculaires pafferont par les foyers* X, Z *des hyperboles oppofées.*

Les parties IR, LH des perpendiculaires IZ, HX font deux cordes du cercle égales & partant également éloignées du centre O (*N.* 265.) c'eft pourquoi fi du centre O, je mene la droite FV perpendiculaire fur ces cordes, j'aurai FO = OV; ainfi les triangles rectangles OVX, OFZ étant femblables & égaux, j'ai FZ = VX, & retranchant d'une part FR moitié de la corde IR, & de l'autre VL moitié de la corde HL, j'ai RZ = LX. Cela pofé,

Je mene en A & B les tangentes AM, BN qui coupent en M & N la tangente TM; les triangles rectangles PHX, PAM font femblables à caufe de l'angle aigu HPX qui leur eft commun; donc PH. HX :: PA. AM; de même à caufe des triangles femblables PRZ, PBN, nous avons PR. RZ :: PB. BN; donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous avons PH × PR. HX × RZ :: PA × PB. AM × BN; mais à caufe que les cordes AB, RH fe coupent en P, nous avons PH × PR = PA × PB (*N.* 279.) donc HX × RZ = AM × BN; or AM × BN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 839.) donc HX × RZ = $\overline{OD}^2$, & à caufe que RZ = XL, nous aurons HX × LX = $\overline{OD}^2$; mais XH, XB étant fecantes du cercle, donnent XA × XB = HX × XL (*N.* 273.) donc XA × XB = $\overline{OD}^2$; donc le point X eft l'un des foyers, (*N.* 784.) de même à caufe de IZ = HX & de RZ = XL, nous avons IZ × ZR = HX × LX = $\overline{OD}^2$; or les fecantes ZI, ZA donnent ZB × ZA = IZ × ZR; donc ZB × ZA = $\overline{OD}^2$, & par conféquent le point Z eft l'autre foyer (*N.* 784.)

841. COROLLAIRE Ier. *Si d'un point quelconque* T *pris fur l'une des hyperboles oppofées* (Fig. 521.) *on mene une tangente* TM, *& des droites* TZ, TX *aux deux foyers, les angles* ZTM, XTM *faits par ces deux droites & la tangente* TM *font égaux.* Je mene l'ordonnée TS au premier axe & l'ordonnée PE dans le cercle; ainfi à caufe de SO, BO :: BO. PO (*N.* 777.) la tangente SE au cercle menée du point S touchera au point E (*N.* 292.) & comme TS eft perpendiculaire fur AS en S, & que la droite TH qui part de l'un des points de TS paffe par le point P, où l'ordonnée EP du cercle menée du point d'attouchement coupe le diamétre AB de ce cercle, il s'enfuit que cette droite TH eft

coupée harmoniquement en R, P (*N.* 302.) & nous avons TR. RP :: TH. PH, ou TR. TH :: RP. PH; mais en menant par les points R, H les perpendiculaires IZ, XH fur TH, les triangles femblables PRZ, PHX donnent RP. PH :: RZ. HX; donc TR. TH :: RZ. HX, d'où il fuit que les deux triangles rectangles TRZ, THX font femblables à caufe qu'ils ont les côtés TR, RZ autour de l'angle droit dans le premier proportionnel aux côtés TH, HX autour de l'angle droit dans le fecond, & par conféquent l'angle ZTR eft égal à l'angle XTH.

842. COROLLAIRE II. *Pofant les mêmes chofes, la difference des lignes* XT, TZ *menées des deux foyers au point d'attouchement* T, *eft égale au premier axe* BA. Je mene du centre O au point R la droite OR, laquelle par conféquent eft égale à la moitié du premier axe AB; or à caufe des angles égaux XTR, ZTR (*N.* 841.) & de la droite TR perpendiculaire fur ZI par la conftruction, les triangles rectangles FTR, ZTR qui ont la hauteur commune TR font égaux, & nous avons FR = RZ, & TZ = TF; ainfi XF eft la différence des deux lignes XT, TZ menées du point T aux foyers; or à caufe de XZ divifé en deux également en O, & de FZ divifé en deux également en R, les triangles femblables ZFX, ZRO donnent FX double de RO; donc FX = 2RO = AB.

843. PROPOSITION CLXX. *De tous les premiers diamétres d'une hyperbole ou de deux hyperboles oppofées* (Fig. 522.) *menés d'un même côté* BS *de l'une des hyperboles, le plus petit eft le premier axe* AB, *& les autres font d'autant plus grands qu'ils s'éloignent davantage de celui-ci. Et de tous les feconds diamétres, le plus petit eft le fecond axe* CD, *& les autres font d'autant plus grands qu'ils font plus éloignés du fecond axe.*

Je mene dans l'hyperbole B plufieurs ordonnées TM, SN au premier axe, & de leurs extrêmités T, S, je mene des diamétres TP, SR; dans le triangle rectangle OTM, nous avons $\overline{OT}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{TM}^2$, & le triangle rectangle OSN donne $\overline{OS}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{SN}^2$; or, $\overline{ON}^2$ eft plus grand que $\overline{OM}^2$, à caufe que l'ordonnée SN eft plus éloignée du centre O que l'ordonnée TM, & $\overline{SN}^2$ eft plus grand que $\overline{TM}^2$ par la même raifon. Donc $\overline{ON}^2 + \overline{SN}^2$ eft plus grand que $\overline{OM}^2 + \overline{TM}^2$, & partant $\overline{OS}^2$ eft plus

grand que OT, & OS plus grand que OT ; ainſi 2OS ou SR eſt plus grand que 2OT ou TP, c'eſt-à-dire le diamétre SR plus éloigné du premier axe, ou qui fait avec cet axe un angle plus grand, eſt plus grand que le diamétre TP qui fait un angle moindre avec le premier axe ; & il eſt viſible que AB doit être le moindre de tous les premiers diamétres ; car le ſommet B de l'hyperbole étant plus proche du centre O, que tous les autres points de la courbe, la droite OB eſt plus courte que la droite OT, & par conſéquent AB eſt plus petit que TP.

Et la même choſe ſe démontrera à l'égard des ſeconds diamétres CD, LV, QX, en décrivant les hyperboles conjuguées.

844. PROPOSITION CLXXI. *Si du centre* O (Fig. 523.), *& avec un rayon* OH *plus grand que le demi-premier axe* OB, *on décrit un cercle* HMPRTV, *la circonference de ce cercle ne coupera l'hyperbole qu'en quatre points* M, R, T, V ; *& ſi l'on joint ces quatre points par des droites* MR, RT, TV, VM, *deux de ces droites* TR, VM *ſeront des doubles ordonnées au premier axe égales entr'elles, & les deux autres* MR, TV *ſeront des doubles ordonnées au ſecond axe égales entr'elles.*

1°. Il eſt évident que la circonférence du cercle doit couper l'hyperbole en quatre points, car l'extrémité H du rayon OH ne peut décrire le quart de circonférence HP ſans couper la demi-hyperbole BZ tout au moins en un point M, & la même choſe doit arriver à l'égard des autres demi-hyperboles AR, AT, VB. 2°. Le point H en décrivant le quart de la circonférence HP, ne peut couper la demi-hyperbole BZ qu'en un point M, car s'il le coupoit en deux points, menant de ces deux points des droites au centre O, leſquelles ſeroient égales, puiſqu'elles ſeroient rayons du même cercle, ces deux droites ſeroient auſſi des demi-diamétres de l'hyperbole, & par conſéquent les doubles de ces droites, c'eſt-à-dire les deux diamétres ſeroient égaux ; d'où il s'enſuivroit que d'un même côté BMZ de l'hyperbole, on pourroit mener deux diamétres égaux, ce qui eſt impoſſible, (*N.* 843.). 3°. Du point M, où le quart de cercle HP coupe la demi-hyperbole, je mene dans le cercle une corde paralelle au premier axe, cette corde ſera donc perpendiculaire ſur le ſecond axe, & par conſéquent elle ſera coupée en deux également en Q, à cauſe que ce ſecond axe paſſe par le centre O ; or, la double ordonnée au ſecond axe menée du point M, eſt auſſi coupée

en deux également en Q; donc la corde du cercle & la double ordonnée font égales, & par conféquent le point R où la corde coupe le cercle, eft le même que celui où le cercle coupe la demi-hyperbole AR; on prouvera de même que la corde menée du point R paralellement au fecond axe, eft égale à la double ordonnée TR menée du point R au premier axe, que la corde menée du point T paralellement au premier axe, eft égale à la double ordonnée TV au petit axe menée du même point; & enfin, que la corde menée du point V paralellement au fecond axe, eft égale à la double ordonnée au premier axe menée du même point V; donc à caufe des paralelles TV, RM, & TR, VM, les deux doubles ordonnées TR, VM au premier axe font égales, & les deux doubles ordonnées RM, TV au fecond axe, le font auffi.

845. **Proposition CLXXII.** *Si l'on prend fur le demi-fecond axe* OD *prolongé, s'il le faut* (Fig. 524.), *la partie* OP *égale au demi-premier axe* OB; *& qu'on porte enfuite la diftance* PB *fur le demi-premier axe prolongé de* O *en* V, *l'ordonnée* TV *menée du point* V *au premier axe fera égale à la moitié* CO, *ou* OD *du fecond axe.*

Dans le triangle rectangle ifofcele POB, nous avons $\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{OB}^2$, & par conféquent $\overline{OV}^2 = 2\overline{OB}^2$; or, par la proprieté de la courbe, nous avons $\overline{TV}^2 . VB \times VA$ ou $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$, & $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 = 2\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OB}^2$; donc $\overline{TV}^2 . \overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$, & par conféquent $\overline{TV}^2 = \overline{CO}^2$, & TV=CO.

846. **Probleme.** *Une hyperbole* XBZ (Fig. 525.) *étant donnée, trouver fes deux axes, fes foyers, fes afymptotes, &c.*

Je mene plufieurs lignes paralelles MB, NR, &c. terminées de part & d'autre à la courbe, je les divife chacune en deux également, & par les points de divifion, je fais paffer une ligne droite TL, laquelle eft un diamétre. Je cherche de la même façon un autre diamétre HV, & le point O où les deux diamétres fe coupent, eft le centre de l'hyperbole.

Du centre O, & avec une ouverture de compas affez grande pour pouvoir couper l'hyperbole, je décris un arc de cercle, & des points E, I où cet arc coupe la courbe, je mene la droite EI, laquelle eft une double ordonnée au premier axe (*N.* 844.); coupant donc cette droite EI en deux également en G, je mene

du centre O la droite OG qui coupe l'hyperbole en B, & par conséquent la droite OB est la moitié du premier axe.

J'éleve en O la droite OS égale & perpendiculaire à OB, & prenant la distance SB & la portant de O en G, l'ordonnée GI menée du point G est égale à la moitié OD du second axe (*N.* 845.).

Ayant donc porté GI de O en D, & de O en C perpendiculairement sur CD pour avoir la position du second axe CD; je mene les droites CB, DB, & les divisant chacune en deux également aux points *m*, *n*, je mene par le centre O, & par les points de division *m*, *n*, les droites indéfinies O*m*L, O*nl* qui sont les asymptotes demandées (*N.* 802.).

Enfin, prenant CB, ou DB, & le portant sur l'axe prolongé de part & d'autre de O en X, & de O en *x* les points X, *x* sont les deux foyers (*N.* 783.).

847. PROBLEME. *Une hyperbole ou deux hyperboles opposées étant données* (Fig. 526.), *trouver un premier diamétre qui fasse avec ses ordonnées un angle égal à un angle donné* abc.

Je mene les asymptotes OT, OV, je décris un cercle MNL avec un rayon quelconque, & d'un point quelconque M, menant une tangente MZ à ce cercle; je fais en M avec la tangente MZ un angle ZML égal à l'angle TOV des asymptotes. Ainsi l'angle ZML est l'angle du segment MIL, je coupe la corde ML en deux également en X, & je fais dans l'autre segment un angle MXN égal à l'angle donné *abc*. Je mene les cordes MN, NL, & je porte la premiere MN sur l'asymptote OT de O en E, & l'autre NL sur l'asymptote OV de O en F; je mene la droite EF, & la coupant en deux également en R, je mene du centre O la droite OR, & sa partie OS comprise entre le centre O de l'hyperbole, & la courbe sera la moitié du diamétre demandé. Ce que je prouve ainsi.

L'angle du segment ZML vaut la moitié de l'arc MIL, or, l'angle MNL à la circonférence vaut aussi la moitié de l'arc MIL, donc MNL=ZML; mais ZML=EOF, donc MNL =EOF, & par conséquent les deux triangles MNL, EOF sont égaux, à cause qu'ils ont les côtés MN, NL égaux chacun à chacun aux côtés EO, OF, & l'angle compris MNL égal à l'angle compris EOF. Donc l'angle NML est égal à l'angle OEF, & le côté ML égal au côté EF, d'où il suit que $\frac{1}{2}$ML, ou MX est égal à $\frac{1}{2}$EF ou ER, & que par conséquent les trian-

gles MXN, ERO sont égaux & semblables à cause des côtés MN, MX égaux chacun à chacun aux côtés EO, ER, & de l'angle compris NMX égal à l'angle compris OER; donc l'an-l'angle NXM est égal à l'angle ORE; or, à cause de EF divisé en deux également en R, & de EP = HE (*N.* 815.), nous avons PR=RH; donc la ligne OR menée du centre O est un diamétre, puisqu'elle coupe PH en deux également, & ce diamétre fait avec sa double ordonnée un angle ORP égal à l'angle MNX, lequel a été fait égal à l'angle demandé *abc*.

848. PROBLEME. *Un diamétre ou un demi-diamétre* OR *étant donné* (Fig. 527.), *trouver son diamétre conjugué.*

Je mene les asymptotes OX, OY, & la tangente PH au sommet R du diamétre donné, cette tangente est égale au diamétre conjugué qu'on demande (*N.* 829.), menant donc par le centre O une paralelle à cette tangente, & faisant OT=RH, & OL =PR, on aura la position de ce diamétre.

849. PROPOSITION CLXXIII. *Si du point* T *pris sur l'une des hyperboles opposées* (Fig. 528.), *on mene une droite* TP *à l'autre hyperbole, les parties* TS, RP *de cette droite comprises entre les courbes & les asymptotes sont égales.*

Par les points T, P, je mene entre les asymptotes les droites MN, HL paralelles au second axe CD. Les triangles semblables MTR, LPR donnent MT. TR :: LP. PR, & à cause des triangles semblables TNS, PHS, nous avons TN. TS :: PH. PS; donc en multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons MT × TN. TR×TS :: LP × PH. PR×PS, mais MT×TN=LP×PH, à cause que ces deux rectangles sont égaux au quarré de la moitié CD du second axe (*N.* 805.); donc TR×TS=PR×PS, & partant TR. PR :: PS.TS; donc en composant TR+PR. PR :: PS+TS. TS, ou TP. PR :: TP. TS, & par conséquent PR=TS.

850. COROLLAIRE I[er]. *Si entre deux hyperboles opposées* (Fig. 529.) *on mene plusieurs lignes* TP, HL, &c. *paralelles entr'elles & au premier axe, ou à un premier diamétre* EF, *les rectangles* TS×SP, HZ×ZL, *des parties* TS, HZ *de ces droites comprises entre l'une des courbes, & la plus prochaine asymptote multipliées par les restes* SP, ZL *de ces lignes sont égaux entr'eux, & au quarré de la moitié* OE *du diamétre, auquel ces lignes sont paralelles.*

Par les extrêmités T, P, H, L des lignes TP, HL, je mene entre les asymptotes des droites MN, *mn*, XV, *xu* paralelles au second

fecond axe. Les triangles femblables NTS, VHZ donnent TN. TS :: HV. HZ, & à caufe des triangles femblables MTR, XHr, nous avons MT. TR :: XH. Hr; donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons $TN \times MT. TS \times TR :: HV \times XH. HZ \times Hr$; or, $TN \times MT = HV \times XH$ (*N.* 817.); donc $TS \times TR = HZ \times Hr$, mais à caufe de $PR = ST$, & de $Lr = HZ$ (*N.* 849.), nous avons $TR = PS$, & $LZ = Hr$; donc $TS \times TR = TS \times PS$, & $HZ \times Hr = HZ \times LZ$, & partant les rectangles $TS \times PS$, $HZ \times LZ$ font égaux entr'eux, & comme à mefure que les lignes TP, HL font plus proches du diamétre EF, leurs parties Zr, RS, &c. comprifes entre les afymptotes diminuent de plus en plus; il eft évident que lorfque cette partie difparoîtra, on aura $EO \times OF = TS \times PS = HZ \times LZ$.

848. COROLLAIRE II. *Les droites* TP, HL *menées paralellement à un premier diamétre* EF *font coupées chacune en deux également par le diamétre conjugué de ce diamétre.*

Le diamétre conjugué de EF, c'eft-à-dire la droite pq eft un premier diamétre de l'hyperbole conjuguée Gg, & les ordonnées Gg, &c. de ce diamétre font paralelles au diamétre EF, & par conféquent aux droites TP, &c. prolongeant donc Gg jufqu'aux afymptotes la droite ab fera encore divifée en deux également de même que Gg l'eft par fon diamétre pq, & cela à caufe de $aG = bg$. Or les triangles Oba, ORS font femblables, & le diamétre pq qui paffe par leur fommet O divife en deux également la bafe ba du triangle Oba, donc le même diamétre coupe auffi en deux également en r la bafe RS du triangle ORS. Ainfi ajoutant à Rr la partie RP, & à la droite RS, la partie ST égale à RP, nous aurons $Tr = rP$, & partant la droite TP eft divifée en deux également en r par le diamétre pq conjugué du diamétre EF, & ainfi des autres.

849. PROBLEME. *Les afymptotes* YT, LV *(Fig. 150.) étant données, & un point* R *de l'une des hyperboles oppofées, décrire l'hyperbole.*

Je divife l'angle YOL des afymptotes en deux également par la droite OS, & cette droite eft dans la pofition du premier axe. Je mene par le point donné R une droite RX paralelle à OS jufqu'à ce qu'elle rencontre l'afymptote LV en X, & alors je la prolonge jufqu'à ce que XT foit égal à NR; ainfi j'ai $RX \times XT$ égal au quarré de la moitié du premier axe (*N.* 850.); car il eft vifible que le point T doit être un point de l'hyperbole oppofée

à celle qu'on me demande, c'eſt pourquoi prenant une moyenne proportionnelle entre RX & XT, & la portant ſur OS de O en B, & de O en A; j'ai le premier axe AB. Par le point donné R, je mene entre les aſymptotes la droite HM perpendiculaire au premier axe, & j'ai HR×RM égal au quarré de la moitié du ſecond axe (*N.* 805.), car ce ſecond axe doit être paralelle à HM. Prenant donc une moyenne proportionnelle entre HR, & RM, & l'élevant perpendiculairement de part & d'autre du grand axe au centre O; j'ai le ſecond axe CD, & les deux axes étant trouvés, je décris l'hyperbole, comme il a été enſeigné ci-deſſus.

Après avoir trouvé le premier axe AB on pourroit encore plus aiſément trouver le ſecond CD, en menant par le ſommet B la tangente PQ, laquelle eſt égale au ſecond axe (*N.* 801.); c'eſt pourquoi ſi par le milieu O du premier axe AB, on mene une droite CD perpendiculaire ſur AB, & qu'on prenne ſur cette perpendiculaire la partie OC égale à PB, & la partie OD égale à BQ, on aura le ſecond axe CD dans ſa poſition.

Fin du premier Tome.



TABLE DES CHAPITRES ET DES TITRES

CONTENUS DANS CE PREMIER VOLUME.

LIVRE PREMIER,

Contenant les Elemens de l'Arithmétique & de l'Algébre.

LIVRE SECOND,

Qui contient les Elémens de la Géométrie, Théorique & Pratique des lignes, des Surfaces & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections Coniques, du Toisé de la Maçonnerie & des bois, & du Calcul des Fractions décimales.

Fin de la Table.



APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Chancelier, *Elémens des principales Parties des Mathématiques*, & le *Traité de Perspective*, par M. l'Abbé Deidier, & je n'ai rien trouvé qui puisse en empêcher l'impression. Fait à Paris le 19 Juillet 1744.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre; A nos amés & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de Notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra; SALUT. Notre bien-amé Charles-Ant. JOMBERT, Libraire à Paris, & ordinaire pour notre Artillerie & pour le Génie, nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public plusieurs Ouvrages, qui ont pour Titres *Elémens de la Guerre, des Siéges, &c. contenans l'Artillerie, l'Attaque & la Défense des Places, par* M. LE BLOND; *Principes du Systême des Petits Tourbillons de Descartes, par l'Abbé* DE LAUNAY; *Geographie Physique ou Introduction à la Connoissance de l'Univers, par* STRUYCK, *traduit en François; les Elémens de la Physique-Mathématique, par s'*GRAVESANDE, *traduit en François; Dictionnaire de Mathématique de* WOLFIUS, *traduit en François; Cours de Mathématique de* WOLFIUS, *traduit en François; Maniere de graver en Taille-douce & à l'Eau Forte, par Abraham* BOSSE; *les Régles du Dessein & du Lavis; Traité de Physique expérimentale, traduit de l'Anglois de* DESAGULIERS; *Elémens Generaux des Parties des Mathématiques necessaires à l'Artillerie & au Génie, par M. l'Abbé* DEIDIER; s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaire. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages ci-dessus spécifiés en un ou plusieurs volume, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *quinze* années consécutives, à compter du jour de la datte desdites Présentes; Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission ex-

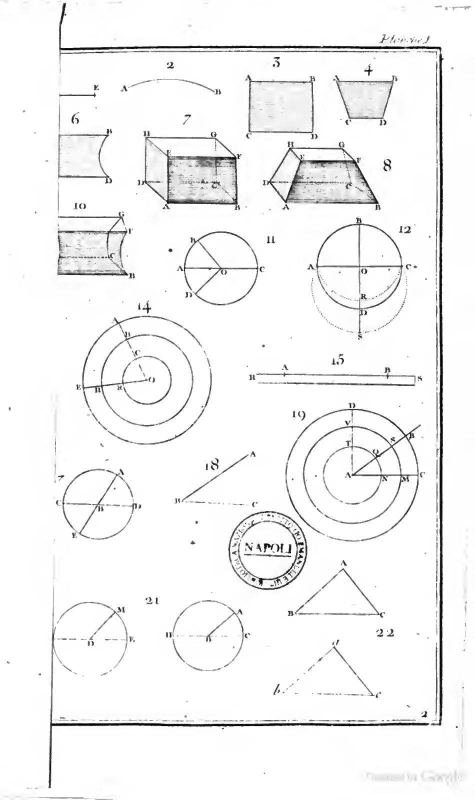
presse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, & de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modéle sous le contrescel desdites présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notament à celui du dix Avril 1725; & qu'avant de les exposer en vente, le manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression desdits Livres sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancellier de France, le tout à peine de nullité des présentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenu pour duëment signifiée, & qu'aux copies collationnés par l'un de nos amés & feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission & nonobstant clameur de Haro, Charte Nomande & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-sixiéme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cens quarante-trois, & de notre Regne le vingt-huitiéme. Par le Roi en son Conseil,

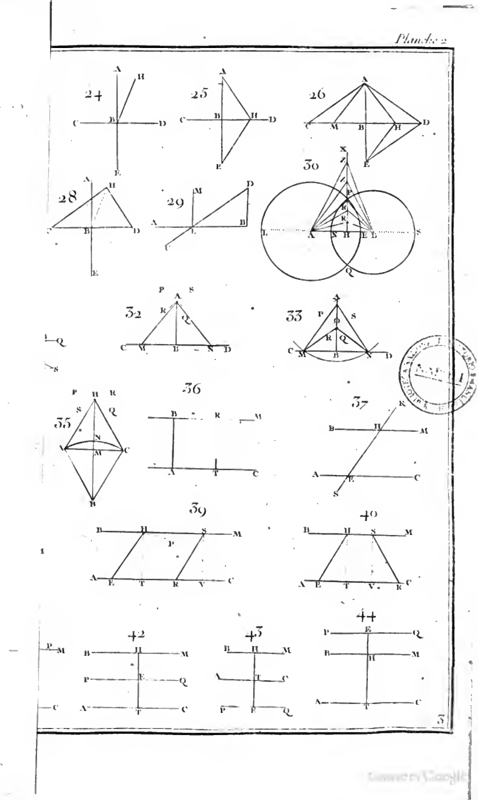
SAINSON.

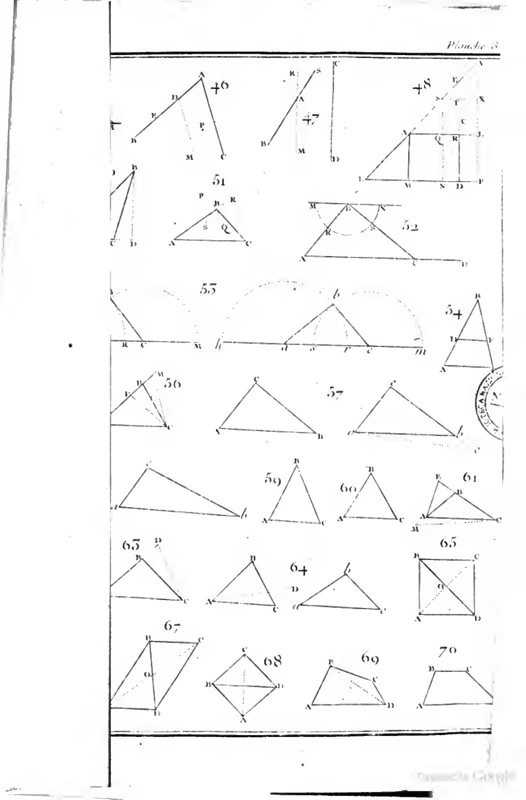
Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris N°. 185. fol. 155. conformément aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 23 Mai 1743.

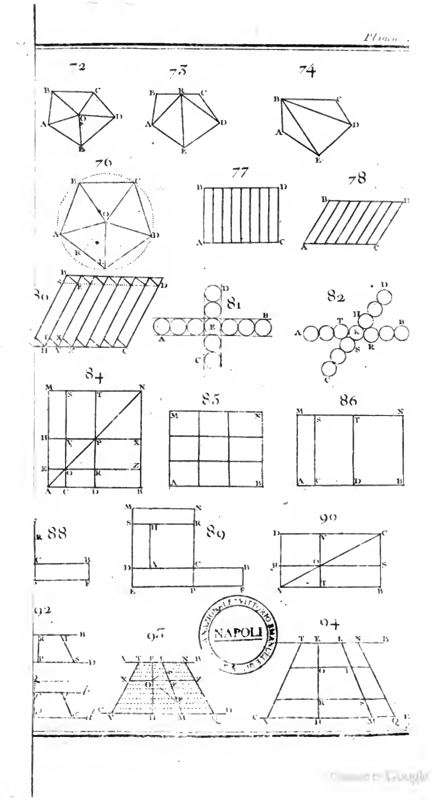
SAUGRAIN, *Syndic.*

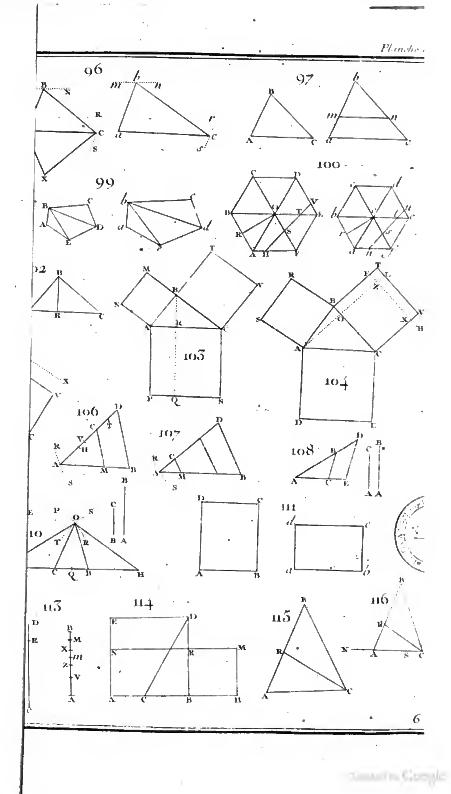
De l'Imprimerie de J. CHARDON.


2
3
4
6
7
8
10
11
12
14
15
18
19
21
22
NAPOLI
2


24
25
26
28
29
30
32
33
35
36
37
39
40
42
43
44


46
47
48
51
52
53
54
56
57
59
60
61
63
64
65
67
68
69
70


72
73
74
76
77
78
80
81
82
84
85
86
88
89
90
92
93
94


96
97
99
100
103
104
106
107
108
110
111
113
114
115
116

118

119

120

122

123

125

126

128

129

130

132

133

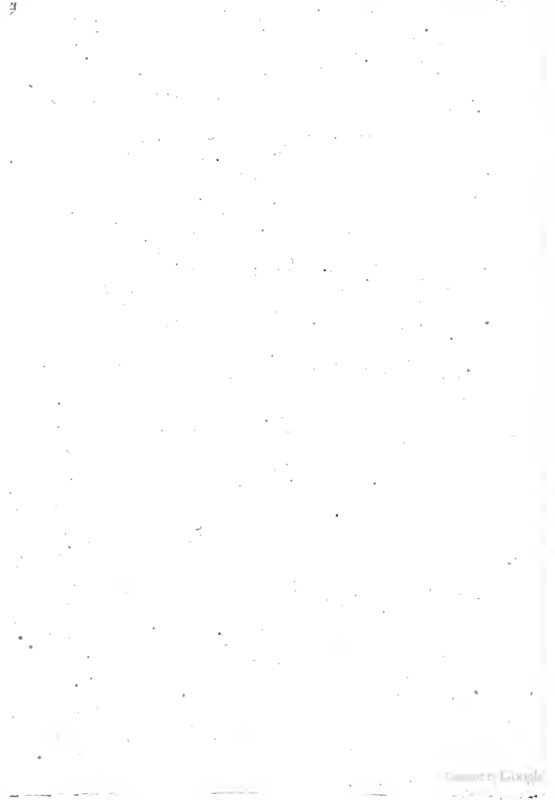
134

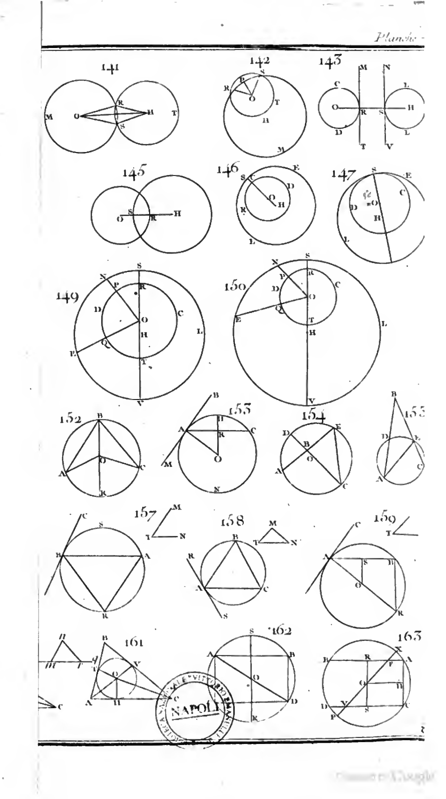
135

137

138

139




141
142
143
145
146
147
149
150
152
153
154
155
157
158
159
161
162
163

165 166 167 168

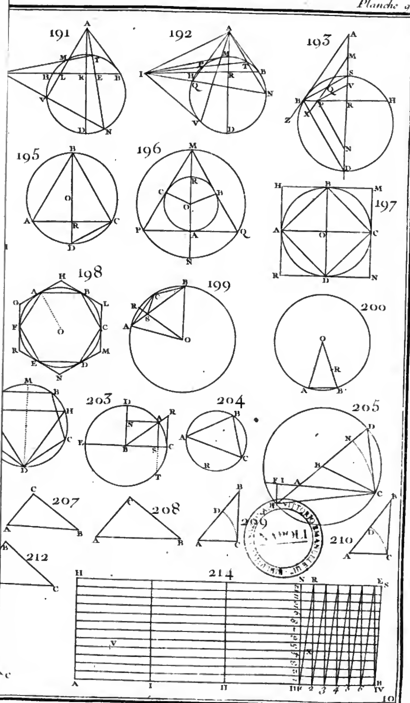
170 171 172 173

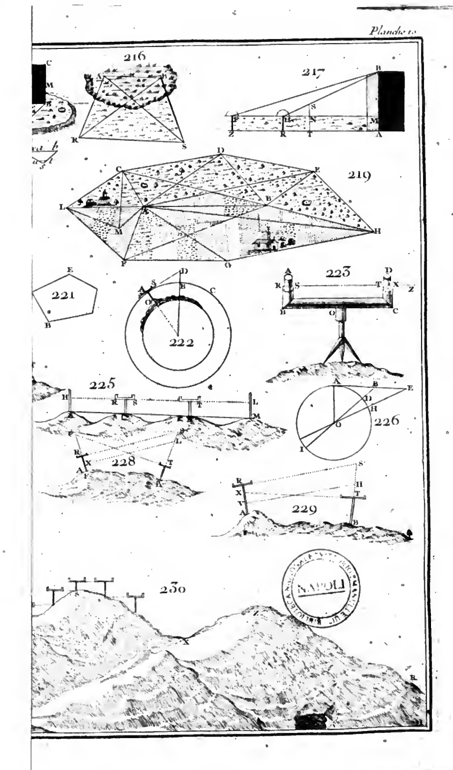
175 176 177

179 180 181

183 184 185

187 188 189


191
192
193
195
196
197
198
199
200
203
204
205
207
208
209
210
212
214


216
217
219
221
222
223
225
226
228
229
230

232 233 234

236 237 238

240 241

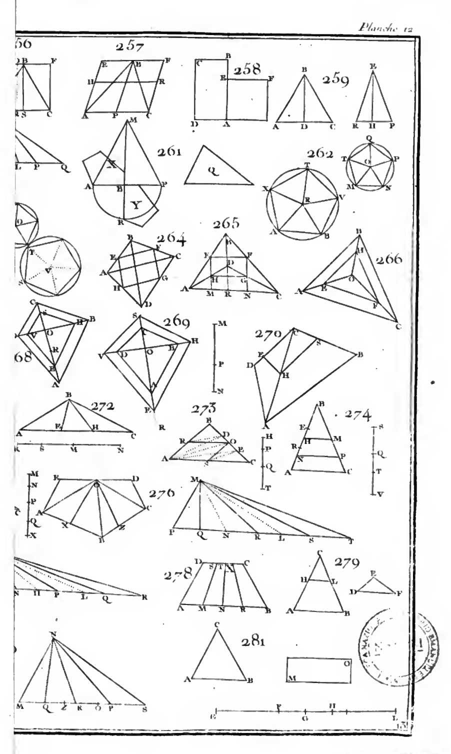
243 244

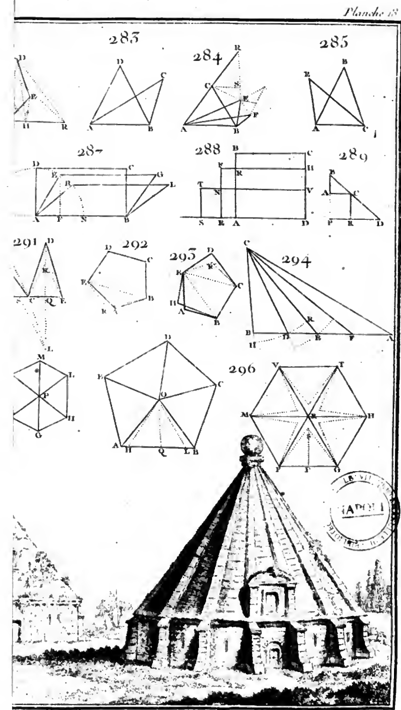
246 247

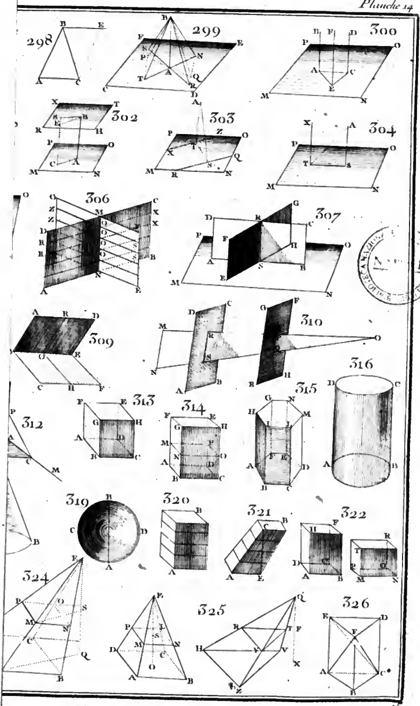
249 251

250

253 254


256
257
258
259
261
262
264
265
266
268
269
270
272
273
274
276
278
279
281


283
284
285
287
288
289
291
292
293
294
296


298
299
300
302
303
304
306
307
309
310
316
312
313
314
315
319
320
321
322
324
325
326


7

328 329 330 331

333 334 335

337 338

339 342

341 342 343

345

346

347

348

352

350

351

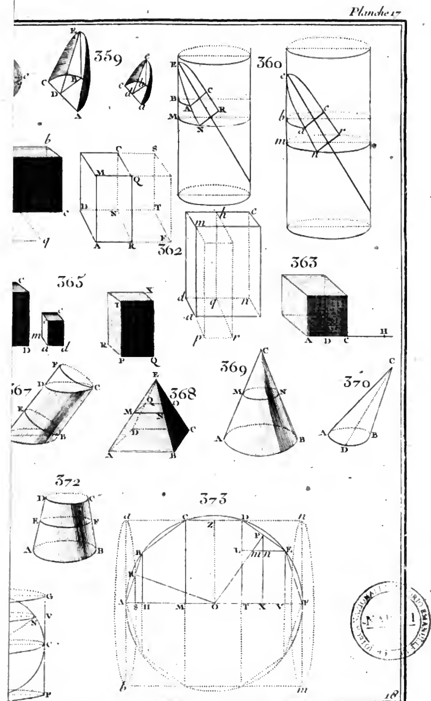
353

355

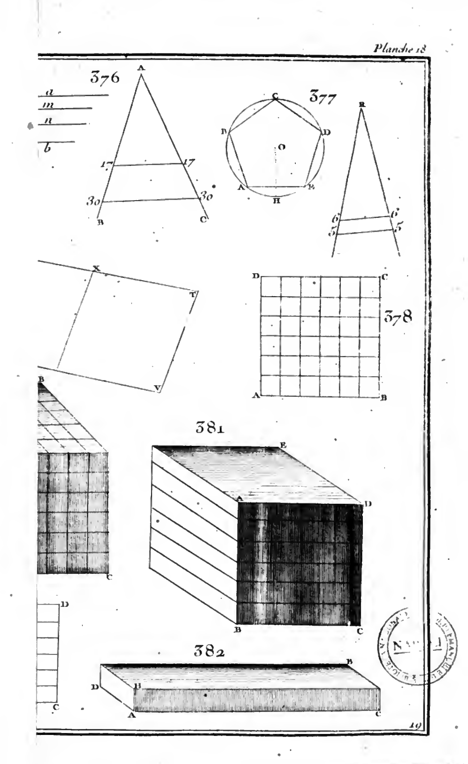
354

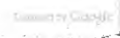
356

357


359
360
362
363
365
367
368
369
370
372
373




376
a
m
n
b
A
17
17
30
30
B
C
377
C
B
D
O
A
E
H
R
6
6
5
5
X
T
V
D
C
378
A
B
B
381
E
A
D
B
C
D
C
382
B
D
H
A
C

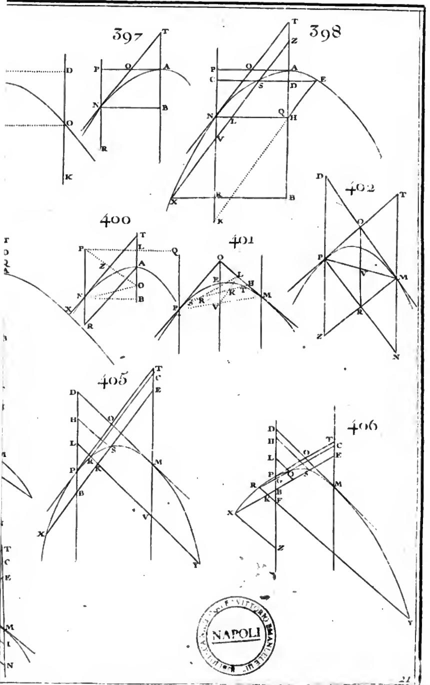


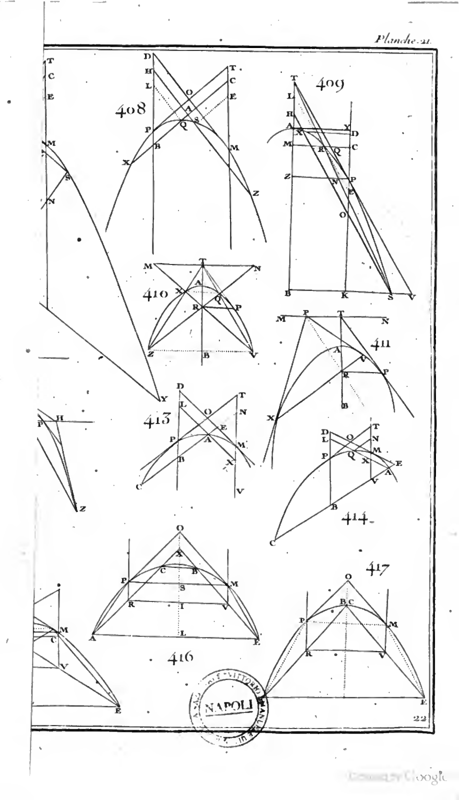
384 385 386

388 389

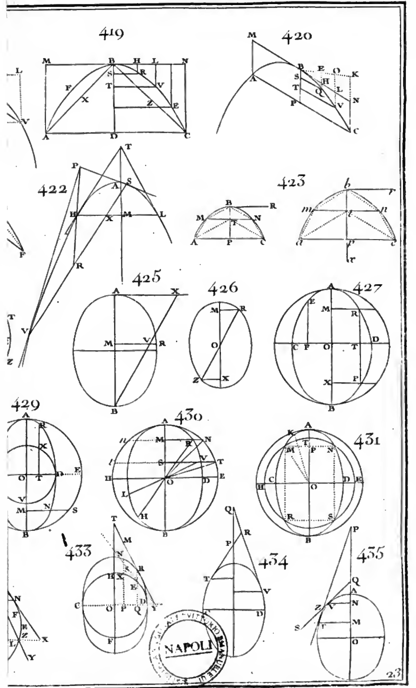
391 392

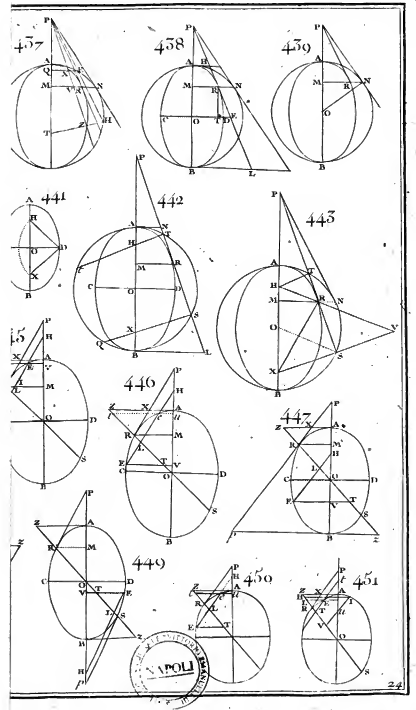
394 395


397
398
400
401
402
405
406

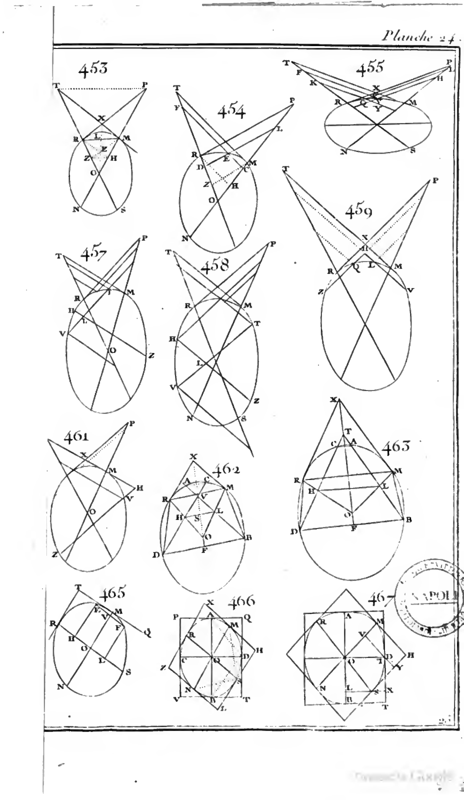

408
409
410
411
413
414
416
417
NAPOLI

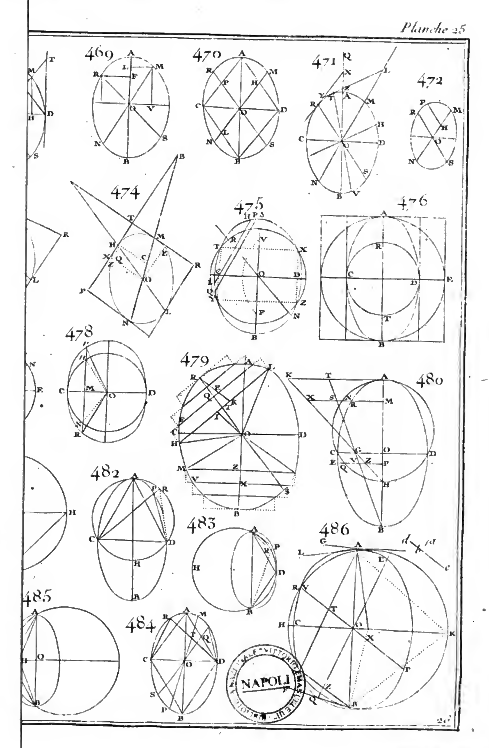


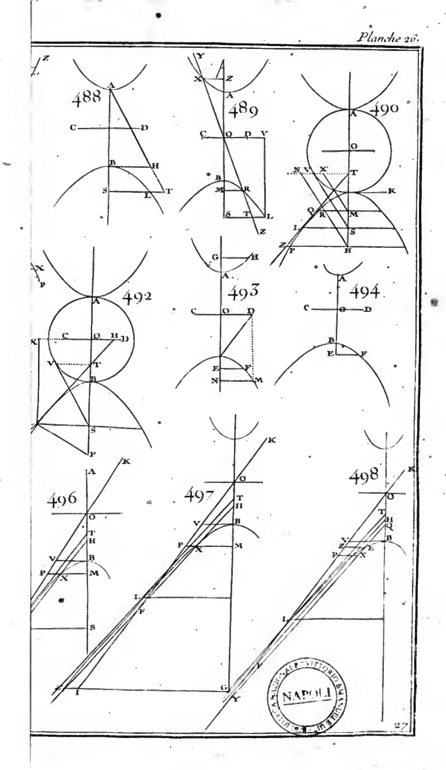

419
420
422
423
425
426
427
429
430
431
433
434
435
23


437
438
439
441
442
443
45
446
447
449
450
451




453
454
455
457
458
459
461
462
463
465
466
467


469
470
471
472
474
475
476
478
479
480
482
483
484
485
486


488
C
D
A
B
H
S
L
T
489
Y
X
Z
A
C
O
D
V
B
M
R
S
T
L
Z
490
A
O
N
V
X
T
K
Q
R
M
L
S
Z
P
H
492
A
C
O
H
D
K
V
T
B
S
P
493
G
H
A
C
O
D
E
F
N
M
494
A
C
O
D
B
E
F
496
A
K
O
T
H
V
B
P
X
M
S
I
497
K
O
T
H
V
B
P
X
M
L
F
G
Y
498
K
O
T
H
Q
V
Z
E
B
P
X
L
F

500

501

503

504

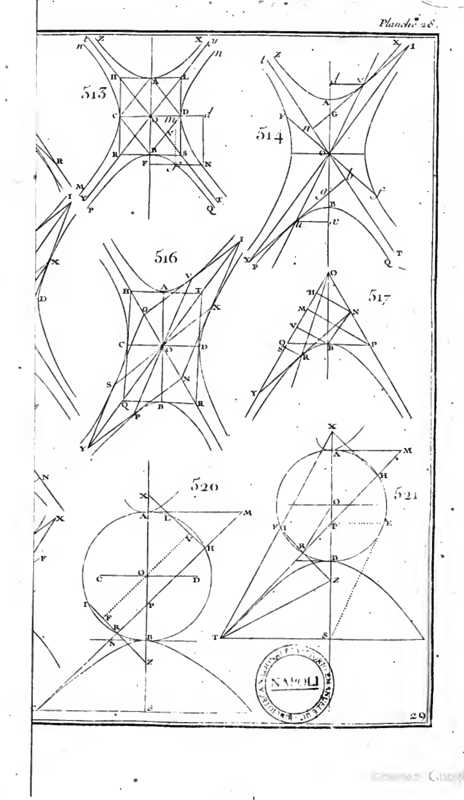
507

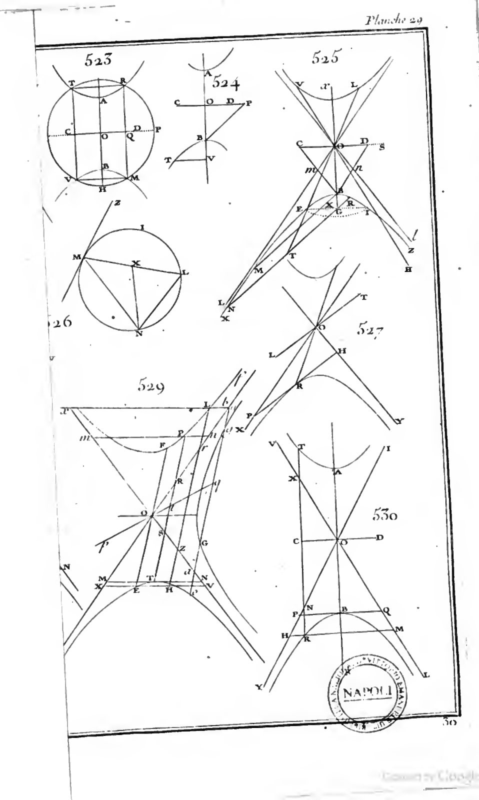
506

510

509

511


513
514
516
517
520
521


523
T
R
A
C
D
P
O
Q
B
V
M
H
524
A
C
O
D
P
B
T
V
525
V
x
L
C
O
D
S
m
n
B
E
X
R
G
I
T
M
L
N
X
l
Z
H
Z
I
M
X
L
N
526
527
T
O
L
H
R
P
X
Y
529
x
L
b
m
P
n
F
r
R
q
O
p
S
Z
G
d
M
N
X
T
V
E
H
V
T
I
X
A
530
C
O
D
N
B
P
Q
H
R
M
Y
L
NAPOLI







